CORRIGE DU CONCOURS BANQUE AGRO B ET BE 1997

PROBLEME I

Ce problème a pour objet l'étude d'une suite récurrente d'ordre 1 dont le comportement varie suivant les valeurs de son premier terme. Ce sujet est classique : étude de la limite puis de la rapidité de convergence ou de divergence selon les différents cas.

PARTIE A : *Convergence de la suite.*

1. On suppose que $u_0 = 1$. On obtient immédiatement que $u_1 = 1$. Ceci nous suggère alors que la suite u est constante et égale à 1 ; ce qui se démontre facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

2.

- On montre que la suite u est croissante en remarquant que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 1)^2}{2}}$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et ainsi $u_n \leq u_{n+1}$.
- On a $u_0 > 0$ par hypothèse et, comme un carré de nombre réel est toujours positif, on a immédiatement que $u_{n+1} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci montre bien que la suite u est à termes strictement positifs.

3.*a*. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, après calcul, $\boxed{v_{n+1} = v_n \left(\frac{1 + u_n}{2} \right)}$. D'après la question précédente, on sait que $u_n > 0$, donc on a également $\frac{1 + u_n}{2} > 0$. Ainsi, v_n et v_{n+1} ont bien le même signe. Ceci démontre bien que la suite v a tous ses termes de même signe.

3.*b*. On a $u_0 < 1$ donc $v_0 > 0$. On déduit alors de la question précédente que $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a $u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la suite u est majorée par 1.

Comme, de plus, la suite u est croissante (d'après $\boxed{\textbf{2.}}$), on peut en déduire qu'elle converge vers un nombre réel L.

Déterminons alors ce réel L : en passant à la limite dans la relation de récurrence définissant la suite u, on obtient que L vérifie $L=\frac{1+L^2}{2}$, c'est à dire $(L-1)^2=0$. D'où $\boxed{L=1}$.

$\boxed{\textbf{3.}c\textbf{.}}$ Comme la suite u est croissante, soit elle converge soit elle tend vers $+\infty$.

Raisonnons alors par l'absurde en supposant que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$, avec $L\in\mathbb{R}$. En raisonnant comme à la question précédente, on obtient $L=1$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Or, on a $u_0>1$ donc $u_n>1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (car on a $v_n<0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$). Et comme la suite u est croissante, elle ne peut converger vers 1. D'où une absurdité qui nous permet d'affirmer que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty}$.

PARTIE B : *Etude de la rapidité de convergence lorsque la limite est finie.*

$\boxed{\textbf{1.}}$

- Nous avons déjà remarqué que la suite u est majorée par 1 dans le cas où $u_0<1$.
- Raisonnons par récurrence sachant que $u_0\geq -1$ car u_0 est strictement positif. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n\geq\frac{n-1}{n+1}$. Alors on a $u_{n+1}=\frac{1+u_n{}^2}{2}\geq\frac{n^2+1}{(n+1)^2}$, après calcul. Or, on remarque que $\frac{n^2+1}{(n+1)^2}\geq\frac{n}{n+2}$ car $(n^2+1)(n+2)\geq n(n+1)^2$ comme on le vérifie facilement en développant les deux facteurs. Ainsi, nous avons bien le résultat souhaité.

$\boxed{\textbf{2.}a\textbf{.}}$ Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On remarque tout d'abord que :

$$\begin{aligned} w_{k+1}-w_k &= \frac{1}{1-u_{k+1}}-\frac{1}{1-u_k} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1+u_k{}^2}{2}}-\frac{1}{1-u_k}=\frac{2}{1-u_k{}^2}-\frac{1}{1-u_k} \end{aligned}$$

Et donc :

$$w_{k+1} - w_k = \frac{2-(1+u_k)}{1-u_k^{\;2}} = \frac{1}{1+u_k}$$

- D'après la question précédente, on a $u_k \leq 1$ donc $\dfrac{1}{1+u_k} \geq \dfrac{1}{2}$ et ainsi $\boxed{w_{k+1} - w_k \geq \dfrac{1}{2}}$.

- Toujours d'après la question précédente, on a $u_k \geq \dfrac{k-1}{k+1}$ donc $\dfrac{1}{1+u_k} \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{k+1}{k}$ et ainsi,

  on a bien que $\boxed{w_{k+1} - w_k \leq \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)}$.

$\boxed{2.b.}$ Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$. Pour tout $t \in [k-1;k]$, on a $\dfrac{1}{k} \leq \dfrac{1}{t}$ et il s'ensuit que $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}dt \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt$. On a donc bien le résultat souhaité car $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}dt = \frac{1}{k}$.

$\boxed{2.c.}$ Prenons $n \geq 3$. D'après la question $\boxed{2.a.}$, on dispose des $n-2$ inégalités suivantes :

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2} \leq w_3 - w_2 \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} \leq w_4 - w_3 \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right) \\
\dots \\
\dots \\
\frac{1}{2} \leq w_n - w_{n-1} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)
\end{gathered}$$

En ajoutant ces $n-2$ inégalités, on obtient l'inégalité suivante :

$$\frac{n-2}{2} \leq w_n - w_2 \leq \frac{n-2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}\right)$$

Or, en utilisant la question précédente, il vient :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1} \leq \underbrace{\int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \dots + \int_{n-2}^{n-1} \frac{dt}{t}}_{=\int_1^{n-1}\frac{dt}{t}=\ln(n-1)}$$

On obtient alors l'inégalité souhaitée qui est $\boxed{\frac{n-2}{2} \leq w_n - w_2 \leq \frac{n-2}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)}$.

2.*d*.

- D'après la question précédente, on a, pour tout $n \geq 3$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{w_2}{n} \leq \frac{w_n}{n} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{\ln(n-1)}{n}$$

On en déduit alors immédiatement, d'après le théorème des gendarmes, que :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{n} = \frac{1}{2}}$$

- Ceci nous donne alors, en utilisant le fait que $w_n = \frac{1}{1-u_n}$, que $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n(1-u_n)} = 1$ et ainsi, on obtient l'équivalent suivant :

$$\boxed{1-u_n \sim \frac{2}{n} \text{ lorsque } n \to +\infty}$$

PARTIE C : *Etude de la divergence dans un cas particulier*.

1.*a*. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- On a $a_0 = 4 = 2^2$ donc on a $a = 2^{\alpha_0}$ avec $\alpha_0 = 2$.
- Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = 2^{\alpha_n}$. Alors on a $a_{n+1} = \frac{{a_n}^2}{2} = 2^{2\alpha_n - 1} = 2^{\alpha_{n+1}}$ en prenant $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n - 1$.

1.*b*.

- D'après la question précédente, on a $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- La relation entre α_n et α_{n+1} nous donne que $\alpha_n = 2^n \alpha_0 - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$ (formule qui peut se démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$). On obtient alors :

$$\boxed{\alpha_n = 2^n + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- On en déduit que :

$\boxed{a_n = 2^{2^n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\mathbf{1.}c.}$ D'après la question précédente, on a $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty}$.

$\boxed{\mathbf{2.}a.}$ On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Par hypothèse, on a $u_0 = a_0 = 4$ donc $u_0 \geq a_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq a_n$. On a $\frac{1+u_n^{\ 2}}{2} \geq \frac{u_n^{\ 2}}{2} \geq \frac{a_n^{\ 2}}{2}$ donc on en déduit que $u_{n+1} \geq a_{n+1}$ et ainsi, nous avons bien le résultat souhaité.

$\boxed{\mathbf{2.}b.}$ D'après la question précédente, il suffit de trouver un entier n_0 à partir duquel nous avons $a_n \geq 10^9$.

$$\begin{aligned}
&a_n \geq 10^9 \\
&2^{2^n+1} \geq 10^9 \\
&\left(2^n+1\right)\ln 2 \geq 9\ln 10 \\
&2^n \geq \frac{9\ln 10}{\ln 2} - 1 \\
&n\ln 2 \geq \ln\left(\frac{9\ln 10}{\ln 2} - 1\right) \\
&n \geq \frac{\ln\left(\frac{9\ln 10}{\ln 2} - 1\right)}{\ln 2}
\end{aligned}$$

Or, $\frac{\ln\left(\frac{9\ln 10}{\ln 2} - 1\right)}{\ln 2} = 4{,}85$ à 10^{-2} près. Donc $\boxed{n_0 = 5}$ convient.

PROBLEME II

Ce problème a pour objet l'étude d'une propriété de divisibilité des polynômes, propriété classique re-démontrée à la partie A. On étudie ensuite (partie B) un endomorphisme de l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3 ; ceci ayant pour finalité l'étude d'une expérience aléatoire à la partie C.

PARTIE A : *Une propriété de divisibilité.*

1.*a*. Comme le suggère l'énoncé, appliquons par exemple la formule de Taylor avec reste intégral à P à l'ordre p (P étant de classe C^{∞} donc de classe C^{p+1} sur $\mathbb{R}$).

Cette formule nous donne alors :

$$P(x)=\sum_{k=0}^{p}\frac{(x-a)^k}{k!}P^{(k)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^p}{p!}P^{(p+1)}(t)\,dt$$

Or, P est de degré p donc $P^{(p+1)}=0$ sur $\mathbb{R}$ et ainsi, l'intégrale du second membre de l'égalité précédente est nulle. D'où l'on déduit la formule demandée.

<u>Remarques</u> :

- Cette formule est appelée **formule de Taylor pour les polynômes**. Elle peut également se démontrer par récurrence sur le degré de P.
- Cette formule nous montre qu'**une fonction polynôme est entièrement déterminée par la donnée de ses dérivées successives en un point**. Ceci n'est pas vrai pour une fonction quelconque (il y a un reste) ; cependant ceci reste vrai avec les fonctions analytiques c'est-à-dire les fonctions développables en séries entières (mais la somme peut porter sur un nombre infini de termes).

1.*b*.

- Comme P' divise P, il existe $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P=QP'$. Pour des raisons évidentes de degré, le polynôme Q est de degré 1 donc il s'écrit $Q(x)=cx+d$ avec $c,d\in\mathbb{R}$ et $c\neq 0$. Le coefficient du terme de plus haut degré de QP' est alors cp et comme P est unitaire, on en déduit par identification des coefficients, que $cp=1$ donc $c=\dfrac{1}{p}$. On en déduit alors que $P(x)=\left(\frac{x}{p}+d\right)P'(x)$, c'est-à-dire, $pP(x)=(x+dp)P'(x)$. En posant $a=-dp$ (a est unique car Q l'est, donc d également), on obtient finalement :

$$\boxed{pP(x)=(x-a)P'(x)}.$$

- On raisonne alors par récurrence sur $k\in[\![0;p-1]\!]$, le cas $k=0$ venant d'être traité. Supposons donc que $(p-k)P^{(k)}(x)=(x-a)P^{(k+1)}(x)$ pour $k\in[\![0;p-2]\!]$ et montrons que cette égalité reste vraie au rang $k+1$: en dérivant l'égalité précédente, on obtient

$$(p-k)P^{(k+1)}(x)=P^{(k+1)}(x)+(x-a)P^{(k+2)}(x)$$

et donc

$$\big(p-(k+1)\big)P^{(k+1)}(x)=(x-a)P^{(k+2)}(x)$$

ce qui est bien la relation recherchée au rang $k+1$.

- Pour montrer que a est racine de $P^{(k)}$ pour $k\in[\![0;p-1]\!]$, il suffit de prendre $x=a$ dans la relation démontrée ci-dessus.

1.*c*. D'après la question **1.*a*.**, nous avons $P(x)=\sum_{k=0}^{p}\frac{(x-a)^k}{k!}P^{(k)}(a)$. D'autre part, nous venons de montrer que $P^{(k)}(a)=0$ pour tout $k\in[\![0;p-1]\!]$, il s'ensuit donc que :

$$P(x)=\frac{P^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p.$$

Or, P étant unitaire, on a $P^{(p)}(a)=p!$ et ainsi, nous pouvons en déduire que :

$$\boxed{P(x)=(x-a)^p}.$$

<u>*Remarque*</u> :

La réciproque de cette propriété étant évidente, nous avons en fait caractérisé les fonctions polynômes qui sont divisibles par leur dérivée.

PARTIE B : *Etude d'un endomorphisme de* E_3.

1. Vérifions que F est bien un endomorphisme de E_3.

- Soit $P \in E_3$. Comme P' est de degré au plus 2, on en déduit que $x \mapsto P(x) + \frac{(1-x)}{3} P'(x)$ appartient à E_3. L'application F est bien à valeurs dans E_3.
- D'autre part, pour $P, Q \in E_3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
F(\lambda P + Q)(x) &= (\lambda P + Q)(x) + \frac{(1-x)}{3}(\lambda P + Q)'(x) \\
&= \lambda P(x) + Q(x) + \lambda \frac{(1-x)}{3} P'(x) + \frac{(1-x)}{3} Q'(x) \\
&= \lambda\left(P(x) + \frac{(1-x)}{3} P'(x)\right) + Q(x) + \frac{(1-x)}{3} Q'(x) \\
&= \lambda F(P)(x) + F(Q)(x) \\
&= (\lambda F(P) + F(Q))(x)
\end{aligned}$$

D'où l' on déduit que $F(\lambda P + Q) = \lambda F(P) + F(Q)$ et ainsi F est bien linéaire.

2.

- Un calcul direct, avec abus évident de notations, nous donne que :

$$F(1)(x) = 1,\ F(x)(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x,\ F(x^2)(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2,\ F(x^3)(x) = x^2.$$

Ainsi, on a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- M étant une matrice triangulaire, nous en déduisons immédiatement ses valeurs propres qui sont donc 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ et 1. Elles sont simples donc la matrice M est diagonalisable.

$\boxed{\textbf{3.}}$

- Soit P un vecteur propre de degré non nul pour la matrice $\mathbf{M}$ associé à la valeur propre λ. Comme P est de degré non nul, on a $\lambda \neq 1$: en effet, on vérifie immédiatement que si $F(P) = P$ alors $P' = 0$ et donc $\deg(P) = 0$.

  De l'égalité $F(P)(x) = \lambda P(x)$, on en déduit que $P(x) = \frac{1-x}{3(\lambda-1)} P'(x)$ et donc que P' divise P. De plus, en prenant $x = 1$ dans cette dernière égalité, on obtient que $P(1) = 0$ donc que 1 est racine de P.

- D'après la question $\boxed{\textbf{A.1.}c.}$, on sait que $P(x) = (x-1)^p$ en notant p le degré de P (quitte à diviser par le coefficient dominant de P, on peut clairement supposer que P est <u>unitaire</u>). La question $\boxed{\textbf{A.1.}b.}$ nous donne également que $pP(x) = (x-1)P'(x)$.

  Ainsi, en utilisant le fait que $P(x) = \frac{1-x}{3(\lambda-1)} P'(x)$, on obtient $p = 3(1-\lambda)$ et donc $p \in \{1; 2; 3\}$ car $\lambda \in \left\{0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$. Ainsi, $P \in \{Q_1; Q_2; Q_3\}$.

  Réciproquement, on vérifie que Q_0, Q_1, Q_2 et Q_3 sont les vecteurs propres unitaires de F associés respectivement aux valeurs propres 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ et 0.

- Ainsi, B' est bien une base (quatre polynômes de degrés distincts) de E_3 formée de vecteurs propres de F. On en déduit immédiatement que

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

Pour $j \in [\![1;4]\!]$, la j-ième colonne de $\mathbf{S}$ représente les coordonnées de Q_{j-1} dans la base B (c'est la définition d'une matrice de passage).

On en déduit immédiatement que :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer rapidement la matrice $\mathbf{S}^{-1}$, on utilise l'indication de l'énoncé pour exprimer les polynômes $1, x, x^2, x^3$ dans la base $\{Q_0, Q_1; Q_2; Q_3\}$ de E_3. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&1 = 1 \\
&x = (x-1)+1 = 1+(x-1) \\
&x^2 = (x-1+1)^2 = (x-1)^2 + 2(x-1)+1 \\
&x^3 = (x-1+1)^3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1)+1
\end{aligned}$$

Et ainsi, on obtient :

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque :

La matrice $\mathbf{S}^{-1}$ représente **le triangle de Pascal** où l'on a inversé lignes et colonnes.

PARTIE C : *Une expérience aléatoire.*

1. Prenons un entier $n \in \mathbb{N}$ et étudions $P[X_{n+1} = k]$ pour $k \in [\![0;3]\!]$.

- Il est clair que $P[X_{n+1} = 3] = 0$.

- Pour étudier le cas où $X_{n+1}=2$, il faut considérer le cas où $X_n=2$ et où $X_n=3$. On obtient alors $P[X_{n+1}=2]=\frac{1}{3}P[X_n=2]+P[X_n=3]$.
- De même, on obtient $P[X_{n+1}=1]=\frac{2}{3}P[X_n=1]+\frac{2}{3}P[X_n=2]$.
- Enfin, on a $P[X_{n+1}=0]=P[X_n=0]+\frac{1}{3}P[X_n=1]$.

2. On déduit alors de la question précédente que

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On reconnaît alors la matrice $\mathbf{M}$ de la partie **B**.

3. De la relation précédente, on déduit immédiatement que

$$\begin{bmatrix} P[X_n=0] \\ P[X_n=1] \\ P[X_n=2] \\ P[X_n=3] \end{bmatrix} = A^n \times \begin{bmatrix} P[X_0=0] \\ P[X_0=1] \\ P[X_0=2] \\ P[X_0=3] \end{bmatrix}$$

Or, d'après la partie **B**, on sait que $\mathbf{A}=\mathbf{S}\times\mathbf{M}'\times\mathbf{S}^{-1}$, d'où l'on déduit que $\mathbf{A}^n=\mathbf{S}\times(\mathbf{M}')^n\times\mathbf{S}^{-1}$.

D'autre part, comme $P[X_0=0]=0$, $P[X_0=1]=0$, $P[X_0=2]=0$ et $P[X_0=3]=1$, on obtient finalement que

$$\boxed{\begin{bmatrix} P[X_n=0] \\ P[X_n=1] \\ P[X_n=2] \\ P[X_n=3] \end{bmatrix} = \mathbf{S}\times(\mathbf{M}')^n\times\mathbf{S}^{-1}\times\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

4.

Un calcul assez pénible nous donne, pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{S}\times\left(\mathbf{M'}\right)^n\times\mathbf{S}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n & 1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n & 1-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\\ 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n & 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n & 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-6\left(\frac{1}{3}\right)^n\\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

D'où l'on déduit que

$$\begin{bmatrix}P\left[X_n=0\right]\\ P\left[X_n=1\right]\\ P\left[X_n=2\right]\\ P\left[X_n=3\right]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\\ 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\ 0\end{bmatrix}$$

Enfin, comme $E\left[X_n\right]=P\left[X_n=1\right]+2P\left[X_n=2\right]+3P\left[X_n=3\right]$, on obtient :

$$\boxed{E\left[X_n\right]=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

FIN