Concours B INA ENSA
Session 1995

Soient a et b deux entiers naturels, tels que $a \geq 2$ et $b \geq 1$.
On définit un jeu entre deux personnes, Pierre et Jean, de la manière suivante :
Les joueurs disposent de deux boîtes rigoureusement semblables et vides au départ, de a boules vertes, et de b boules rouges.
Pierre répartit, hors de la vue de Jean, **toutes** les boules dans les deux boîtes, de la manière qu'il veut, et ferme les boîtes. Jean doit alors choisir l'une des deux boîtes et, dans la boîte qu'il choisit, tirer au hasard l'une des boules qui s'y trouve (ou constater que la boîte est vide).
Pierre est dit gagnant si la boîte choisie par Jean est non vide et si Jean en tire une boule **verte**. Il est perdant dans tous les autres cas.
On admet que chacune des deux boîtes a la probabilité 1/2 d'être choisie par Jean et que, dans une boîte contenant k boules ($k \geq 1$), chaque boule a la probabilité 1/k d'être choisie.
L'objet du problème est la détermination par Pierre de sa meilleure stratégie, c'est-à-dire une manière de répartir les boules qui lui assure la plus grande probabilité de gain.
On appelle A et B les deux boîtes, x le nombre de boules **vertes** et y le nombre de boules **rouges** que Pierre décide de mettre dans la boîte A.

1. Calculer $\mathrm{P}(x,y)$, la probabilité de gain de Pierre, en fonction de x et y. On traitera à part les valeurs $\mathrm{P}(0,0)$ et $\mathrm{P}(a,b)$.

2. Soit D la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée par les (x,y) tels que $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$ (x et y réels), à l'exception des couples $(0,0)$ et (a,b).

La fonction P définie en **1**. est restriction à $\mathbb{Z}^2 \bigcap D$ d'une fonction définie sur D, que l'on notera encore P et que l'on exprime au moyen de la formule obtenue en **1.** On obtient ainsi un prolongement de P aux valeurs non entières de x et y.

On définit deux nouvelles variables (λ,t) par $\begin{cases} \lambda = x \\ t = b - y - x \end{cases}$.

2.a. Donner les formules inverses exprimant x et y en fonction de λ et t.

2.b. Vérifier que $\left\{(\lambda,t)\in \mathbb{Z}^2\right\} \Leftrightarrow \left\{(x,y)\in \mathbb{Z}^2\right\}$.

2.c. Exprimer $\mathrm{P}(x,y)$ en fonction de λ et t. On pose $\mathrm{P}(x,y) = f(\lambda,t)$.

3. Déterminer Δ, ensemble des couples (λ,t) tels que $(x,y)\in D$.

Représenter graphiquement Δ, λ étant en abscisse et t en ordonnée. On fournira deux figures, correspondant respectivement aux cas $a < b$ et $a \geq b$.

4. Montrer que, pour tout $(\lambda,t)\in \Delta$, $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,t)$ est du même signe que $t - \dfrac{b-a}{2}$.

Représenter sur les figures fournies en **3.** l'intersection de Δ avec la droite $\dfrac{b-a}{2} = t$.

5. En déduire que, pour déterminer $\sup_{(\lambda,t)\in\Delta} f(\lambda,t)$, il suffit d'étudier la restriction de *f* à trois ou cinq segments suivant que $a \geq b$ ou $a < b$, ces segments étant des parties de la frontière de Δ ou des parties de la droite $\frac{b-a}{2} = t$.

6. Le domaine Δ présente un centre de symétrie. Montrer qu'en deux points symétriques par rapport à ce centre, *f* prend toujours la même valeur.

7. A l'aide des résultats de **5.** et **6.**, déterminer effectivement $\sup_{(\lambda,t)\in\Delta} f(\lambda,t)$ ainsi que les régions de Δ dans lesquelles cette borne supérieure est approchée (traiter les deux cas $a < b$ et $a \geq b$).

8. En déduire la solution du problème posé, c'est-à-dire la détermination par Pierre de sa meilleure stratégie et la probabilité de gain associée.
On justifiera précisément le passage en retour des variables (x, y) réelles aux variables (x, y) entières, à l'aide de **2.b.**

9. Le jeu est modifié par deux points :

- il y a désormais **trois** boîtes semblables A, B, C.
- $a \geq 3$.

Le reste est inchangé. En discutant d'abord à contenu de A fixé (α boules vertes, β boules rouges), déterminer pour Pierre sa meilleure stratégie et la probabilité de gain associée.