Concours B INA ENSA
Session 1996

Rappels :
Pour tout s élément de $[0,1[$, on a :

$$(1)\quad \sum_{n\geq 0} s^n = \frac{1}{1-s} \qquad (2)\quad \sum_{n\geq 1} ns^{n-1} = \frac{1}{(1-s)^2} \qquad (3)\quad \sum_{n\geq 2} n(n-1)s^{n-2} = \frac{2}{(1-s)^3}$$

I. Étude d'une fonction associée à une distribution de probabilité.

Dans toute cette partie, on considère la série de terme général p_n positif, convergente et de somme égale à 1.

1. Pour s élément de $[0,1]$, on pose, pour tout n entier naturel :

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{n} p_k s^k$$

1.a. Montrer que, pour s fixé, la suite de terme général $G_n(s)$ est croissante et majorée par 1. En déduire qu'elle converge vers une limite notée $G(s)$. On écrira donc :

$$G(s) = \sum_{n\geq 0} p_n s^n$$

1.b. Montrer qu'on a ainsi défini une application G de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ croissante, majorée par 1 et qui vérifie : $G(0) = p_0$ et $G(1) = 1$.

1.c. En déduire que G admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]0,1[$.

2. Dans cette question et les suivantes, R désigne un élément de $[0,1[$:
En s'inspirant de la question **1.**, montrer que l'on peut définir sur $[0,R]$ une fonction H croissante et bornée, par : $H(s) = \sum_{n\geq 1} np_n s^{n-1}$.

3. n est un entier naturel, on notera s et s_0 deux éléments distincts de $[0,R]$.

3.a. En utilisant les rappels, montrer que, pour tout x élément de $[0,R]$, on a :

$$|G_n'(x)| \leq \frac{1}{(1-R)^2}$$

3.b. Justifier la majoration suivante :

$$|G_n(s) - G_n(s_0)| \leq \frac{|s-s_0|}{(1-R)^2}$$

3.c. En déduire que : $|G(s) - G(s_0)| \leq \dfrac{|s-s_0|}{(1-R)^2}$; puis que G est continue sur $[0,1[$.

4.a. Montrer qu'il existe un élément c compris entre s et s_0, tel que :

$$\left|\frac{G_n(s)-G_n(s_0)}{s-s_0}-G_n'(s_0)\right|=\frac{|s-s_0|}{2}\times\left|G_n''(c)\right|$$

4.b. En déduire, en utilisant la même démarche qu'à la question **3.**, que l'on a :

$$\left|\frac{G(s)-G(s_0)}{s-s_0}-H(s_0)\right|\leq\frac{|s-s_0|}{(1-R)^3}$$

4.c. Conclure que G est dérivable sur $[0,1[$ et que l'on a :

$$G'(s)=\sum_{n\geq 1} np_n s^{n-1}$$

On admettra dans la suite de ce problème que G est indéfiniment dérivable sur $[0,1[$ et que, pour tout k entier naturel non nul et tout s de $[0,1[$, on a :

$$(4) \qquad G^{(k)}(s)=\sum_{n\geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1)\,p_n s^{n-k}$$

II. Interprétation probabiliste de la fonction G.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on notera G_X l'application définie pour tout s de $[0;1]$ par la relation : $G_X(s)=\sum_{n\geq 0}\mathrm{P}[X=n]s^n$.

D'après la partie **I**, on sait donc que G_X est indéfiniment dérivable sur $[0;1[$ et que ses nombres dérivés successifs sont donnés par la formule (4).

1. Exprimer, pour tout n entier naturel, $\mathrm{P}[X=n]$ en fonction de $G_X^{(n)}(0)$. Ainsi la loi de X est entièrement déterminée par G_X qu'on appelle *fonction génératrice* de X.

2. Pour tout s élément de $[0,1]$ on notera s^X la variable aléatoire qui prend comme valeur s^n avec la probabilité $\mathrm{P}[X=n]$.

2.a. Établir que s^X admet une espérance donnée par la formule :

$$E\left[s^X\right]=G_X(s)$$

2.b. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a, pour tout s de $[0;1]$: $G_{X+Y}(s)=G_X(s)\times G_Y(s)$

3. **Application 1.**
X et Y sont deux variables indépendantes, qui suivent respectivement des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Déterminer la fonction génératrice de $X+Y$ et en déduire sa loi.

4. **Application 2.**
On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, dont les issues sont représentées par $\{0,1\}$, 1 étant obtenu avec la probabilité p. On note B la variable aléatoire qui vaut 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $(1-p)$.

4.a. Déterminer G_B, fonction génératrice de B.

4.b. On note, pour tout n entier naturel non nul, X_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu 1 au cours des n premières épreuves. Justifier la relation :

$$\forall s \in [0,1],\ G_{X_n}(s) = \left(G_B(s)\right)^n$$

.

4.c. Calculer la loi de X_n à partir de sa fonction génératrice et retrouver ainsi une distribution binomiale.

5. Application 3.

On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, dont les issues sont représentées par $\{0,1\}$, 1 étant obtenu avec la probabilité p $(0 < p < 1)$. On notera :

$$q = 1 - p$$

On s'intéresse à la variable aléatoire T qui prend la valeur n si on obtient, pour la première fois, 1 à l'épreuve $n-1$ suivi de 0 à l'épreuve n.

5.a. Montrer que T prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$; on notera, pour k entier :

$$p_k = \mathrm{P}[T = k]$$

Déterminer p_k, pour k prenant les valeurs 0, 1 et 2.

5.b. Montrer que T peut s'écrire comme la somme de deux variables géométriques indépendantes de paramètres respectifs p et q. En déduire sa fonction génératrice G_T.

5.c. Montrer que, pour tout s de $[0;1]$, on a la relation :

$$\left(1 - s + pqs^2\right) G_T(s) = pqs^2$$

En utilisant la formule de dérivation n-ième d'un produit, justifier alors, pour $n > 2$:

$$p_n = p_{n-1} - pqp_{n-2}$$

5.d. En déduire, par récurrence sur n, l'existence de deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = ap^n + bq^n$$

En utilisant **II.5.a**., expliciter p_n en fonction de n, p et q.

5.e. Montrer que T admet une espérance et une variance et les exprimer en fonction de p et de q.