CORRIGE DU CONCOURS BANQUE AGRO B ET BE 1994

Ce sujet est composé de trois exercices indépendants les uns des autres, couvrant une grande partie du programme : suites récurrentes et probabilités discrètes pour l'exercice **1** ; algèbre linéaire et équations différentielles pour l'exercice **2** ; intégration et probabilités continues pour l'exercice **3**.

Exercice 1

1.*a*. Résolution de l'équation $36x^2-12x-1=0$.

$$\Delta=144+4\times 36=\left(12\sqrt{2}\right)^2$$

$$q_1=\frac{12+12\sqrt{2}}{2\times 36}=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$q_2=\frac{12-12\sqrt{2}}{2\times 36}=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}$$

1.*b*.

- Nous avons $a_0=1$ et $a_1=\frac{1}{6}$.

$$\begin{cases} a_0=\alpha+\beta=1 \\ a_1=\alpha q_1+\beta q_2=\frac{1}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1-\beta \\ (1-\beta)q_1+\beta q_2=\frac{1}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1-\beta \\ \beta=\frac{1/6-q_1}{q_2-q_1}\end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\frac{1}{2}$$

  Donc, on doit nécessairement prendre $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$.

- Montrons alors par récurrence que $a_n=\frac{1}{2}\left(q_1^n+q_2^n\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, les deux conditions initiales $n=0$ et $n=1$ venant d'être traitées.

  On a alors
$$a_{n+2}=\frac{1}{3}a_{n+1}+\frac{1}{36}a_{n+1} \quad \text{car } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$$
$$=\frac{1}{6}\left(q_1^{n+1}+q_2^{n+1}\right)+\frac{1}{72}\left(q_1^n+q_2^n\right) \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$a_{n+2}=\frac{1}{2}q_1^n\left(\frac{1}{3}q_1+\frac{1}{36}\right)+\frac{1}{2}q_2^n\left(\frac{1}{3}q_2+\frac{1}{36}\right)$$

$$a_{n+2}=\frac{1}{2}q_1^nq_1^2+\frac{1}{2}q_2^nq_2^2$$ car q_1 et q_2 vérifient l'équation en $\boxed{\mathbf{1.}a.}$

$$=\frac{1}{2}\left(q_1^{n+2}+q_2^{n+2}\right)$$

- Finalement, on peut écrire :

$$\boxed{a_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^n\right]}\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$\boxed{\mathbf{1.}c.}$ On pose $b_0=0$ et $b_1=\frac{1}{3}$. Soit $b_n=\rho q_1^n+\sigma q_2^n$.

$$\begin{cases}b_0=\rho+\sigma=0\\ b_1=\rho q_1+\sigma q_2=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=-\sigma\\ \rho\left(q_1-q_2\right)=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sigma=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\text{ car } q_1-q_2=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Finalement, on peut écrire (en procédant par récurrence comme à la question précédente) :

$$\boxed{b_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^n\right]}\qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ ***Promenade aléatoire sur un cercle.***

$\boxed{\mathbf{2.}a.}$ $a_1=\frac{1}{6}$ (il faut faire 4 au premier lancer)

$b_1=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ (il faut faire 1 ou 5 au premier lancer)

$\boxed{\mathbf{2.}b.}$ Soit X_n la variable aléatoire correspondant à la position du pion au $n^{\text{ième}}$ lancer.

$$\mathrm{P}\left[X_{n+1}=B\middle|X_n=A\right]=\frac{1}{3}$$
$$\mathrm{P}\left[X_{n+1}=A\middle|X_n=A\right]=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}\left[X_{n+1} = B \middle| X_n = B\right] = \frac{1}{6}$$
$$\mathrm{P}\left[X_{n+1} = A \middle| X_n = B\right] = \frac{1}{6}$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{6} a_n + \frac{1}{6} b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{6} b_n \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{2.}c\mathbf{.}}$ Posons $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question précédente, il vient :

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & 1/6 \end{pmatrix} V_n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} V_n$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} V_{n+2} &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} V_{n+1} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} V_n \\ &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} V_n \end{aligned}$$

On peut remarquer que :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{I} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} V_{n+2} &= \frac{1}{36}\left[2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{I}\right] V_n \\ &= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} V_n + \frac{1}{36} V_n \\ &= \frac{1}{3}\underbrace{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} V_n}_{V_{n+1}} + \frac{1}{36} V_n \end{aligned}$$

$$V_{n+2} = \frac{1}{3} V_{n+1} + \frac{1}{36} V_n$$

$\boxed{\mathbf{2}.d.}$

- Soit G_n l'événement « Pierre gagne au $n^{\text{ième}}$ lancer ».

Pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}[G_n] &= \mathrm{P}\left[G_n \middle| X_{n-1} = A\right] + \mathrm{P}\left[G_n \middle| X_{n-1} = B\right] \\ &= \frac{1}{3}(a_{n-1} + b_{n-1}) \end{aligned}$$

D'après les expressions de a_n et b_n obtenues aux questions 1.a et 1.b, il vient :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}[G_n] &= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1}\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1}\right] \end{aligned}$$

- Si on appelle G l'événement « Pierre gagne », alors $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}[G] &= \sum_{n\geq 1} \mathrm{P}[G_n] \quad \text{car les } G_n \text{ sont deux à deux disjoints} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1}$ correspond à la somme des termes d'une série géométrique de raison $\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6} \in \left]-1;1\right[$ et de premier terme 1.

Ainsi : $\displaystyle \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n}}{1-\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)} = \frac{6}{5-\sqrt{2}}$

Par un raisonnement analogue, on obtient :

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n}}{1-\left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)} = \frac{6}{5+\sqrt{2}}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[G] &= \frac{1}{3}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{6}{5-\sqrt{2}}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{6}{5+\sqrt{2}} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}} \\ & \boxed{\mathrm{P}[G]=\frac{14}{23}}\end{aligned}$$

Pour déterminer la probabilité que Pierre perde, on raisonne comme précédemment, en appelant P_n l'événement « Pierre perd au $n^{\text{ième}}$ lancer », et P l'événement « Pierre perd ».

•

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[P_n] &= \mathrm{P}\left[P_n \middle| X_{n-1}=A\right]+\mathrm{P}\left[P_n \middle| X_{n-1}=B\right] \\ &= \frac{1}{6}a_{n-1}+\frac{1}{3}b_{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[P] &= \sum_{n\geq 1}\mathrm{P}[P_n] \\ &= \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\frac{6}{5-\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\frac{6}{5+\sqrt{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}+\frac{\frac{1}{2}-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}} \\ \mathrm{P}[P] &= \frac{9}{23}\end{aligned}$$

La probabilité que le jeu continue indéfiniment est égale à $1-\mathrm{P}[G]-\mathrm{P}[P]=0$ **.**

2.*e*.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[X=n]&=\mathrm{P}[G_n]+\mathrm{P}[P_n]\\&=\frac{1}{3}(a_{n-1}+b_{n-1})+\left(\frac{1}{6}a_{n-1}+\frac{1}{3}b_{n-1}\right)\\&=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{2}{3}b_{n-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{P}[X=n]=\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1}}$$

- Calcul de l'espérance de X :

$$E(X)=\sum_{n\geq 1}n\mathrm{P}[X=n]$$

Par dérivation de la somme des termes d'une suite géométrique, on obtient aisément que :

$$\sum_{n\geq 1}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\text{ pour tout }x\in[0;1[$$

Ainsi :

$$\sum_{n\geq 1}n\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2}=\frac{36}{\left(5-\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\text{et }\sum_{n\geq 1}n\left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1}=\frac{36}{\left(5+\sqrt{2}\right)^2}$$

Donc :

$$E(X)=\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3\sqrt{2}}\right)\frac{36}{\left(5-\sqrt{2}\right)^2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3\sqrt{2}}\right)\frac{36}{\left(5+\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}E(X)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{9\sqrt{2}+24}{\left(5-\sqrt{2}\right)^2}+\frac{9\sqrt{2}-24}{\left(5+\sqrt{2}\right)^2}\right]\\&=\frac{966}{529}\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X)=\frac{42}{23}}$$

- Calcul de l'espérance de X^2 :

$$E\left(X^2\right)=\sum_{n\geq 1} n^2 \mathrm{P}\left[X=n\right]$$

Par dérivation de la somme des termes d'une suite géométrique, on obtient aisément que :

$$\sum_{n\geq 2} n\left(n-1\right)x^{n-2}=\frac{2}{\left(1-x\right)^3} \text{ pour tout } x\in\left[0;1\right[$$

En faisant le changement d'indice $k=n-1$, il vient :

$$\sum_{k\geq 1} k\left(k+1\right)x^{k-1}=\frac{2}{\left(1-x\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k\geq 1}\left(k^2x^{k-1}+kx^{k-1}\right)=\frac{2}{\left(1-x\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k\geq 1} k^2x^{k-1}+\underbrace{\sum_{k\geq 1} kx^{k-1}}_{\frac{1}{\left(1-x\right)^2}}=\frac{2}{\left(1-x\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k\geq 1} k^2x^{k-1}=\frac{2}{\left(1-x\right)^3}-\frac{1}{\left(1-x\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{k\geq 1} k^2x^{k-1}=\frac{1+x}{\left(1-x\right)^3}}$$

Ainsi :

$$\sum_{n\geq 1} n^2\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1}=\frac{1+\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}}{\left(1-\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^3}=36\frac{7+\sqrt{2}}{\left(5-\sqrt{2}\right)^3}$$

$$\sum_{n\geq 1} n^2\left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1}=36\frac{7-\sqrt{2}}{\left(5+\sqrt{2}\right)^3}$$

Donc :

$$E\left(X^2\right)=\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3\sqrt{2}}\right)36\frac{7+\sqrt{2}}{\left(5-\sqrt{2}\right)^3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3\sqrt{2}}\right)36\frac{7-\sqrt{2}}{\left(5+\sqrt{2}\right)^3}=\frac{2418}{529}$$

- Calcul de la variance de X :

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = \frac{2418}{529} - \left(\frac{42}{23}\right)^2$$

$$\boxed{V(X) = \frac{654}{529}}$$

Exercice 2

$\boxed{\textbf{1.}}$ Soit $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. L'équation caractéristique de **B** est :

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{B})\lambda + \det(\mathbf{B}) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0$$

Les valeurs propres de **B** sont donc : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 6$.

- Soit $V_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_1 :

$$\begin{aligned} &\mathbf{BV}_1 = \lambda_1 \mathbf{V}_1 \\ &\Leftrightarrow x = -y \end{aligned}$$

  Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_1 est donc défini par :

$$E_1 = \left\{ V = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Big/ x \in \mathbb{R} \right\}$$

- Soit $V_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_2 :

$$\begin{aligned} &\mathbf{BV}_2 = \lambda_2 \mathbf{V}_2 \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

  Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_2 est donc défini par :

$$E_2 = \left\{ V = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big/ x \in \mathbb{R} \right\}$$

On constate que $\dim E_1 = \dim E_2 = 1$. La dimension des sous-espaces propres étant égale à la multiplicité des valeurs propres, on en déduit que la matrice **B** est diagonalisable.

Posons $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. $\det\mathbf{P}=2$, la matrice **P** est donc inversible :

$$\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Vérifions la diagonalisation de **B** :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6\\ -2 & 6\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Posons pour la suite $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{2.}}$ On cherche à résoudre $\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=\mathbf{B}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

Faisons un changement de base dans la base des vecteurs propres en posant :

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

Dans la base des vecteurs propres, le système se réécrit comme suit :

$$\begin{pmatrix}u''\\ v''\end{pmatrix}=D\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}u''=2u\\ v''=6v\end{cases}$$

La solution de ce système est simple :

$$\begin{cases}u(t)=C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2e^{-\sqrt{2}t}\\ v(t)=D_1e^{\sqrt{6}t}+D_2e^{-\sqrt{6}t}\end{cases}$$

Ainsi, en revenant dans la base canonique de départ, on obtient :

$$\begin{aligned}&\begin{cases}x(t)=u(t)+v(t)\\ y(t)=-u(t)+v(t)\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}x(t)=C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2e^{-\sqrt{2}t}+D_1e^{\sqrt{6}t}+D_2e^{-\sqrt{6}t}\\ y(t)=D_1e^{\sqrt{6}t}+D_2e^{-\sqrt{6}t}-C_1e^{\sqrt{2}t}-C_2e^{-\sqrt{2}t}\end{cases}\end{aligned}$$

Les constantes C_1, C_2, D_1, D_2 sont déterminées à partir des conditions initiales.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Le système à résoudre est équivalent au suivant :

$$\begin{cases} x_1'' = 4x_1 + 2x_3 \\ x_3'' = 2x_1 + 4x_3 \\ x_2'' = 4x_2 + 2x_4 \\ x_4'' = 2x_2 + 4x_4 \end{cases}$$

c'est-à-dire aux deux systèmes suivants de la forme de celui de la question $\boxed{\textbf{2.}}$:

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} x_2'' \\ x_4'' \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

On en déduit immédiatement les solutions :

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t} + D_1 e^{\sqrt{6}t} + D_2 e^{-\sqrt{6}t} \\ x_3(t) = D_1 e^{\sqrt{6}t} + D_2 e^{-\sqrt{6}t} - C_1 e^{\sqrt{2}t} - C_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ x_2(t) = F_1 e^{\sqrt{2}t} + F_2 e^{-\sqrt{2}t} + G_1 e^{\sqrt{6}t} + G_2 e^{-\sqrt{6}t} \\ x_4(t) = G_1 e^{\sqrt{6}t} + G_2 e^{-\sqrt{6}t} - F_1 e^{\sqrt{2}t} - F_2 e^{-\sqrt{2}t} \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes d'intégration, on utilise les conditions initiales. Pour cela, il faut d'abord calculer les dérivées premières des quatre solutions ci-dessus :

$$\begin{cases} x_1'(t) = C_1\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} - C_2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t} + D_1\sqrt{6}e^{\sqrt{6}t} - D_2\sqrt{6}e^{-\sqrt{6}t} \\ x_3'(t) = D_1\sqrt{6}e^{\sqrt{6}t} - D_2\sqrt{6}e^{-\sqrt{6}t} - C_1\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} + C_2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t} \\ x_2'(t) = F_1\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} - F_2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t} + G_1\sqrt{6}e^{\sqrt{6}t} - G_2\sqrt{6}e^{-\sqrt{6}t} \\ x_4'(t) = G_1\sqrt{6}e^{\sqrt{6}t} - G_2\sqrt{6}e^{-\sqrt{6}t} - F_1\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} + F_2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t} \end{cases}$$

- Commençons par déterminer les constantes C_1, C_2, D_1, D_2 correspondant aux solutions $x_1(t)$ et $x_3(t)$. Les conditions initiales conduisent à :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + D_1 + D_2 = 4 & (1) \\ \sqrt{2}(C_1 - C_2) + \sqrt{6}(D_1 - D_2) = 0 & (2) \\ C_1 + C_2 - D_1 - D_2 = 0 & (3) \\ -\sqrt{2}(C_1 - C_2) + \sqrt{6}(D_1 - D_2) = 0 & (4) \end{cases}$$

  La résolution de ce système linéaire de quatre équations à quatre inconnues permet finalement d'obtenir :

$$C_1 = C_2 = 1 \text{ et } D_1 = D_2 = 1$$

Les solutions $x_1(t)$ et $x_3(t)$ s'écrivent donc :

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{6}t} + e^{-\sqrt{6}t} \\ x_3(t) = e^{\sqrt{6}t} + e^{-\sqrt{6}t} - e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t} \end{cases}$$

- Déterminons maintenant les constantes F_1, F_2, G_1, G_2 correspondant aux solutions $x_2(t)$ et $x_4(t)$. Les conditions initiales conduisent à :

$$\begin{cases} F_1 + F_2 + G_1 + G_2 = 0 & (1) \\ \sqrt{2}(F_1 - F_2) + \sqrt{6}(G_1 - G_2) = 2\sqrt{2} & (2) \\ F_1 + F_2 - G_1 - G_2 = 0 & (3) \\ -\sqrt{2}(F_1 - F_2) + \sqrt{6}(G_1 - G_2) = -2\sqrt{2} & (4) \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire de quatre équations à quatre inconnues permet finalement d'obtenir :

$$F_1 = 1,\ F_2 = -1, \text{ et } G_1 = G_2 = 0$$

Les solutions $x_2(t)$ et $x_4(t)$ s'écrivent donc :

$$\begin{cases} x_2(t) = e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t} \\ x_4(t) = e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t} \end{cases}$$

Exercice 3

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda\sqrt{x}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{1.}}$ f est une fonction continue, définie sur $\mathbb{R}$ et positive. Il reste à vérifier que $\int_0^{+\infty} \lambda\sqrt{x}e^{-x}dx = 1$, ce qui permettra de trouver la valeur de λ.

Le résultat suivant est admis (c'est un résultat classique) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi} \quad \left(= 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}dx \quad \text{par parité de la fonction } x \mapsto e^{-x^2/2} \right)$$

En posant $u = \sqrt{2x}$, il vient :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \lambda \sqrt{x} e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} u^2 e^{-u^2/2} du \end{aligned}$$

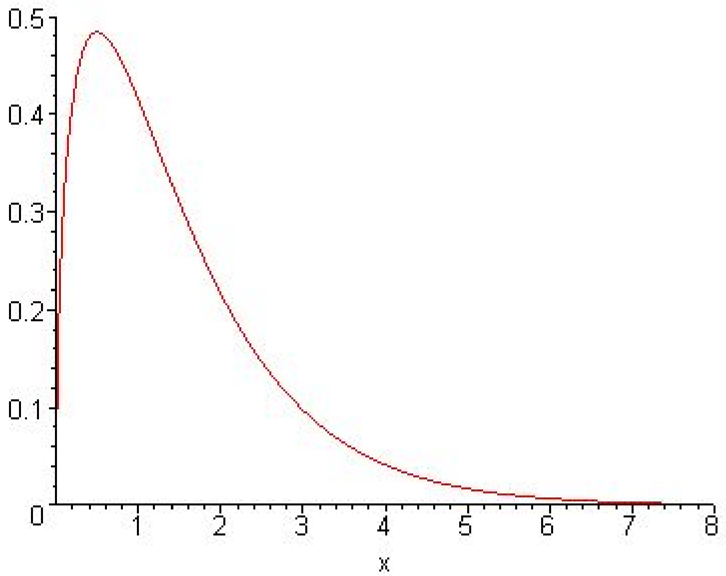
Par intégration par parties, en posant $p(u) = u$ et $q'(u) = ue^{-u^2/2}$, il vient :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} u^2 e^{-u^2/2} du \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \underbrace{\left[-ue^{-u^2/2} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du}_{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{\lambda}{2} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}}}$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ D'après la question précédente, on a $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

- $f(0) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- $f'(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} [1 - 2x]$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = +\infty$
- $f''(x) = \frac{e^{-x}}{2x^{3/2}\sqrt{\pi}} \left[4x^2 - 4x - 1 \right]$: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. La fonction f admet un point d'inflexion en $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$.



$\boxed{\mathbf{3.}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^{n+1/2} e^{-x} dx$.

$\boxed{\mathbf{3.}a.}$ Le problème éventuel se situe au voisinage de $+\infty$. Or nous avons, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^{n+\frac{1}{2}} e^{-x} x^2 \right) = 0$ et donc $x^{n+\frac{1}{2}} e^{-x} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2} \right)$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (critère de Riemann), on en déduit que I_n existe bien.

$\boxed{\mathbf{3.}b.}$ $I_{n+1} = \int_0^{+\infty} x^{n+3/2} e^{-x} dx$. Une intégration par partie, en posant $p(x) = x^{n+3/2}$ et $q'(x) = e^{-x}$, conduit à :

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} x^{n+3/2} e^{-x} dx$$

$$I_{n+1} = \underbrace{\left[-x^{n+3/2} e^{-x} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \left(n + \frac{3}{2} \right) \underbrace{\int_0^{+\infty} x^{n+1/2} e^{-x} dx}_{=I_n} \qquad \boxed{I_{n+1} = \left(n + \frac{3}{2} \right) I_n}$$

$\boxed{\mathbf{3.}c.}$

- $I_0 = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} e^{-x} dx}_{=1 \text{ d'après 1.}} \Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

- $I_1 = \frac{3}{2} I_0 \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}}$
- $I_2 = \frac{5}{2} I_1 \Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}}$

$\boxed{\mathbf{3.}d\mathbf{.}}$

- Calcul de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{+\infty} x \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} e^{-x} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} x^{1+1/2} e^{-x} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} I_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{3}{2}}$$

- Calcul de la variance :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

Par analogie avec le calcul précédent, on obtient $E\left(X^2\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} I_2 = \frac{15}{4}$. Donc :

$$V(X) = \frac{15}{4} - \left[\frac{3}{2}\right]^2$$

$$\boxed{V(X) = \frac{3}{2}}$$

- Calcul de l'écart type :

Compte tenu du calcul de la variance, il vient immédiatement :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{2}}}$$

4. Par définition $F(x) = \mathrm{P}[X \le x]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\ &= \int_{0}^{x} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} e^{-t} dt \end{aligned}$$

En procédant de manière analogue à la question 1, avec $u = \sqrt{2t}$, on peut écrire :

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-u e^{-u^2/2} \right]_0^{\sqrt{2x}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{2x}} e^{-u^2/2} du$$

$$F(x) = -2\sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{-x} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{2x}} e^{-u^2/2} du$$

On sait par ailleurs que la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

Ceci permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \Phi\left(\sqrt{2x}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2x}} e^{-u^2/2} du \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-u^2/2} du}_{=\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\sqrt{2x}} e^{-u^2/2} du \end{aligned}$$

Ainsi :

$$F(x) = -2\sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{-x} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \sqrt{2\pi} \left[\Phi\left(\sqrt{2x}\right) - \frac{1}{2} \right]$$

$$\boxed{F(x) = -2\sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{-x} - 1 + 2\Phi\left(\sqrt{2x}\right)}$$

D'après la question précédente, nous avons $\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}$, soit $2\sigma = \sqrt{6}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}[X > 2\sigma] &= \mathrm{P}\left[X > \sqrt{6}\right] \\ &= 1 - \mathrm{P}\left[X \le \sqrt{6}\right] \\ &= 1 - F\left(\sqrt{6}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{P}\left[X > 2\sigma\right] = 2 + 2\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{\pi}}e^{-\sqrt{6}} - 2\Phi\left(\sqrt{2\sqrt{6}}\right)}$$

On peut s'amuser à donner une approximation numérique de cette probabilité :

$$\Phi\left(\sqrt{2\sqrt{6}}\right) \simeq 0.9866$$

$$\mathrm{P}\left[X > 2\sigma\right] \simeq 0.1793$$

FIN