Concours B INA ENSA
Session 1998

PARTIE I : *Résultats préliminaires usuels.*

A. Dans toute cette partie, λ désigne un réel fixé non nul. On note g_λ la fonction définie, pour tout *t* réel par :

$$g_\lambda(t) = \exp(-\lambda t)$$

1. Vérifier la relation : $(g_\lambda)' + \lambda g_\lambda = 0$.

2.a. Démontrer que toute fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme :

$$f = u \times g_\lambda$$

où *u* est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

2.b. Montrer que la relation :

(1) *f* est dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) + \lambda f(t) = 0$

équivaut à la relation :

(2) *u* est dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = 0$

2.c. En déduire l'ensemble des fonctions *f* vérifiant la relation (1).

2.d. Montrer que, pour toute constante *C* fixée, il existe une seule fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant (1) et la condition : $f(0) = C$.

B. Dans cette partie, λ et μ désignent deux réels non nuls (éventuellement confondus). On se propose de déterminer l'ensemble des couples (f_1, f_2) de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui vérifient, pour tout *t* réel, les relations :

$$(3)\begin{cases} f_1'(t) = -\lambda f_1(t) \\ f_2'(t) = -\lambda f_1(t) - \mu f_2(t) \\ f_1(0) = 1 \end{cases}$$

1. Déterminer f_1.

2.a. On pose : $f_2 = u \times g_\mu$.

Déterminer une relation sur *u* pour que (f_1, f_2) soit une solution de (3).

2.b. En déduire tous les couples solutions de (3) en distinguant suivant les cas où λ et μ sont distincts ou confondus.

C. Dans cette partie λ et μ désignent deux réels strictement positifs.

1. Dans cette question, on suppose λ et μ distincts. On considère l'unique solution de (3) telle que : $f_2(0) = 0$.

1.a. Expliciter $f_2(t)$, $f_2'(t)$ et $f_2''(t)$ pour tout *t* réel.

1.b. Donner le tableau de variation de f_2 sur $\mathbb{R}^+$. On précisera en particulier les abscisses du maximum et du point d'inflexion en fonction de λ et de μ.

1.c. Application numérique : $\lambda = 0,7$; $\mu = 0,4$.

Donner une représentation graphique de f_2 sur $\mathbb{R}^+$.

2. Dans cette question, on suppose $\lambda = \mu$. On considère l'unique solution de (3) telle que : $f_2(0) = 0$.

2.a. Expliciter $f_2(t)$, $f_2'(t)$ et $f_2''(t)$ pour tout *t* réel.

2.b. Donner le tableau de variation de f_2 sur $\mathbb{R}^+$. On précisera en particulier les coordonnées du maximum et du point d'inflexion en fonction de λ.

2.c. *Application numérique* : $\lambda = 0,5$.

Donner une représentation graphique de f_2 sur $\mathbb{R}^+$.

PARTIE II : *Une famille de fonctions*

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif. On se propose de montrer l'existence d'une unique famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout *t* réel :

$$(3)\quad \begin{cases} f_1'(t) = -\lambda f_1(t) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} f_{n+1}'(t) &= \lambda f_n(t) - \lambda f_{n+1}(t) \\ f_n(0) &= 1 \end{cases} \end{cases}$$

1. Déterminer f_1 et f_2.

2. Montrer par récurrence sur *n* que f_n est donnée, pour tout *t* réel, par une expression de la forme :

$$f_n(t) = P_n(t) \times \exp(-\lambda t)$$

où P_n est une fonction polynomiale dont on déterminera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

3. Calculer P_1, P_2 et P_3.

4. Justifier, en utilisant la question 2., que l'on a, pour tout *n* entier naturel non nul et tout *t* réel, la relation :

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

5.a. *n* désigne dans cette question un entier non nul fixé. Déterminer un équivalent lorsque *t* tend vers $+\infty$ de $f_n(t)$ ainsi que sa limite.

5.b. Déterminer, pour *t* fixé, la limite lorsque *n* tend vers $+\infty$ de $f_n(t)$.

6. Pour tout *n* entier naturel non nul et tout *t* réel, on pose :

$$\varphi_n(t) = -(f_{n+1})'(t).$$

6.a. Exprimer $\varphi_n(t)$ en fonction de λ, *n* et *t*.

6.b. Démontrer que :

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T \varphi_n(t)\,dt = 1$$

6.c. En déduire, en fonction de λ, une expression de :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\exp(-\lambda t)\,dt$$

PARTIE III : *Des variables aléatoires à densité.*

Dans toute cette partie, *n* désigne un entier naturel non nul. On note X_n la variable aléatoire réelle continue dont une densité de probabilité h_n est donnée par :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+, h_n(t) = \alpha_n f_n(t) \\ \forall t \in \mathbb{R}^{*-}, h_{n(t)} = 0 \end{cases}$$

1. Reconnaître la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.

2. On suppose désormais que *n* est strictement supérieur à 1.

2.a. Calculer α_n.

2.b. Déterminer l'espérance de X_n en fonction de λ et de *n*.

3.a. Justifier, pour tout $p\,(0 \le p \le n)$ la relation :

$$\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$$

3.b. En déduire l'espérance de X_n^2, puis, plus généralement, celle de X_n^p, pour *p* entier naturel non nul.