CORRIGE DU CONCOURS BANQUE AGRO B ET BE 1995

L'objet de ce problème est la détermination de la meilleure stratégie possible pour gagner au jeu proposé dans l'énoncé. Pour cela, plusieurs outils d'analyse sont introduits. On sera notamment amené à étudier le maximum d'une fonction réelle de deux variables réelles définie sur un domaine du plan.

1.

On note :

- A (resp. $\overline{A}$) l'événement « Jean choisit l'urne **A** (resp. **B**)»
- V (resp. $\overline{V}$) l'événement « Jean tire une boule verte (resp. rouge) »

D'après le ***théorème des probabilités totales***, la probabilité que Jean a de tirer une boule verte (*i.e.*, de perdre) est donnée par :

$$P(V)=P(V/A)P(A)+P(V/B)P(B)$$

- Soit $\mathrm{P}(0,0)$ la probabilité de gagner lorsque **A** est vide :

$$\mathrm{P}(0,0)=\begin{pmatrix}\text{probabilité que Jean}\\ \text{choisisse } \mathbf{B}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\text{probabilité de tirer une boule}\\ \text{verte parmi } a+b \text{ boules}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathrm{P}(0,0)=\frac{1}{2}\frac{a}{a+b}}$$

- Soit $\mathrm{P}(a,b)$ la probabilité de gagner lorsque **B** est vide :

$$\boxed{\mathrm{P}(a,b)=\frac{1}{2}\frac{a}{a+b}}=\mathrm{P}(0,0)$$

- Si Jean choisit la boîte **A**, alors Pierre gagne si Jean choisit une des x boules vertes parmi les $x+y$ boules. Et si Jean choisit la boîte **B**, alors Pierre gagne si Jean choisit une des $a-x$ boules vertes parmi les $(a-x)+(b-y)$ boules. Donc :

$$\boxed{\mathrm{P}(x,y)=\frac{1}{2}\frac{x}{x+y}+\frac{1}{2}\frac{a-x}{(a-x)+(b-y)}}$$

2. On définit deux nouvelles variables : $\lambda = x$ et $t = b - x - y$.

2.*a*. $\begin{cases} x = \lambda \\ y = b - \lambda - t \end{cases}$

2.*b*. Immédiat, d'après les formules ci-dessus.

2.*c*.

- Si $(\lambda, t) = (0, b)$, *i.e.*, $(x, y) = (0, 0)$, ou bien $(\lambda, t) = (a, -a)$, *i.e.*, $(x, y) = (a, b)$, alors

  $f(\lambda, t) = \dfrac{a}{2(a+b)}$.

- Sinon $f(\lambda, t) = \dfrac{\lambda}{2(b-t)} + \dfrac{a-\lambda}{2(a+t)}$.

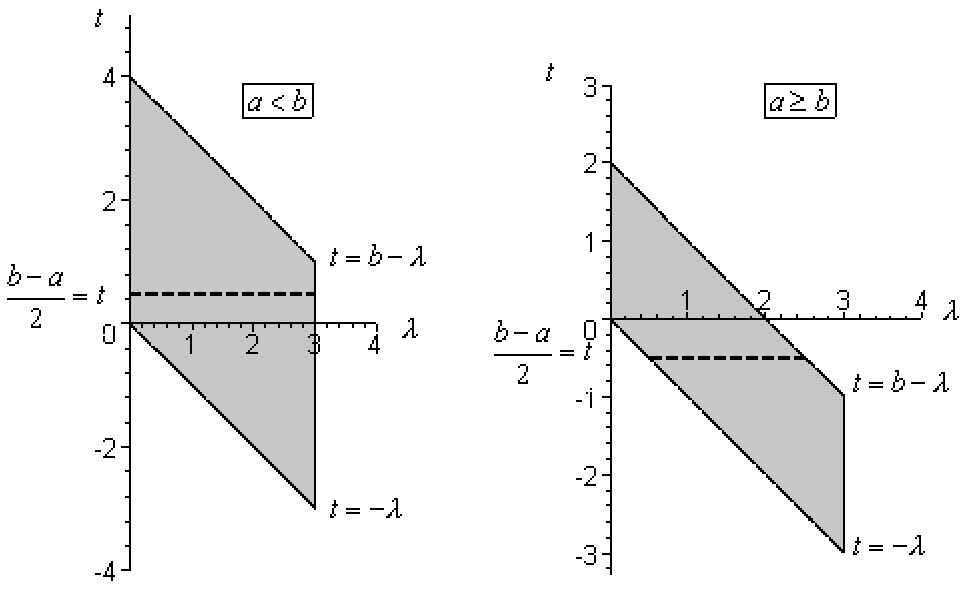
3.

D'une part, $0 \le x \le a \Leftrightarrow 0 \le \lambda \le a$ et d'autre part, $t = b - y - \lambda$, donc :

$$\begin{aligned} & 0 \le y \le b \\ \Leftrightarrow\ & -b \le -y \le 0 \\ \Leftrightarrow\ & 0 \le b - y \le b \\ \Leftrightarrow\ & -\lambda \le t \le b - \lambda \end{aligned}$$

Soit finalement en rajoutant que $(0,0) \notin D$ et $(a,b) \notin D$, il vient :

$$\Delta = \left\{ (\lambda, t) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le \lambda \le a \text{ et } -\lambda \le t \le b - \lambda \right\} \setminus \left\{ (0, b), (a, -a) \right\}$$



4. $\forall(\lambda,t)\in\Delta$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\lambda,t)}{\partial\lambda}&=\frac{1}{2(b-t)}-\frac{1}{2(a+t)}\\&=\frac{1}{2}\frac{a-b+2t}{(b-t)(a+t)}\\&=\frac{t-\dfrac{b-a}{2}}{(b-t)(a+t)}\end{aligned}$$

On sait également que : $\forall(\lambda,t)\in\Delta : 0\le\lambda\le a$ et $-\lambda\le t\le b-\lambda$, donc $-a\le t\le b$ et ainsi $t+a\ge 0$ et $b-t\ge 0$.

Par hypothèse, $(x,y)\neq(0,0)$, donc $t\neq b$. De même, $(x,y)\neq(a,b)$, donc $t\neq -a$.

Le signe de $\dfrac{\partial f(\lambda,t)}{\partial\lambda}$ est donc bien celui de $t-\dfrac{b-a}{2}$.

5.

Soit $t\in\mathbb{R}$ fixé, on note :

$$\lambda_{t,\max}=\max\left\{\lambda/\forall\in\left]-a,b\right[\ ,\ (\lambda,t)\in\Delta\right\}$$
$$\lambda_{t,\min}=\min\left\{\lambda/\forall\in\left]-a,b\right[\ ,\ (\lambda,t)\in\Delta\right\}$$

D'après la question précédente, trois cas peuvent être distingués :

- si $t>\dfrac{b-a}{2}$, alors $\dfrac{\partial f(\lambda,t)}{\partial\lambda}>0$, donc $\sup\limits_{\lambda/(\lambda,t)\in\Delta} f(\lambda,t)=f(\lambda_{t,\max},t)$

- si $t<\dfrac{b-a}{2}$, alors $\dfrac{\partial f(\lambda,t)}{\partial\lambda}<0$, donc $\sup\limits_{\lambda/(\lambda,t)\in\Delta} f(\lambda,t)=f(\lambda_{t,\min},t)$
- sinon $t=\dfrac{b-a}{2}$ et $\dfrac{\partial f(\lambda,t)}{\partial\lambda}=0$, et donc $\sup\limits_{\lambda/(\lambda,t)\in\Delta} f(\lambda,t)=f(\lambda,t)\quad\forall\lambda\in[0,a]$ tel que $\left(\lambda,\dfrac{b-a}{2}\right)\in\Delta$.

Par conséquent, on définit les cinq segments suivants :

S_1, le segment : $\Delta \bigcap \left\{ (\lambda, b-\lambda) \right\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$
S_2, le segment : $\Delta \bigcap \left\{ (a, t) \right\}_{t \in \mathbb{R}}$
S_3, le segment : $\Delta \bigcap \left\{ (\lambda, -\lambda) \right\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$
S_4, le segment : $\Delta \bigcap \left\{ (0, t) \right\}_{t \in \mathbb{R}}$
S_5, le segment : $\Delta \bigcap \left\{ \left(\lambda, \frac{b-a}{2} \right) \right\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$

Remarque : On considère ici qu'un segment n'est pas nécessairement fermé.

$\boxed{1^{\text{er}} \text{ cas} : a < b}$

- Si $t > \frac{b-a}{2}$, alors $(\lambda_{t,\max}, t)$ appartient soit au segment S_1, soit à la partie de S_2, notée S_2', constituée des points d'ordonnées strictement supérieures à $\frac{b-a}{2}$. Donc :

$$\left(\lambda_{t,\max}, t\right) \in S_1 \bigcup S_2'$$

- Si $t < \frac{b-a}{2}$, alors $(\lambda_{t,\min}, t)$ appartient soit au segment S_3, soit à la partie de S_4, notée S_4', constituée des points d'ordonnées strictement inférieures à $\frac{b-a}{2}$. Donc :

$$\left(\lambda_{t,\min}, t\right) \in S_3 \bigcup S_4'$$

- Si $t = \frac{b-a}{2}$, alors $(\lambda, t) \in S_5$.

Finalement, $\sup\limits_{(\lambda,t)\in\Delta} f(\lambda, t) = \sup\left\{ f(\lambda,t) / (\lambda,t) \in S_1 \bigcup S_2' \bigcup S_3 \bigcup S_4' \bigcup S_5 \right\}$.

$\boxed{2^{\text{ème}} \text{ cas} : a \geq b}$

- Si $t > \frac{b-a}{2}$, alors $(\lambda_{t,\max}, t)$ appartient à la partie de S_1, notée S_1', constituée des points d'ordonnées strictement supérieures à $\frac{b-a}{2}$. Donc :

$$\left(\lambda_{t,\max}, t\right) \in S_1'$$

- Si $t < \dfrac{b-a}{2}$, alors $\left(\lambda_{t,\min}, t\right)$ appartient à la partie de S_3, notée S_3', constituée des points d'ordonnées strictement inférieures à $\dfrac{b-a}{2}$. Donc :

$$\left(\lambda_{t,\min}, t\right) \in S_3'$$

- Enfin, si $t = \dfrac{b-a}{2}$, alors $(\lambda, t) \in S_5$.

Finalement, $\sup\limits_{(\lambda,t)\in\Delta} f(\lambda,t) = \sup\left\{ f(\lambda,t) / (\lambda,t) \in S_1' \cup S_3' \cup S_5 \right\}$.

$\boxed{\textbf{6.}}$

Le centre de symétrie de Δ (parallélogramme) est le milieu du segment d'extrémités $(0,0)$ et $(a, b-a)$; il s'agit du point Ω de coordonnées $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b-a}{2}\right)$.

Vérification :

Soit un point *M* de coordonnées (λ, t) et M' son symétrique par rapport Ω ; soient (λ', t') les coordonnées de M'.

Ainsi :

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda+\lambda'}{2} = \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{t+t'}{2} = \dfrac{b-a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda' = a - \lambda \\ t' = b - a - t \end{cases}$$

On calcule alors :

$$f(\lambda', t') = f(a-\lambda, b-a-t) = \frac{a-\lambda}{2(a+t)} + \frac{\lambda}{2(b-t)} = f(\lambda, t)$$

En deux points symétriques du domaine Δ, la fonction *f* prend donc toujours la même valeur.

$\boxed{\textbf{7.}}$

$\boxed{1^{\text{er}} \text{ cas} : a < b}$

D'après les deux questions précédentes, il suffit d'étudier la restriction de *f* aux trois segments S_1, S_2' et S_5.

- Restriction de *f* à S_1 :

$$f(\lambda, b-\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a-\lambda}{a+b-\lambda}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, b-\lambda) = \frac{-b}{(a+b-\lambda)^2} < 0$$

Donc

$$\sup_{(\lambda,t)\in S_1} f(\lambda, t) = \lim_{\lambda \to 0} f(\lambda, b-\lambda) = \frac{2a+b}{2(a+b)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{a+b}\right)$$

- Restriction de *f* à S_2' :

$$f(a, t) = \frac{a}{2(a-t)}$$

Et le maximum est atteint pour $t = b-a$, donc

$$\sup_{(\lambda,t)\in S_2'} f(\lambda, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2a+b}\right)$$

- Restriction de *f* à S_5 :

$$\sup_{(\lambda,t)\in S_5} f(\lambda, t) = f\left(\lambda, \frac{b-a}{2}\right) = \frac{a}{a+b}$$

- Or nous avons $\frac{a}{a+b} < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{a+b}\right)$, car $\frac{2a}{a+b} < \frac{2a+b}{a+b}$ $(b > 0)$.

  D'autre part, $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2a+b}\right) < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{a+b}\right)$ car $\frac{a}{2a+b} < 1 < 1 + \frac{a}{a+b}$.

Finalement, $\boxed{\sup_{(\lambda,t)\in\Delta} f(\lambda, t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{a+b}\right)}$; cette borne supérieure est approchée lorsque (λ, t) est proche de $(0, b)$, mais sans jamais l'atteindre car $(0, b) \notin \Delta$.

$\boxed{2^{\text{ème}} \text{ cas} : a \geq b}$

D'après les deux questions précédentes, il suffit d'étudier la restriction de f aux deux segments S_1' et S_5.

- Restriction de *f* à S_1' :

Comme précédemment, $\sup\limits_{(\lambda,t)\in S_1'} f(\lambda,t) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{a+b}\right)$

- Restriction de *f* à S_5 :

  On a de même $\sup\limits_{(\lambda,t)\in S_5} f(\lambda,t) = \frac{a}{a+b}$

- Ainsi, comme dans le premier cas, on a :

$$\boxed{\sup_{(\lambda,t)\in\Delta} f(\lambda,t) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{a+b}\right)}$$

Cette borne supérieure est approchée lorsque (λ,t) est proche de $(0,b)$, mais sans jamais l'atteindre car $(0,b)\notin\Delta$.

8.

- Nous avons $\sup\limits_{(x,y)\in D} P(x,y) = \sup\limits_{(\lambda,t)\in\Delta} f(\lambda,t) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{a+b}\right)$.
- D'après la question précédente, cette borne supérieure est approchée lorsque (λ,t) est proche de $(0,b)$ sans jamais l'atteindre, c'est-à-dire lorsque (x,y) est proche de $(0,0)$ sans jamais l'atteindre, d'après les formules de la question **2.a.**

  Comme *x* et *y* sont entiers, on en déduit que la meilleure stratégie de Pierre est de prendre $(x,y)=(1,0)$

  En d'autres termes, la meilleure stratégie déterminée par Pierre consiste à se rapprocher le plus possible de la stratégie : « mettre tous ses oeufs dans le même panier », en l'occurrence dans l'urne **B**, mais en prenant soin de ne jamais l'atteindre.

  Par symétrie, la stratégie inverse (*i.e.*, en permutant les urnes **A** et **B**) s'avère tout aussi fructueuse. La probabilité de gain associée à cette stratégie est donc :

$$P(1,0) = P(a-1,b) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a-1}{a+b-1}\right)$$

9.

Soit α le nombre de boules vertes dans la boîte **A**, et β le nombre de boules rouges dans **A**.

D'après les questions précédentes (cas de deux boîtes), la stratégie optimale pour les boîtes **B** et **C**, est la suivante :

- 1 boule verte et 0 boule rouge dans **B** ;
- $a-\alpha-1$ boules vertes et $b-\beta$ boules rouges dans **C**.

<u>*Remarque*</u> : on peut évidemment inverser les rôles de **B** et **C**.

On introduit A (resp. $\overline{A}$) l'événement « Jean choisit l'urne **A** (resp. les urnes **B** ou **C**) » et on note V l'événement « Jean tire une boule verte ». D'après le ***théorème des probabilités totales*** il vient :

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V \cap A) + P\left(V \cap \overline{A}\right) \\ &= P(V/A)P(A) + P_{opt}\left(V/\overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right) \end{aligned}$$

avec $P_{opt}\left(V/\overline{A}\right)$ la probabilité associée à la stratégie optimale pour les urnes **B** et **C**.

La question **8.**, permet d'affirmer que $P_{opt}\left(V/\overline{A}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(a-\alpha)-1}{(a-\alpha)+(b-\beta)-1}\right)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(V) &= \frac{1}{3}\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}\left(1 + \frac{(a-\alpha)-1}{(a-\alpha)+(b-\beta)-1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{a-\alpha-1}{a+b-(\alpha+\beta)-1}\right) \end{aligned}$$

Soit finalement, avec $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ (stratégie optimale avec deux boîtes, en considérant que **B** et **C** n'en font qu'une) :

$$\boxed{P(V) = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{a-2}{a+b-2}\right)}$$

FIN