CORRIGE DU CONCOURS BANQUE AGRO B ET BE 1996

Ce problème est composé de deux parties, la première concerne les séries entières avec la démonstration de propriétés générales ; la seconde partie est une application de la première par l'introduction de la fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète. Le problème se termine par trois exemples d'utilisation des fonctions génératrices.

Rappels : pour $s \in [0;1[$

$$(1)\quad \sum_{n\geq 0} s^n = \frac{1}{1-s} \qquad (2)\quad \sum_{n\geq 1} n s^{n-1} = \frac{1}{(1-s)^2} \qquad (3)\quad \sum_{n\geq 2} n(n-1)s^{n-2} = \frac{2}{(1-s)^3}$$

I. Etude d'une fonction associée à une distribution de probabilité.

On considère dans cette partie la série de terme général p_n positif, telle que $\sum_{n\geq 0} p_n = 1$.

I.1. Soit $s \in [0;1]$. On pose $G_n(s) = \sum_{k=0}^{n} p_k s^k$.

I.1.*a.* Soit *s* fixé.

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{n+1} p_k s^k \\ &= G_n(s) + \underbrace{p_{n+1}s^{n+1}}_{\geq 0 \text{ car } p_{n+1}\geq 0 \text{ et } s\in[0;1]} \\ &\geq G_n(s) \end{aligned}$$

La suite de terme général $G_n(s)$ est donc croissante.

$s \in [0;1]$ donc $s \leq 1$, *i.e.*, $s^k \leq 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} G_n(s) &\leq \sum_{k=0}^{n+1} p_k \\ &\leq \sum_{n\geq 0} p_n \end{aligned}$$

Or $\sum_{n\geq 0} p_n = 1$, donc $G_n(s) \leq 1$. La suite de terme général $G_n(s)$ est par conséquent majorée par 1.

La suite de terme général $G_n(s)$ est croissante et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente vers : $G(s) = \sum_{n\geq 0} p_n s^n$.

$\boxed{\textbf{I.1.}b.}$ Définissons $G : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $s \mapsto \sum_{n\geq 0} p_n s^n$.

- Soit $s \in [0;1]$. D'après $\boxed{\textbf{I.1.}a.}$, $G_n(s) \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, il vient $G(s) \leq 1$. La fonction *G* est donc majorée par 1.
- $G(0) = p_0$ car $0^0 = 1$ et pour tout $n > 0$, $0^n = 0$.

  $G(1) = \sum_{n\geq 0} p_n = 1$ par hypothèse.
- Soient $s, t \in [0;1]$ tels que $s \leq t$.

$$
\begin{array}{ll}
\quad s \leq t & \\
\Leftrightarrow s^k \leq t^k & \forall k \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow p_k s^k \leq p_k t^k & \forall k \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow G_n(s) \leq G_n(t) & \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow G(s) \leq G(t) & \text{par passage à la limite}
\end{array}
$$

  La fonction *G* est donc croissante.

$\boxed{\textbf{I.1.}c.}$ On se donne (s_n) une suite croissante et convergente vers $\tilde{s} \in]0;1[$.

Alors $G(s_n)$ est le terme général d'une suite croissante (*G* est croissante) et majorée par $G(\tilde{s})$; en effet *G* est croissante et $s_n \leq \tilde{s} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, donc $G(s_n) \leq G(\tilde{s}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, la suite de terme général $G(s_n)$ est convergente vers $G(\tilde{s})$.

Par conséquent, $\lim_{s \xrightarrow[<]{} \tilde{s}} G(s)$ existe.

Pour démontrer que $\lim_{s \xrightarrow[>]{} \tilde{s}} G(s)$ existe, il suffit de faire le même raisonnement que précédemment en considérant une suite (s_n) décroissante et convergente vers $\tilde{s} \in]0;1[$.

$\boxed{\textbf{I.2.}}$ Soit $R \in [0;1[$.

Soit la fonction H_n définie par $H_n(s) = \sum_{k=1}^{n} kp_k s^{k-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et pour $s \in [0;R]$.

Soit $s \in [0;R]$ fixé.

- La suite $(H_n(s))$ est clairement croissante.

- De plus, $H_n(s) \leq \sum_{k=1}^{n} kp_k R^{k-1}$

  Or on sait que $p_k \leq 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, car la somme de la série vaut 1 et on sait aussi que tous les p_k sont positifs. Donc :

$$\begin{aligned} H_n(s) &\leq \sum_{k=1}^{n} kR^{k-1} \\ &\leq \sum_{n\leq 1} nR^{n-1} \end{aligned}$$

  Or $\sum_{n\leq 1} nR^{n-1} = \frac{1}{(1-R)^2}$, donc $H_n(s) \leq \frac{1}{(1-R)^2}$. $H_n(s)$ est par conséquent majoré par $\frac{1}{(1-R)^2}$.

- Par conséquent, la suite $(H_n(s))$ est croissante et majorée, elle est donc convergente vers $H(s) = \sum_{n\geq 1} np_n s^{n-1}$.

- Soit *H* la fonction définie par :

$$\begin{aligned} H : [0;R] &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto H(s) = \sum_{n\geq 1} np_n s^{n-1} \end{aligned}$$

  Tous les $H_n(s)$ sont majorés par $\frac{1}{(1-R)^2}$; par passage à la limite, on en déduit que $H(s)$ est majorée par $\frac{1}{(1-R)^2}$.

  Pour démontrer que la fonction *H* est croissante, on raisonne comme à la question **I.1.b.** :

$$\begin{aligned} & s \leq t \\ \Leftrightarrow\ & s^{k-1} \leq t^{k-1} && \forall k \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow\ & p_k s^{k-1} \leq p_k t^{k-1} && \forall k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow\ & H_n(s) \leq H_n(t) && \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow\ & H(s) \leq H(t) && \text{par passage à la limite} \end{aligned}$$

I.3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $s, s_0 \in [0;R]$ avec $s \neq s_0$.

I.3.*a*. Soit $x \in [0;R]$. D'après la question **I.1.** : $G_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kp_k x^{k-1}$

Donc,

$$\begin{aligned}
\left|G_n'(x)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} kp_k x^{k-1}\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} kp_k x^{k-1} && \text{par positivité des } p_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} && \text{car } p_k \leq 1 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} kR^{k-1} && \text{car } x \leq R \\
&\leq \sum_{k\geq 1} kR^{k-1} = \frac{1}{(1-R)^2} && \text{d'après les rappels}
\end{aligned}$$

I.3.*b*. $\forall x \in [s;s_0]$ ou $[s_0;s]$, on a $x \in [0;R]$, donc $\left|G_n'(x)\right| \leq \frac{1}{(1-R)^2}$.

L'application du théorème des accroissements finis à la fonction G_n entre s et s_0 nous donne :

$$\left|G_n(s) - G_n(s_0)\right| \leq \frac{|s-s_0|}{(1-R)^2}$$

I.3.*c*. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'expression ci-dessus on obtient :

$$\left|G(s) - G(s_0)\right| \leq \frac{|s-s_0|}{(1-R)^2}$$

Donc $\lim_{s\to s_0} G(s) = G(s_0)$, ce qui montre que la fonction G est continue sur $[0;R]$, puisque ceci est valable $\forall s_0 \in [0;R]$.

Le raisonnement ci-dessus étant valable pour tout $R \in [0;1[$, on en déduit que la fonction G est continue sur $[0;1[$.

I.4.*a*. Compte tenu de ce qui précède, la fonction G_n est C^∞ sur tout intervalle $[s;s_0]$ ou $[s_0;s]$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre s et s_0, $\exists c \in]s;s_0[$ ou $]s_0;s[$ tel que :

$$G_n(s) = G_n(s_0) + (s - s_0) G_n'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2} G_n''(c)$$

Donc,

$$\frac{G_n(s)-G_n(s_0)}{s-s_0}-G_n'(s_0)=\frac{s-s_0}{2}G_n''(c)$$

D'où

$$\left|\frac{G_n(s)-G_n(s_0)}{s-s_0}-G_n'(s_0)\right|=\frac{|s-s_0|}{2}|G_n''(c)|$$

I.4.*b.* Majorons $|G_n''(x)|$ pour $x\in[0;R]$. On a :

$$\begin{aligned}|G_n''(x)| &= \left|\sum_{k=2}^{n}k(k-1)p_k x^{k-2}\right|\\ &\le \sum_{k=2}^{n}k(k-1)x^{k-2}\\ &\le \sum_{k=2}^{n}k(k-1)R^{k-2}\\ &\le \sum_{k\ge2}k(k-1)R^{k-2}=\frac{2}{(1-R)^3}\end{aligned}$$

Donc,

$$\left|\frac{G_n(s)-G_n(s_0)}{s-s_0}-G_n'(s_0)\right|\le\frac{|s-s_0|}{(1-R)^3}$$

Or, on peut remarquer que $G_n'(s_0)=H_n(s_0)$, donc :

$$\left|\frac{G_n(s)-G_n(s_0)}{s-s_0}-H_n(s_0)\right|\le\frac{|s-s_0|}{(1-R)^3}$$

En faisant tendre *n* vers $+\infty$, il vient :

$$\left|\frac{G(s)-G(s_0)}{s-s_0}-H(s_0)\right|\le\frac{|s-s_0|}{(1-R)^3}$$

I.4.*c.* D'après la question précédente, il vient :

$$\lim_{s\to s_0}\frac{G(s)-G(s_0)}{s-s_0}=H(s_0)$$

Ce qui signifie que $G'(s_0)=H(s_0)$. Ainsi, G est dérivable sur $[0;R]$.

Le raisonnement ci-dessus étant valable pour tout $R\in[0;1[$, on en déduit que la fonction G est dérivable sur $[0;1[$.

La dérivée de G est la fonction H :

$$\boxed{G'(s) = H(s) = \sum_{n \geq 1} n p_n s^{n-1}}$$

II. Interprétation probabiliste de la fonction G.

II.1. Soit $s \in [0;1]$. Par définition :

$$G_X(s) = \sum_{n \geq 0} \mathrm{P}[X = n] s^n$$

Par analogie avec la partie I, on a $\mathrm{P}[X = n] = p_n$.

Par hypothèse :

$$G_X^{(k)}(s) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1)\mathrm{P}[X = n] s^{n-k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$

En $s = 0$, tous les termes de la relation précédente sont nuls sauf celui correspondant à $k = n$, d'où : $G_X^{(n)}(0) = n \times (n-1) \times \ldots \times 1 \times \mathrm{P}[X = n]$.

Par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{P}[X = n] = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}}$$

Remarque : ceci est un résultat classique sur les séries entières.

II.2. $\mathrm{P}\left[s^X = s^n\right] = \mathrm{P}[X = n]$.

II.2.*a*.

$$\begin{aligned} E\left(s^X\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \mathrm{P}\left[s^X = s^k\right] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \mathrm{P}[X = k] \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathrm{P}[X = k] s^k \\ &= G_X(s) \end{aligned}$$

II.2.*b*.

$$\mathrm{P}[X + Y = n] = \mathrm{P}\left[\bigcup_{k=0}^{n} \left(\{X = k\} \cap \{Y = n-k\}\right)\right]$$

$$\mathrm{P}\left[X+Y=n\right]=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}\left[\left\{X=k\right\}\bigcap\left\{Y=n-k\right\}\right]$$ ces événements étant deux à deux disjoints

$$=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}\left[X=k\right]\mathrm{P}\left[Y=n-k\right]$$ par indépendance de X et Y

Rappel : Le produit de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière associée à la suite $(c_n)_{\mathbb{N}}$ avec $\forall n\in\mathbb{N},\ c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$:

$$\sum a_n z^n \sum b_n z^n=\sum\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)z^n$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}G_{X+Y}(s)&=\sum_{n\geq 0}\mathrm{P}\left[X+Y=n\right]s^n\\&=\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}\left[X=k\right]\mathrm{P}\left[Y=n-k\right]s^n\\&=\sum_{n\geq 0}\mathrm{P}\left[X=k\right]s^n\sum_{n\geq 0}\mathrm{P}\left[Y=n-k\right]s^n\\&=G_X(s)G_Y(s)\end{aligned}$$

II.3. *Application 1.*

$$\mathrm{P}\left[X=k\right]=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\qquad G_X(s)=\sum_{n\geq 0}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}s^n=e^{-\lambda}\sum_{n\geq 0}\frac{(\lambda s)^n}{n!}=e^{-\lambda}e^{\lambda s}=e^{\lambda(s-1)}$$

$$\mathrm{P}\left[Y=k\right]=\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}\qquad G_Y(s)=\sum_{n\geq 0}\frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!}s^n=e^{-\mu}\sum_{n\geq 0}\frac{(\mu s)^n}{n!}=e^{-\mu}e^{\mu s}=e^{\mu(s-1)}$$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}G_{X+Y}(s)&=G_X(s)G_Y(s)\\&=e^{\lambda(s-1)}e^{\mu(s-1)}\\&\boxed{G_{X+Y}(s)=e^{(\lambda+\mu)(s-1)}}\end{aligned}$$

On calcule alors $G_{X+Y}^{(n)}(s)=(\lambda+\mu)^n\,e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$

Ainsi :

$$\mathrm{P}\left[X+Y=n\right]=\frac{G_{X+Y}^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\boxed{\mathrm{P}\left[X+Y=n\right]=\frac{\left(\lambda+\mu\right)^{n}e^{-\left(\lambda+\mu\right)}}{n!}}$$

$\Rightarrow$ La variable $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

II.4. *Application 2.*

$\mathrm{P}\left[B=1\right]=p$ et $\mathrm{P}\left[B=0\right]=1-p$

II.4.*a*.

$$\begin{aligned} G_B(s) &= \sum_{n\geq 0}\mathrm{P}\left[B=n\right]s^n \\ &= \mathrm{P}\left[B=1\right]s+\mathrm{P}\left[B=0\right] \\ &= ps+\left(1-p\right) \end{aligned}$$

II.4.*b*. La variable X_n est une somme de variables de Bernoulli de paramètre *p*, indépendantes entre elles : $X_n=\sum_{i=1}^{n}B_i$. Ainsi, d'après la question II.2.b. :

$$G_{X_n}(s)=\prod_{i=1}^{n}G_{B_i}(s)$$

Or $G_{B_i}(s)=G_B(s)$, $\forall i\in\left[1;n\right]$. Par conséquent :

$$G_{X_n}(s)=\left(G_B(s)\right)^n \text{ pour tout } s\in\left[0;1\right]$$

II.4.*c*. On sait que $\mathrm{P}\left[X_n=k\right]=\frac{G_{X_n}^{(k)}(0)}{k!}$, d'après **II.1.**

$$G_{X_n}(s)=\left(G_B(s)\right)^n=\left(ps+\left(1-p\right)\right)^n$$

$$G_{X_n}^{(k)}(s)=n\left(n-1\right)\ldots\left(n-k+1\right)p^k\left(ps+\left(1-p\right)\right)^{n-k}$$

$$G_{X_n}^{(k)}(0)=n\left(n-1\right)\ldots\left(n-k+1\right)p^k\left(1-p\right)^{n-k}$$

Il vient :

$$\mathrm{P}\left[X_n = k\right] = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\boxed{\mathrm{P}\left[X_n = k\right] = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$$

On en déduit que la variable X_n suit une loi binomiale $B(n, p)$.

II.5. *Application 3.*

On considère cette fois que $0 < p < 1$. On note $q = 1 - p$.

II.5.*a.* La variable *T* représente un numéro d'épreuve ; elle est donc à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$p_0 = \mathrm{P}\left[T = 0\right] = 0$: l'épreuve n°0 n'existe pas.

$p_1 = \mathrm{P}\left[T = 1\right] = 0$: car on ne peut pas avoir le résultat « 1 » à l'épreuve n°0 qui n'existe pas.

$p_2 = \mathrm{P}\left[T = 2\right] = pq$: car on doit avoir l'enchaînement d'épreuves suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & * & * & * \\ p & q & * & * & * \end{array}$$ où * représente un résultat quelconque 0 ou 1

II.5.*b.* La variable *T* correspond au temps d'attente du premier 1 suivi du temps d'attente du premier 0.

Soit *X* la variable associée au temps d'attente du premier 1 ; *X* suit une loi géométrique de paramètre *p* : $\mathrm{P}\left[X = x\right] = pq^{x-1}, \ \forall x \in \mathbb{N}^*$.

Soit *Y* la variable associée au temps d'attente du premier 0 qui suit l'apparition du premier 1 ; *Y* suit une loi géométrique de paramètre *q* : $\mathrm{P}\left[Y = y\right] = qp^{y-1}, \ \forall y \in \mathbb{N}^*$.

Les variables *X* et *Y* sont bien sûr indépendantes et on a $\boxed{T = X + Y}$.

D'après la question **II.2.*b.*** :

$$G_T(s) = G_{X+Y}(s) = G_X(s) G_Y(s)$$

Par définition de la variable *X*, on a :

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{n\geq 1} \mathrm{P}[X=n]s^n \\ &= \sum_{n\geq 1} pq^{n-1}s^n \\ &= \sum_{n\geq 1} ps(qs)^{n-1} \\ &= ps\sum_{m\geq 0}(qs)^m \quad \text{après changement d'indice} \end{aligned}$$

Or $qs \in [0;1[$, donc d'après la formule (1) donnée en rappel, on obtient : $G_X(s) = \dfrac{ps}{1-qs}$.

Par un raisonnement similaire, on obtient : $G_Y(s) = \dfrac{qs}{1-ps}$.

On peut finalement écrire :

$$\boxed{G_T(s) = \frac{pqs^2}{(1-ps)(1-qs)}} \text{ pour tout } s \in [0;1]$$

$\boxed{\textbf{II.5.}\textit{c}\textbf{.}}$ Pour tout $s \in [0;1]$, $(1-ps)(1-qs) = 1-s+pqs^2$. Il vient immédiatement :

$$(1-s+pqs^2)G_T(s) = pqs^2$$

Rappel : *Formule de Leibniz.*

Soient deux fonctions *f* et *g* définies sur un intervalle *I* de $\mathbb{R}$, et dont les dérivées d'ordre *k* $(0<k\leq n)$ sont toutes définies sur *I*. Soit *n*, un entier naturel. Alors :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p)} g^{(n-p)}$$

En prenant pour *f* la fonction définie par $1-s+pqs^2$ et pour *g* la fonction définie par $G_T(s)$, il vient, ces deux fonctions étant de classe C^∞, :

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \left(1-s+pqs^2\right)^{(p)} G_T^{(n-p)}(s) = 0$$

Or $\left(1-s+pqs^2\right)^{(p)} = 0$ pour tout $p \geq 3$, et :

$$C_n^0 = 1 \qquad C_n^1 = n \qquad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ainsi pour tout $n \geq 3$:

$$\left(1-s+pqs^2\right)G_T^{(n)}(s)+n(-1+2pqs)G_T^{(n-1)}(s)+\frac{n(n-1)}{2}(2pq)G_T^{(n-2)}(s)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(1-s+pqs^2\right)G_T^{(n)}(s)+n(2pqs-1)G_T^{(n-1)}(s)+pqn(n-1)G_T^{(n-2)}(s)=0$$

On cherche une expression avec $p_n = \mathrm{P}[X=n]$. Or $\mathrm{P}[X=n]=\dfrac{G_T^{(n)}(0)}{n!}$.

On utilise donc la relation ci-dessus en $s=0$, ce qui donne :

$$G_T^{(n)}(0)-nG_T^{(n-1)}(0)+pqn(n-1)G_T^{(n-2)}(0)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{G_T^{(n)}(0)}{n!}-n\frac{G_T^{(n-1)}(0)}{n!}+pqn(n-1)\frac{G_T^{(n-2)}(0)}{n!}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{G_T^{(n)}(0)}{n!}-\frac{G_T^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+pq\frac{G_T^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}=0$$
$$\Leftrightarrow p_n - p_{n-1}+pqp_{n-2}=0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{p_n = p_{n-1}-pqp_{n-2}}$$

II.5.*d*. On pose comme hypothèse de récurrence (HR) : $p_n = ap^n + bq^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question **II.5.*a*.** :

  $p_1 = 0 = ap + bq$

  $p_2 = pq = ap^2 + bq^2$

La résolution de ce système conduit aux valeurs suivantes :

$$a=\frac{q}{p-q} \qquad \text{et} \qquad b=\frac{p}{q-p}$$

Donc, nécessairement, on pose $a=\dfrac{q}{p-q}$ et $b=\dfrac{p}{q-p}$. Montrons maintenant par récurrence que $p_n = ap^n + bq^n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (HR), les deux conditions initiales $n=1$ et $n=2$ venant d'être vérifiées.

- Supposons que HR soit vraie au rang *n*. Alors :

$$p_n = ap^n + bq^n \text{ et } p_{n-1} = ap^{n-1}+bq^{n-1}$$

D'après la question $\boxed{\textbf{II.5.}c.}$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - pqp_{n-1} \\ &= ap^n + bq^n - pq\left(ap^{n-1} + bq^{n-1}\right) \\ &= ap^n + bq^n - a(1-p)\,p^n - b(1-q)\,q^n \\ &= ap^{n+1} + bq^{n+1} \end{aligned}$$

- Nous avons donc bien montré que $p_n = ap^n + bq^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\textbf{II.5.}e.}$

T admet une espérance si $G_T'(1)$ est une valeur finie, et T admet une variance si $G_T''(1)$ est une valeur finie. D'après la question $\boxed{\textbf{II.5.}b.}$, on a :

$$G_T(s) = \frac{pqs^2}{(1-ps)(1-qs)}$$

$$G_T'(s) = \frac{pqs(2-ps-qs)}{(1-ps)^2(1-qs)^2} \qquad G_T'(1) = \frac{1}{pq}$$

$$G_T''(s) = \frac{2pq\left(1+pq^2s^3+p^2qs^3-3pqs^2\right)}{(1-ps)^3(1-qs)^3} \qquad G_T''(1) = \frac{2(1-2pq)}{(pq)^2}$$

On en conclut que T admet une espérance et une variance.

Calcul de l'espérance

Par définition de l'espérance $E(T) = \sum_{n\geq 1} n\mathrm{P}[T=n]$.

On rappelle que (partie **I**)

$$\begin{aligned} G_T(s) &= \sum_{n\geq 0} \mathrm{P}[T=n]\,s^n \\ G_T'(s) &= \sum_{n\geq 1} n\mathrm{P}[T=n]\,s^{n-1} \\ G_T''(s) &= \sum_{n\geq 2} n(n-1)\mathrm{P}[T=n]\,s^{n-2} \end{aligned}$$

Donc $E(T) = G_T'(1)$ et $\boxed{E(T) = \frac{1}{pq}}$.

Calcul de la variance

Par définition de la variance $V(T) = E\left[\left(T - E(T)\right)^2\right] = E\left(T^2\right) - \left[E(T)\right]^2$.

On vérifie que :

$$\begin{aligned} E\left(T^2\right) &= \sum_{n\geq 1} n^2 \mathrm{P}[T = n] \\ &= \sum_{n\geq 2} n^2 \mathrm{P}[T = n] \quad \text{car } \mathrm{P}[T = 1] = 0 \text{ d'après } \boxed{\textbf{II.5.}\textit{a}\textbf{.}} \end{aligned}$$

Donc $E\left(T^2\right) = G_T''(1) + G_T'(1)$, et finalement :

$$V(T) = G_T''(1) + G_T'(1) - \left[G_T'(1)\right]^2$$

$$\text{c'est-à-dire } \boxed{V(T) = \frac{3p^2 - 3p + 1}{p^2(1-p)^2}}$$

FIN