3BIM - EDO & Modélisation
Mercredi 29 janvier 2020 – Durée : 2 heures

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, je vous demande donc de respecter strictement les règles ci-dessous.

- Pour cocher une case, remplissez-la en noir (■) en utilisant un stylo à bille noir.
- Pour corriger, effacez la case avec du correcteur blanc ; ne la retracez pas.
- N'inscrivez rien dans l'en-tête ni dans les marges des pages.
- Le symbole ♣ indique que le nombre de bonnes réponses proposées est indéterminé (0, 1, 2,. . .). Son absence signifie que la question a une unique bonne réponse.

Voici comment encoder une valeur numérique :

■0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9 ← Coder ici la partie entière

.

□0 □1 □2 □3 □4 ■5 □6 □7 □8 □9 ← Coder ici la première décimale

■0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9 ← Coder ici la seconde décimale

Les questions à choix multiples sont à espérance nulle : réponse juste = 1 point ; pas de réponse ou réponses incohérentes = 0 point ; réponse fausse à une question avec n propositions = $-\frac{1}{n-1}$ points.

Vous pouvez vous munir d'une feuille A4 recto-verso manuscrite originale dont le contenu est à votre convenance, ainsi que de tout type de calculatrice **non connectée à un réseau de télécommunication**. L'usage du téléphone portable est strictement **interdit**.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

. . . .

Numéro d'étudiant :

. . . .

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Exercice n°1

On veut résoudre le système (1) $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$ avec $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Question 1 Le système (1) admet-il :

- □ Une infinité de points d'équilibre ?
- □ Aucun point d'équilibre ?
- □ Un unique point d'équilibre ?

Question 2 La matrice **A** admet-elle :

- □ Deux valeurs propres distinctes ?
- □ Deux valeurs propres complexes conjuguées ?
- □ Une valeur propre double ?

Question 3 Quelle est la nature du point d'équilibre $(0,0)$?

- ☐ Foyer instable
- ☐ Nœud asymptotiquement stable
- ☐ Étoile asymptotiquement stable
- ☐ Centre
- ☐ Nœud instable
- ☐ Nœud dégénéré asymptotiquement stable

Question 4 Quelle est la forme de Jordan associée à $\mathbf{A}$?

☐ $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Question 5 Quelle matrice de passage permet de mettre $\mathbf{A}$ sous sa forme de Jordan ?

☐ $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Question 6 Que vaut $\mathbf{P^{-1}}$?

☐ $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{P^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & -1/4 \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question 7 Quel calcul faut-il faire pour passer de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{J}$?

- ☐ $\mathbf{P^{-1}AP}$
- ☐ $\mathbf{PAP^{-1}}$

Question 8 Que vaut $e^{t\mathbf{J}}$?

☐ $e^{t\mathbf{J}} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $e^{t\mathbf{J}} = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ ☐ $e^{t\mathbf{J}} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question 9 En déduire $e^{t\mathbf{A}}$.

☐ $e^{t\mathbf{A}} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & (5t+1)/2 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$ ☐ $e^{t\mathbf{A}} = e^{-t}\begin{pmatrix} 4t+1 & 8t \\ -2t & 1-4t \end{pmatrix}$

☐ $e^{t\mathbf{A}} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & (5t+8)/4 \\ 0 & -t/2 \end{pmatrix}$ ☐ $e^{t\mathbf{A}} = e^{-t}\begin{pmatrix} (2t+1)/4 & -t/8 \\ 2t & (-2t+1)/4 \end{pmatrix}$

Question 10 Soit $K = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ une condition initiale du système (1). Comment s'écrit sa solution générale ?

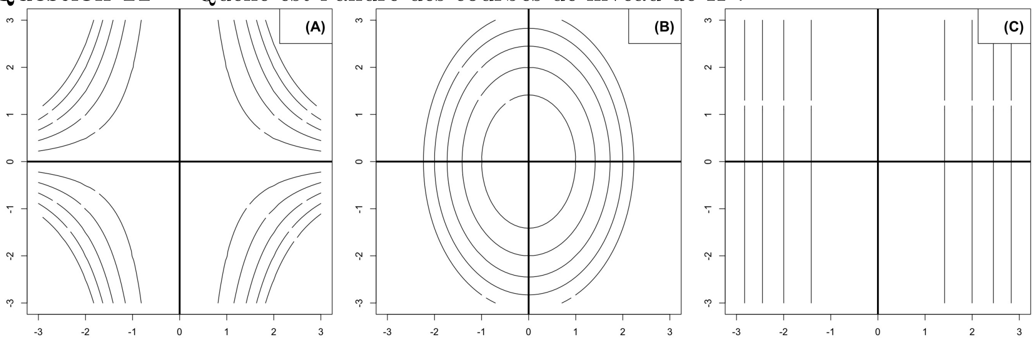
☐ $\mathbf{X(t)} = \mathbf{e^{-t}}\begin{pmatrix} x_0 + (5t+8)y_0/4 \\ -ty_0/2 \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{X(t)} = \mathbf{e^{-t}}\begin{pmatrix} (4t+1)x_0 + 8ty_0 \\ -2tx_0 + (1-4t)y_0 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{X(t)} = \mathbf{e^{-t}}\begin{pmatrix} (2t+1)x_0/4 + -ty_0/8 \\ 2tx_0 + (-2t+1)y_0/4 \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{X(t)} = \mathbf{e^{-t}}\begin{pmatrix} x_0 + (5t+1)y_0/2 \\ -ty_0 \end{pmatrix}$

Exercice n°2

On considère la fonction $H(x, y) = \frac{x^2 y}{2}$.

Question 11 Quelle est l'allure des courbes de niveau de H ?



☐ (B) ☐ (A) ☐ (C)

Question 12 La fonction H est-elle définie positive ?

☐ Oui ☐ Non

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) \\ \\ \frac{dy(t)}{dt} = 2y(t) \end{cases} \qquad (2)$$

Question 13 La fonction H est-elle une intégrale première pour le système (2) ?

☐ Non ☐ Oui

Question 14 Quelle est la nature du point d'équilibre du système (2) ?

☐ Noeud instable ☐ Étoile instable
☐ Foyer instable ☐ Point selle

Question 15 En déduire $\lim_{t \to +\infty} x(t)$ pour une condition initiale (x_0, y_0) telle que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ $+\infty$

Question 16 En déduire $\lim_{t \to +\infty} y(t)$ pour une condition initiale (x_0, y_0) telle que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ $+\infty$

Problème n°1

En 2004, Curry et collaborateurs [1] proposent le modèle suivant pour décrire une interaction entre deux espèces :

$$\begin{cases} \dot{x} = bx - \gamma\,(x)^2 - \frac{xy}{1+Kx} \\ \dot{y} = -ay + \frac{xy}{1+Kx} \end{cases} \qquad (3)$$

1. Cury P, Freon P, Maloney C, Shannon L, Shin Y. 2004. Processes and patterns of interactions in marine fish populations : an ecosystem perspective. *The Sea*, 13, 475-554.

avec $x(t)$ et $y(t)$ les densités de population des deux espèces au temps t, $\dot{x}$ et $\dot{y}$ leurs dérivées par rapport à t.

Question 17 De quelle interaction écologique s'agit-il ?

- ☐ amensalisme
- ☐ compétition
- ☐ prédation
- ☐ mutualisme
- ☐ commensalisme
- ☐ symbiose

Question 18 Dans cette interaction, quel rôle joue l'espèce associée à la variable $y(t)$?

- ☐ compétiteur
- ☐ symbiote
- ☐ proie
- ☐ prédateur

Question 19 Dans le système (3), quelle est l'expression de la réponse fonctionnelle ?

- ☐ $f(x) = \frac{xy}{1+Kx}$
- ☐ $f(x) = x$
- ☐ $f(x) = \frac{x}{1+Kx}$

Question 20 Quel est le type de la réponse fonctionnelle ?

- ☐ Holling type I
- ☐ Holling type II
- ☐ Holling type III

Question 21 A quel modèle de croissance correspond l'expression $bx(t) - \gamma\left(x(t)\right)^2$?

- ☐ Le modèle de Verhuslt
- ☐ Le modèle de Weibull
- ☐ Le modèle de Gompertz
- ☐ Le modèle de Malthus

Question 22 Quelle interprétation peut-on donner à $\frac{b}{\gamma}$?

- ☐ coefficient de prédation
- ☐ taux de mortalité
- ☐ capacité limite
- ☐ taux de croissance

On choisit le plan de phase (x, y).

Question 23 Quelles sont les coordonnées des vecteurs vitesses ?

- ☐ $\vec{v} = (\frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt})$
- ☐ $\vec{v} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$

Question 24 ♣ Parmi les propositions suivantes, identifiez lesquelles correspondent aux équations des isoclines verticales.

- ☐ $y = (b - \gamma x)(1 + Kx)$
- ☐ $x = \frac{a}{1-aK}$
- ☐ $y = 0$
- ☐ $x = 0$

Question 25 ♣ Parmi les propositions suivantes, identifiez lesquelles correspondent aux équations des isoclines horizontales.

- ☐ $y = 0$
- ☐ $y = (b - \gamma x)(1 + Kx)$
- ☐ $x = \frac{a}{1-aK}$
- ☐ $x = 0$

Question 26 ♣ Quelle(s) librairie(s) R peut-on utiliser pour simuler un système dynamique ?

- ☐ `deSolve`
- ☐ `trajectory`
- ☐ `flowField`
- ☐ `rootSolve`
- ☐ `nullclines`
- ☐ `phaseR`
- ☐ `lsoda`
- ☐ `ode`

Question 27 Quelle fonction R peut-on utiliser pour représenter graphiquement le champ de vecteurs d'un système dynamique ?

- ☐ `lsoda`
- ☐ `phaseR`
- ☐ `flowField`
- ☐ `nullclines`
- ☐ `trajectory`
- ☐ `deSolve`

Question 28 ♣ Quelles fonctions R peut-on utiliser pour représenter graphiquement les chroniques d'un système dynamique ?

- ☐ `plot`
- ☐ `numericalSolution`
- ☐ `flowField`
- ☐ `nullclines`
- ☐ `phaseR`
- ☐ `trajectory`
- ☐ `deSolve`
- ☐ `rootSolve`

Question 29 Dans les lignes de code R ci-dessous qui servent à implémenter le système (3), à quel quadruplet correspond le vecteur `parameters` ?

```
> model <- function(t, y, parameters)
 {
   dy <- numeric(2)
   dy[1] <- parameters[1]*y[1] - parameters[2]*y[1]^2 - y[1]*y[2]/(1+parameters[3]*y[1])
   dy[2] <- -parameters[4]*y[2] + y[1]*y[2]/(1+parameters[3]*y[1])
   list(dy)
 }
```

- ☐ (a, b, γ, K)
- ☐ (K, γ, a, b)
- ☐ (b, γ, K, a)
- ☐ (b, γ, a, K)

En fonction de γ, trois portraits de phase sont possibles selon la position relative des isoclines. **Voir figure en fin de sujet**. Vous pouvez détacher la dernière page du sujet pour plus de commodité.

Question 30 ♣ Parmi les coordonnées suivantes, identifiez celles qui correspondent au point d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

- ☐ $(-\frac{1}{K}, 0)$
- ☐ $(0, -\frac{1}{K})$
- ☐ $(\frac{b}{\gamma}, 0)$
- ☐ $(0, \frac{b}{\gamma})$
- ☐ $(0, b)$
- ☐ $(b, 0)$

Question 31 Parmi les coordonnées suivantes, identifiez celles qui correspondent au poins d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées.

- ☐ $(b, 0)$
- ☐ $(0, b)$
- ☐ $(\frac{b}{\gamma}, 0)$
- ☐ $(-\frac{1}{K}, 0)$

Question 32 Quelle est l'abscisse du sommet de la parabole ?

- ☐ $\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\gamma} - K\right)$
- ☐ $\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\gamma} - \frac{1}{K}\right)$
- ☐ $\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\gamma} + \frac{1}{K}\right)$
- ☐ $\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{b} - \frac{1}{K}\right)$

On suppose maintenant que $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{4}$ et $K = 1$, avec $\gamma > 0$.

Question 33 Quelle est la valeur numérique de l'abscisse positionnant la droite verticale en trait plein ?

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
.
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Question 34 ♣ Parmi les propositions suivantes, identifiez les coordonnées des points d'équilibre sur les portraits de phase n°1 et 2.

☐ $(\frac{1}{4\gamma}, 0)$ ☐ $(0, \frac{1}{4\gamma})$ ☐ $(2, \frac{3}{4} - 6\gamma)$
☐ $(0, 0)$ ☐ $(2, \frac{3}{4} + 6\gamma)$ ☐ $(\frac{3}{4} - 6\gamma, 2)$

Question 35 Quelle valeur seuil de γ conditionne l'existence du point d'équilibre non trivial ?

☐ $\frac{5}{12}$ ☐ $\frac{1}{20}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{1}{8}$

Question 36 Quelle est l'expression de la matrice jacobienne du système (3) ?

☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - 2\gamma x - \frac{y}{(1+x)^2} & \frac{y}{(1+x)^2} \\ -\frac{2}{3} + \frac{x}{1+x} & -\frac{x}{1+x} \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - 2\gamma x - \frac{y}{(1+x)^2} & -\frac{x}{1+x} \\ \frac{y}{(1+x)^2} & -\frac{2}{3} + \frac{x}{1+x} \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - 2\gamma x - \frac{y}{(1+x)^2} & \frac{y}{(1+x)^2} \\ -\frac{x}{1+x} & -\frac{2}{3} + \frac{x}{1+x} \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{1+x} & \frac{y}{(1+x)^2} \\ -\frac{2}{3} + \frac{x}{1+x} & \frac{1}{4} - 2\gamma x - \frac{y}{(1+x)^2} \end{pmatrix}$

Question 37 En déduire la nature du point d'équilibre origine ?

☐ Point selle ☐ Nœud asymptotiquement stable
☐ Foyer instable ☐ Des centres

Question 38 Donnez la matrice jacobienne au second point d'équilibre trivial (*i.e.*, non origine) ?

☐ $\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{2}{3} + \frac{1}{1+4\gamma} & -\frac{1}{1+4\gamma} \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+4\gamma} & 0 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{1+4\gamma} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{1+4\gamma} \\ 0 & -\frac{2}{3} + \frac{1}{1+4\gamma} \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{1+4\gamma} & -\frac{2}{3} + \frac{1}{1+4\gamma} \end{pmatrix}$

Question 39 ♣ Parmi les propositions suivantes, cochez ce qui est vrai :

☐ Cas n°3 : le second point d'équilibre trivial est un point selle
☐ Cas n°2 : le second point d'équilibre trivial est un nœud asymptotiquement stable
☐ Cas n°2 : le second point d'équilibre trivial est un point selle
☐ Cas n°1 : le second point d'équilibre trivial est un point selle
☐ Cas n°3 : le second point d'équilibre trivial est un nœud asymptotiquement stable
☐ Cas n°1 : le second point d'équilibre trivial est un nœud asymptotiquement stable

Question 40 Donnez la matrice jacobienne au point d'équilibre non trivial ? *On supposera que les conditions de son existence sont réunies.*

☐ $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{10}{3}\gamma & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{12} - \frac{2}{3}\gamma & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} + \frac{10}{3}\gamma & 0 \\ \frac{1}{12} - \frac{2}{3}\gamma & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{10}{3}\gamma & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} - \frac{2}{3}\gamma \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} - \frac{10}{3}\gamma \\ \frac{1}{12} - \frac{2}{3}\gamma & 0 \end{pmatrix}$

Question 41 Que vaut $\det(\mathbf{A}^*)$?

☐ $\frac{1}{18} - \frac{4}{9}\gamma$ ☐ $\frac{10}{9}\gamma - \frac{1}{9}$ ☐ $\frac{4}{9}\gamma - \frac{1}{18}$

Question 42 Quel est le signe de $\det(\mathbf{A}^*)$?

☐ $\det(\mathbf{A}^*) > \mathbf{0}$ ☐ $\det(\mathbf{A}^*) < \mathbf{0}$

Question 43 Que vaut $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^*)$?

☐ 0 ☐ $-\frac{1}{2} - \frac{10}{9}\gamma$
☐ $\frac{1}{6} + \frac{10}{3}\gamma$ ☐ $\frac{1}{6} - \frac{10}{3}\gamma$

Question 44 Dans le cas du portrait de phase n°1, on a :

☐ $\det(\mathbf{A}^*) > \mathbf{0}$ et $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^*) < \mathbf{0}$ ☐ $\det(\mathbf{A}^*) < \mathbf{0}$ et $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^*) > \mathbf{0}$
☐ $\det(\mathbf{A}^*) > \mathbf{0}$ et $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^*) > \mathbf{0}$ ☐ $\det(\mathbf{A}^*) < \mathbf{0}$ et $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^*) < \mathbf{0}$

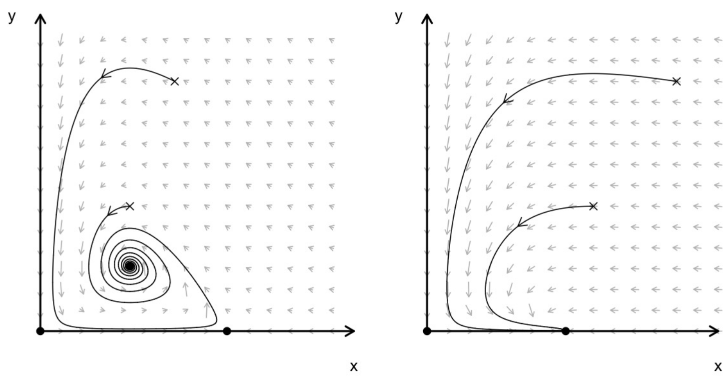
Question 45 Dans le cas du portrait de phase n°2, on a :

☐ $\det(\mathbf{A}^*) < \mathbf{0}$ et $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^*) > \mathbf{0}$ ☐ $\det(\mathbf{A}^*) < \mathbf{0}$ et $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^*) < \mathbf{0}$
☐ $\det(\mathbf{A}^*) > \mathbf{0}$ et $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^*) > \mathbf{0}$ ☐ $\det(\mathbf{A}^*) > \mathbf{0}$ et $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^*) < \mathbf{0}$

Question 46 Pour quelle valeur numérique γ^* de γ a-t-on $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^*) = \mathbf{0}$?

☐ $\frac{1}{20}$ ☐ $\frac{5}{12}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{2}{3}$

On donne les deux portraits de phase suivants :



Question 47 À quel cas correspond le portrait de phase de gauche :

☐ Cas n°1 ☐ Cas n°3 ☐ Cas n°2

Question 48 À quel cas correspond le portrait de phase de droite :

☐ Cas n°1 ☐ Cas n°2 ☐ Cas n°3

Question 49 Que peut-on dire du point d'équilibre non trivial lorsque $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^*) = \mathbf{0}$?

☐ C'est un foyer asymptotiquement stable ☐ C'est un nœud asymptotiquement stable
☐ La linéarisation prévoit des centres ☐ C'est un point selle

Question 50 Soit $\lambda_1(\gamma)$ et $\lambda_2(\gamma)$ les valeurs propres de $\mathbf{A}^*$. Donner les conditions d'application du théorème de Poincaré-Andronov-Hopf, que l'on supposera réunies pour la suite.

- ☐ $\lambda_{1,2}(\gamma) \in \mathbb{C}$, $Re\left(\lambda_{1,2}\left(\gamma^*\right)\right) = 0$ et $Im\left(\lambda_{1,2}(\gamma^*)\right) = 0$
- ☐ $\lambda_{1,2}(\gamma) \in \mathbb{C}$, $Re\left(\lambda_{1,2}\left(\gamma^*\right)\right) = 0$, $\left.\frac{dRe(\lambda_{1,2}(\gamma))}{d\gamma}\right|_{\gamma=\gamma^*} \neq 0$ et $Im\left(\lambda_{1,2}(\gamma^*)\right) \neq 0$
- ☐ $\lambda_{1,2}(\gamma) \in \mathbb{C}$, $Im\left(\lambda_{1,2}\left(\gamma^*\right)\right) = 0$, $\left.\frac{dIm(\lambda_{1,2}(\gamma))}{d\gamma}\right|_{\gamma=\gamma^*} \neq 0$ et $Re\left(\lambda_{1,2}(\frac{1}{20})\right) \neq 0$
- ☐ $\lambda_{1,2}(\gamma) \in \mathbb{R}$ et $\lambda_{1,2}\left(\gamma^*\right) = 0$

Question 51 ♣ A ce stade de l'étude du système (3), de quelles bifurcations peut-il s'agir ?

- ☐ Bifurcation verticale
- ☐ Bifurcation trans-critique
- ☐ Hopf super-critique
- ☐ Bifurcation selle-nœud
- ☐ Hopf sous-critique
- ☐ Hopf dégénérée

Afin de déterminer de quelle bifurcation il s'agit, nous allons utiliser le logiciel R. On donne les lignes de code R suivantes :

```
> par(mar = c(4, 4, 0.25, 0.25), mfrow = c(1, 1))
> flowField(model, xlim = c(0, 6.5), ylim = c(0, 1),
           parameters = c(b, gam, K, a),
           add = FALSE, xlab = "x", ylab = "y", las = 1)
> nullclines(model, xlim = c(-0.1, 6.5), ylim = c(-0.1, 1),
            parameters = c(b, gam, K, a), add.legend = FALSE,
            col = c("red", "blue"))
> init <- c(5, 0.2)
> trajectory(model, y0 = init, tlim = c(0, 250),
            parameters=c(b,gam,K,a), add = TRUE)
```

Question 52 Combien de graphes seront représentés dans la fenêtre graphique ?

☐ 2 ☐ 3 ☐ 1 ☐ 4

Question 53 Quelle est la taille de la marge à gauche du(des) graphe(s) ?

☐ 2 ☐ 3 ☐ 1 ☐ 4

Question 54 Que permet l'option `las = 1` ?

- ☐ Des labels verticaux
- ☐ Des labels parallèles aux axes
- ☐ Des labels horizontaux
- ☐ Des labels perpendiculaires aux axes

Question 55 Que permet la fonction `nullclines` ?

- ☐ Tracer les trajectoires
- ☐ Tracer le champ de vecteurs
- ☐ Tracer les isoclines
- ☐ Tracer les chroniques

Question 56 Que vaut la condition initiale ?

☐ $(5, 0.2)$ ☐ $(2, 0.45)$ ☐ $(0.2, 5)$ ☐ $(0.45, 2)$

On donne la ligne de code R suivante, avec la sortie R correspondante **reportée en fin de sujet**. Vvous pouvez détacher la dernière page du sujet pour plus de commodité.

```
> findEquilibrium(model, y0 = c(2, 0.4),
                  parameters = c(b, gam, K, a), summary=TRUE)
```

Question 57 Donnez la valeur du paramètre γ qui a été utilisée pour obtenir les résultats ci-dessus.

□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9
.
□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9
□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9

Question 58 Quelle est l'ordonnée du point d'équilibre non trivial ?

□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9
.
□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9
□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9

Question 59 Que vaut approximativement le déterminant de la jacobienne ?

□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9
.
□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9
□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9
□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9

Question 60 Que vaut approximativement la partie imaginaire des valeurs propres ?

□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9
.
□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9
□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9
□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9

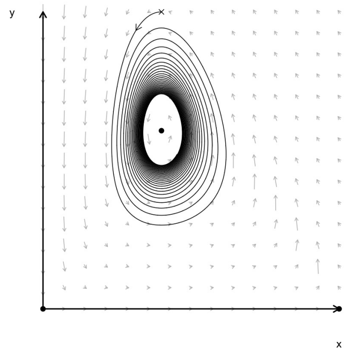
Question 61 Que propose R quant à la nature du point d'équilibre non trivial ?

- □ Nœud instable
- □ Nœud asymptotiquement stable
- □ Point selle
- □ Foyer asymptotiquement stable
- □ Centre
- □ Foyer instable

Question 62 Qu'en concluriez-vous quant au type de bifurcation dont il s'agit ?

- □ Bifurcation verticale
- □ Hopf sous-critique
- □ Hopf super-critique
- □ Hopf dégénérée
- □ Bifurcation selle-nœud
- □ Bifurcation trans-critique

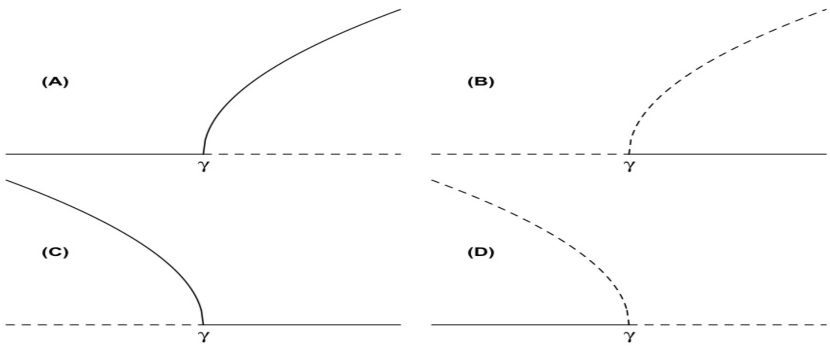
Voici ci-dessous le portrait de phase obtenu par simulation pour γ égal à la valeur de bifurcation :



Question 63 De quelle bifurcation s'agit-il finalement ?

- ☐ Bifurcation selle-nœud
- ☐ Bifurcation trans-critique
- ☐ Hopf dégénérée
- ☐ Bifurcation verticale
- ☐ Hopf sous-critique
- ☐ Hopf super-critique

Question 64 A quel diagramme correspond cette bifurcation ?

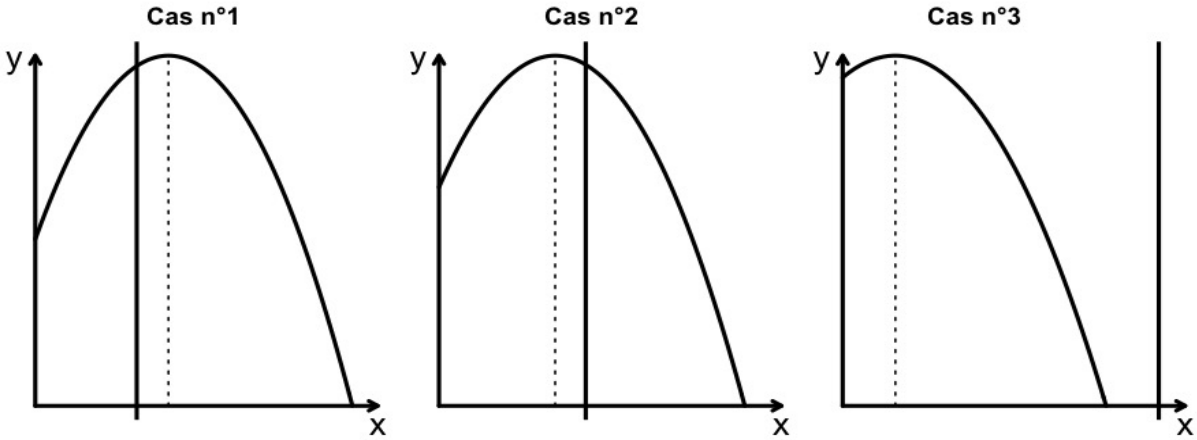


☐ **(D)** ☐ **(A)** ☐ **(C)** ☐ **(B)**

Question 65 Quelle est alors la nature du point d'équilibre non trivial à la bifurcation ?

- ☐ Foyer instable
- ☐ Centre
- ☐ Nœud asymptotiquement stable
- ☐ Foyer asymptotiquement stable

Figure relative aux questions 47 et 48 :



Ligne de code R et la sortie R correspondante, relativement aux questions 57 à 61 :

```
> findEquilibrium(model, y0 = c(2, 0.4),
                 parameters = c(b, gam, K, a), summary=TRUE)

$classification
[1] "Centre"

$Delta
[1] 0.03333333

$deriv
function(t, y, parameters)
{
  dy <- numeric(2)
  dy[1] <- parameters[1]*y[1] - parameters[2]*y[1]^2 - y[1]*y[2]/(1+parameters[3]*y[1])
  dy[2] <- -parameters[4]*y[2] + y[1]*y[2]/(1+parameters[3]*y[1])
  list(dy)
}
<bytecode: 0x7fb8875f1898>

$discriminant
[1] -0.1333333

$eigenvalues
[1] 0+0.1825742i 0-0.1825742i

$eigenvectors
                      [,1]                   [,2]
[1,] -0.9644856+0.0000000i -0.9644856+0.0000000i
[2,]  0.0000000+0.2641353i  0.0000000-0.2641353i

$h
[1] 1e-06
```

```
$jacobian
     [,1]       [,2]
[1,] 0.00 -0.6666667
[2,] 0.05  0.0000000

$max.iter
[1] 50

$parameters
[1] 0.2500000 0.0500000 1.0000000 0.6666667

$plot.it
[1] FALSE

$summary
[1] TRUE

$system
[1] "two.dim"

$tol
[1] 1e-16

$tr
[1] 0

$y0
     [,1]
[1,]  2.0
[2,]  0.4

$ystar
     [,1]
[1,] 2.00
[2,] 0.45
```