Concours B INA ENSA
Session 1994

Les trois exercices sont indépendants

Exercice 1

1. Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{1}{36}u_n$$

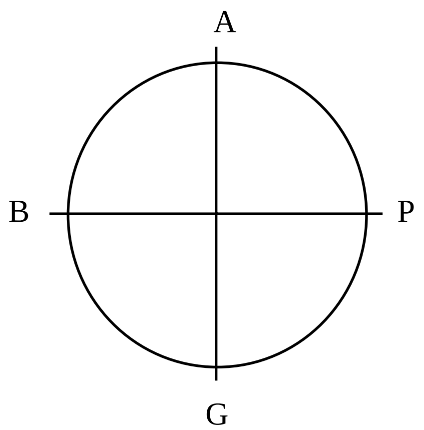
1.a. Résoudre l'équation $36x^2 - 12x - 1 = 0$
On désigne par q_1 et q_2 $(q_1 > q_2)$ les racines.

1.b. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite appartenant à E telle que $a_0 = 1$ et $a_1 = \frac{1}{6}$.
Montrer qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n .$$

1.c. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite appartenant à E telle que $b_0 = 0$ et $b_1 = \frac{1}{3}$.
Exprimer b_n en fonction de *n*.

2. Promenade aléatoire sur un cercle.



Pierre joue en déplaçant un pion sur le cercle ci-contre dans le sens trigonométrique de la façon suivante :
Le jeton se trouve initialement en A. Il lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et il déplace le pion d'un nombre de quarts de tours égal au nombre indiqué par le dé. Par exemple, si le dé marque 3, le pion est placé en *P*.

Tant que le pion est en A ou B, on le déplace selon la règle ci-dessus. La première fois que le pion est placé en P, Pierre a perdu et le jeu s'arrête. La première fois que le pion est placé en G, Pierre a gagné et le jeu s'arrête.
Soit a_n la probabilité pour que le pion soit en A après le $n^{\text{ième}}$ lancer du dé. Soit b_n la probabilité pour que le pion soit en B après le $n^{\text{ième}}$ lancer du dé. On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

2.a. Calculer a_1 et b_1.

2.b. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} à l'aide de a_n et b_n.

2.c. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites appartenant à E.

2.d. Déterminer la probabilité que Pierre gagne. Déterminer la probabilité que Pierre perde. Déterminer la probabilité que le jeu continue indéfiniment.

2.e. On définit la variable aléatoire X par :

- si le jeu se poursuit indéfiniment, alors X est égale à 0 ;
- sinon X est égale au nombre de lancers pour que le jeu s'arrête.

Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 2

Le corps de base est le corps des nombres réels.

1. Soit la matrice $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}$. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

Montrer que **B** est diagonalisable et déterminer une matrice **P** inversible telle que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}$ soit diagonale. (On choisira pour **P** une matrice dont les éléments appartiennent à $\{-1,1\}$).

2. Résoudre le système différentiel : $\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\mathbf{B}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

où *x* et *y* sont des fonctions inconnues deux fois dérivables de la variable réelle *t*.

3. Déterminer les fonctions x_1, x_2, x_3, x_4 deux fois dérivables de la variable *t* telles que :

$$\begin{pmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\\x_4''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&2&0\\0&4&0&2\\2&0&4&0\\0&2&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases}x_1'(0)=0 & x_1(0)=4\\ x_2'(0)=2\sqrt{2} & x_2(0)=0\\ x_3'(0)=0 & x_3(0)=0\\ x_4'(0)=-2\sqrt{2} & x_4(0)=0\end{cases}$$

Exercice 3

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \lambda\sqrt{x}e^{-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

1. Déterminer λ pour que *f* soit la densité d'une variable aléatoire. Dans la suite, λ prend la valeur ainsi déterminée.

2. Construire la courbe représentative de *f*.

3. Pour tout entier naturel *n*, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^{n+\frac{1}{2}} e^{-x} dx$

3.a. Montrer que I_n existe.

3.b. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

3.c. Calculer I_0, I_1 et I_2.

3.d. Une variable aléatoire *X* admet pour densité la fonction *f*. Déterminer, à l'aide des résultats précédents, l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable *X*.

4. Exprimer la fonction de répartition *F* de *X* en fonction de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite. Déterminer $P(X > 2\sigma)$.