Concours B INA ENSA
Session 1997

PROBLÈME I

On définit par récurrence la suite u par les conditions :

- ➔ u_0 est un réel strictement positif.
- ➔ Pour tout n entier naturel :

$$u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}$$

Le but du problème est l'étude du comportement de la suite suivant les valeurs de u_0.

PARTIE A : *Convergence de la suite.*

1. Que peut-on dire de la suite lorsque : $u_0 = 1$?
On supposera désormais que u_0 est différent de 1.

2. Montrer que la suite est croissante et à termes strictement positifs.

3.a. Pour tout n entier naturel, on pose : $v_n = 1 - u_n$. Montrer que la suite v ainsi définie a tous ses termes de même signe.

3.b. En déduire que, lorsque u_0 est strictement inférieur à 1, la suite u converge vers une limite L que l'on déterminera.

3.c. On suppose dans cette question que u_0 est strictement supérieur à 1. Montrer que la suite u tend vers $+\infty$.

PARTIE B : *Étude de la rapidité de convergence lorsque la limite est finie.*

Dans cette partie on suppose : $u_0 < 1$.

1. Justifier, pour tout n entier naturel non nul, l'encadrement :

$$\frac{n-1}{n+1} \leq u_n \leq 1$$

2. Pour tout n entier naturel non nul, on pose :

$$w_n = \frac{1}{1-u_n}$$

2.a. Montrer que l'on a, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 :

$$\frac{1}{2} \leq w_{k+1} - w_k \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

2.b. Prouver que pour k entier supérieur ou égal à 2 :

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$$

2.c. En déduire, pour $n \geq 3$:

$$\frac{n-2}{2} \leq w_n - w_2 \leq \frac{n-2}{2} + \frac{1}{2} \ln(n-1)$$

2.d. Calculer la limite, lorsque *n* tend vers l'infini, de la quantité :

$$\frac{w_n}{n}$$

puis un équivalent, lorsque *n* tend vers l'infini, de $1 - u_n$.

PARTIE C : *Étude de la divergence dans un cas particulier.*

1. On définit par récurrence la suite *a* par les conditions :

➔ $a_0 = 4$.

➔ Pour tout *n* entier naturel :

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2}$$

1.a. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, il existe un entier α_n tel que :

$$a_n = 2^{\alpha_n}$$

1.b. Donner une relation entre α_{n+1} et α_n. En déduire une expression de α_n puis de a_n en fonction de *n*.

1.c. Quelle est la limite de la suite *a* lorsque *n* tend vers l'infini ?

2. Dans toute la suite de cette partie on suppose : $u_0 = 4$.

2.a. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a :

$$u_n \geq a_n$$

2.b. Déterminer un entier n_0 à partir duquel u_n est supérieur à 10^9.

PROBLÈME II

Pour *n* entier naturel, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à *n*. On appelle polynôme unitaire un polynôme dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

PARTIE A : *Une propriété de divisibilité.*

1. Soit *P* un élément de E_n unitaire de degré *p* $(0 \leq p \leq n)$.

1.a. En utilisant une formule de Taylor, montrer que, pour tout *x* et pour tout *a* réels, on a :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

1.b. Prouver que, si P' divise P, alors il existe un réel a unique tel qu'on ait la relation, pour tout x :

$$pP(x) = (x-a)P'(x)$$

En déduire plus généralement que, pour $0 \le k < p$:

$$(p-k)P^{(k)}(x) = (x-a)P^{(k+1)}(x)$$

puis que a est une racine de $P^{(k)}$.

1.c. Déduire à l'aide de ce qui précède que si P' divise P, il existe un réel unique a tel que :

$$P(x) = (x-a)^p$$

PARTIE B : *Étude d'un endomorphisme de* E_3

Dans toute cette partie, n est égal à 3. On note : $B = (1, x, x^2, x^3)$ la base canonique de E_3.

On considère l'application F qui, à tout élément P de E_3, associe la fonction polynôme R définie pour tout x réel par :

$$R(x) = P(x) + \frac{(1-x)}{3}P'(x)$$

1. Montrer que F est un endomorphisme de E_3.

2. Écrire la matrice **M** de F dans la base B. Donner les valeurs propres de **M**. Est-elle diagonalisable ?

3. Montrer que si P est un vecteur propre de degré non nul pour **M**, alors P' divise P et il admet 1 comme racine.

En déduire, en utilisant la partie A, que $B' = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de vecteurs propres, si on pose :

$$Q_k(x) = (x-1)^k$$

où x est un réel quelconque et pour $0 \le k \le 3$. Quelle est la matrice $\mathbf{M}'$ de F dans la base B' ?

4. En remarquant, pour tout réel x, l'identité :

$$x = (x-1)+1$$

Ecrire la matrice de passage **S** de B vers B' ainsi que la matrice de passage inverse.

PARTIE C : *Une expérience aléatoire.*

Afin d'effectuer des tests de comportement, on dispose dans un enclos d'une grande quantité de souris. Cet enclos est relié à trois cages, vides au départ et ne comporte pas d'autres sorties. À un signal donné on ouvre les portes permettant l'accès aux cages, chaque souris choisissant indifféremment l'une d'entre elles avec la probabilité 1/3. On suppose enfin que, une fois entrée dans une cage, une souris n'en ressort pas. On désigne par X_n, pour n entier naturel, le nombre de cages encore vides lorsque n souris ont quitté l'enclos. Ainsi X_0 est la variable certaine égale à 3.

1. Pour k fixé, $0 \leq k \leq 3$, montrer que $\mathrm{P}\left[X_{n+1} = k\right]$ s'exprime sous la forme :

$$\mathrm{P}\left[X_{n+1} = k\right] = a_k \mathrm{P}\left[X_n = 0\right] + b_k \mathrm{P}\left[X_n = 1\right] + c_k \mathrm{P}\left[X_n = 2\right] + d_k \mathrm{P}\left[X_n = 3\right]$$

2. En déduire l'existence d'une matrice A que l'on explicitera telle que l'on ait, pour tout n :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{P}\left[X_{n+1} = 0\right] \\ \mathrm{P}\left[X_{n+1} = 1\right] \\ \mathrm{P}\left[X_{n+1} = 2\right] \\ \mathrm{P}\left[X_{n+1} = 3\right] \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} \mathrm{P}\left[X_n = 0\right] \\ \mathrm{P}\left[X_n = 1\right] \\ \mathrm{P}\left[X_n = 2\right] \\ \mathrm{P}\left[X_n = 3\right] \end{pmatrix}$$

3. En utilisant ce qui précède et la **partie B**, justifier la relation :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{P}\left[X_n = 0\right] \\ \mathrm{P}\left[X_n = 1\right] \\ \mathrm{P}\left[X_n = 2\right] \\ \mathrm{P}\left[X_n = 3\right] \end{pmatrix} = S \times \left(M'\right)^n \times S^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. En déduire une expression de l'espérance de la variable aléatoire X_n en fonction de n.