CORRIGE DU CONCOURS BANQUE AGRO B ET BE 1998

Le but du problème est la résolution d'équations différentielles linéaires. Cela nous permet d'obtenir une suite de fonctions dont on étudie quelques propriétés et que l'on utilise dans la dernière partie pour étudier des variables aléatoires à densité.

PARTIE I : Résultats préliminaires usuels.

I.A. $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit $g_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

I.A.1. La fonction g_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'_\lambda(t) = -\lambda e^{-\lambda t}$, donc :

$$g'_\lambda(t) + \lambda g_\lambda(t) = -\lambda e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} = 0$$

I.A.2.*a*. Pour toute fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$, on peut écrire :

$$f(t) = e^{-\lambda t}\left[e^{\lambda t} f(t)\right] \text{ pour } t \in \mathbb{R}$$

En posant $u(t) = e^{\lambda t} f(t)$, on a $f(t) = u(t) g_\lambda(t)$.

I.A.2.*b*.

- Montrons d'abord que $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$.

  On suppose donc que *f* est dérivable et que $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) + \lambda f(t) = 0$.

  D'après **I.A.2.*a*.**, on a $u(t) = e^{\lambda t} f(t)$ qui est dérivable car produit de fonctions toutes dérivables. De plus, nous avons $u'(t) = \lambda e^{\lambda t} f(t) + e^{\lambda t} f'(t) = e^{\lambda t}\left(\lambda f(t) + f'(t)\right) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. D'où le résultat souhaité.

- Montrons maintenant que $\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$. On suppose donc que *u* est dérivable et que $\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = 0$.

  D'après **I.A.2.*a*.**, on a $f(t) = u(t) g_\lambda(t)$, donc *f* est dérivable comme produit de fonctions toutes dérivables.

De plus, $f'(t) = \underbrace{u'(t)g_\lambda(t)}_{=0} + u(t)g'_\lambda(t) = u(t)g'_\lambda(t)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(t) + \lambda f(t) &= u(t)g'_\lambda(t) + \lambda u(t)g_\lambda(t) \\ &= u(t)\left[g'_\lambda(t) + \lambda g_\lambda(t)\right] \\ &= 0 \qquad \text{car } g'_\lambda(t) + \lambda g_\lambda(t) = 0 \text{ d'après } \boxed{\textbf{I.A.1.}} \end{aligned}$$

I.A.2.*c*. Soit *f* une fonction vérifiant la relation (1) précédente.

Alors $f(t) = u(t)g_\lambda(t)$ avec $u'(t) = 0$. Or, $u'(t) = 0 \Leftrightarrow u(t) = K$ avec $K \in \mathbb{R}$ et donc f est de la forme $f = Kg_\lambda$. Réciproquement, on vérifie que toute fonction de ce type vérifie bien la relation (1).

L'ensemble des solutions de la relation (1) est donc : $\left\{Ke^{-\lambda t} / K \in \mathbb{R}\right\}$.

I.A.2.*d*. Soit une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $f(0) = C$.

D'après la question précédente, $f(t) = Ke^{-\lambda t}$, donc $f(0) = K$. Ainsi, $K = C$ et la seule fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant (1) et telle que $f(0) = C$ est $f(t) = Ce^{-\lambda t}$.

I.B. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On cherche l'ensemble des couples (f_1, f_2), avec f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$, solutions du système :

$$(3) \quad \begin{cases} f_1'(t) = -\lambda f_1(t) \\ f_2'(t) = \lambda f_1(t) - \mu f_2(t) \text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ f_1(0) = 1 \end{cases}$$

I.B.1. On cherche f_1, solution de $f_1'(t) = -\lambda f_1(t)$. D'après **I.A.2.*d*.**, avec $C = 1$, il vient :

$$\boxed{f_1(t) = e^{-\lambda t} = g_\lambda(t)}$$

I.B.2.*a*. On pose $f_2 = u \times g_\mu$. Alors $f_2' = u' \times g_\mu + u \times g'_\mu$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} & f_2'(t) = \lambda f_1(t) - \mu f_2(t) \\ \Leftrightarrow\ & u'(t) \times g_\mu(t) + u(t) \times g'_\mu(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \mu u(t) \times g_\mu(t) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow u'(t)\times e^{-\mu t}+u(t)\times\underbrace{\left[g'_\mu(t)+\mu g_\mu(t)\right]}_{=0\ \text{d'après I.A.}}=\lambda e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u'(t)=\lambda e^{(\mu-\lambda)t}}$$

I.B.2.*b*.

- Si $\lambda=\mu$, alors $u'(t)=\lambda \Leftrightarrow u(t)=\lambda t+K$ et $f_2(t)=(\lambda t+K)e^{-\lambda t}=(\mu t+K)e^{-\mu t}$.
- Si $\lambda\neq\mu$, alors $u'(t)=\lambda e^{(\mu-\lambda)t} \Leftrightarrow u(t)=\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}e^{(\mu-\lambda)t}+K$ et :

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \left[\frac{\lambda}{\mu-\lambda}e^{(\mu-\lambda)t}+K\right]e^{-\mu t} \\ &= \frac{\lambda}{\mu-\lambda}e^{-\lambda t}+Ke^{-\mu t} \end{aligned}$$

En résumé, les solutions du système (3) sont :

- Si $\lambda=\mu$, alors $f_1(t)=e^{-\lambda t}$ et $f_2(t)=(\lambda t+K)e^{-\lambda t}$
- Si $\lambda\neq\mu$, alors $f_1(t)=e^{-\lambda t}$ et $f_2(t)=\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}e^{-\lambda t}+Ke^{-\mu t}$

I.C. On suppose $\lambda,\mu>0$.

I.C.1. On suppose $\lambda\neq\mu$.

I.C.1.*a*. Si on impose $f_2(0)=0$, il vient $f_2(0)=\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}+K=0 \Leftrightarrow K=-\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}$. Donc :

$$f_2(t)=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\left(e^{-\lambda t}-e^{-\mu t}\right)$$

$$f'_2(t)=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\left(-\lambda e^{-\lambda t}+\mu e^{-\mu t}\right)$$

$$f''_2(t)=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\left(\lambda^2 e^{-\lambda t}-\mu^2 e^{-\mu t}\right)$$

$\boxed{\textbf{I.C.1.}\textit{b.}}$

- *Variations et maximum de* f_2 *sur* $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
& f_2'(t) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & -\lambda e^{-\lambda t} + \mu e^{-\mu t} \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^{(\mu-\lambda)t} \leq \frac{\mu}{\lambda} \\
\Leftrightarrow\ & (\mu-\lambda)t \leq \ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \\
\Leftrightarrow\ & t \leq \frac{\ln\mu - \ln\lambda}{\mu-\lambda} \quad \text{quel que soit le signe de } \mu-\lambda
\end{aligned}$$

La fonction f_2 admet donc un maximum en $\boxed{t_{opt} = \dfrac{\ln\mu - \ln\lambda}{\mu-\lambda}}$ car $f_2'(t_{opt}) = 0$ et $f_2'(t)$ passe du signe positif au signe négatif au voisinage de t_{opt}.

- *Point d'inflexion de* f_2.

$$\begin{aligned}
& f_2''(t) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^{(\mu-\lambda)t} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & (\mu-\lambda)t = 2\ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \\
\Leftrightarrow\ & t = 2\frac{\ln\mu - \ln\lambda}{\mu-\lambda}
\end{aligned}$$

La fonction f_2 présente donc un point d'inflexion en $\boxed{t_i = 2t_{opt}}$.

- D'autre part, nous avons $f_2(t_{opt}) = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{\mu-\lambda}}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f_2(t) = 0$. D'où le tableau de variation suivant :

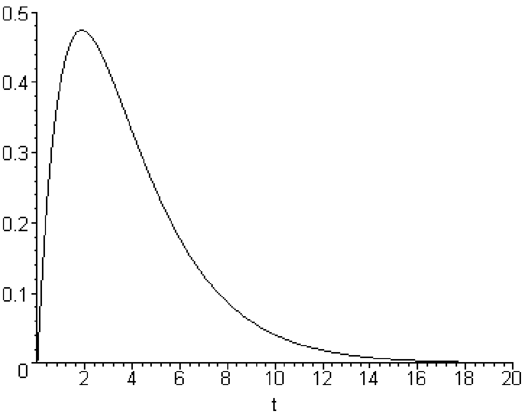
t	0		t_{opt}		$+\infty$
$f_2'(t)$		$+$	0	$-$	
$f_2(t)$	0	$\nearrow$	$(\lambda/\mu)^{\mu/(\mu-\lambda)}$	$\searrow$	0

$\boxed{\textbf{I.C.1.}c.}$ *Application numérique* : $\lambda = 0,7$ et $\mu = 0,4$.

$$t_{opt} = \frac{\ln\mu - \ln\lambda}{\mu - \lambda} \approx 1,865$$

$$t_i = 2t_{opt} \approx 3,730$$

$$f_2\left(t_{opt}\right) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{\mu-\lambda}} \approx 0,474$$



$\boxed{\textbf{I.C.2.}}$ On suppose $\lambda = \mu$.

$\boxed{\textbf{I.C.2.}a.}$ Si on impose $f_2(0) = 0$, il vient $f_2(0) = K = 0$ et donc :

$$f_2(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$f_2'(t) = \lambda(1 - \lambda t)e^{-\lambda t}$$

$$f_2''(t) = -\lambda^2(2 - \lambda t)e^{-\lambda t}$$

$\boxed{\textbf{I.C.2.}b.}$

- *Variations et maximum de* f_2 *sur* $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} & f_2'(t) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - \lambda t \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & t \leq \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

La fonction f_2 admet donc un maximum en $\boxed{t_{opt} = \frac{1}{\lambda}}$.

- *Point d'inflexion de* f_2.

$$\begin{aligned} & f_2''(t) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2 - \lambda t = 0 \\ \Leftrightarrow\ & t = \frac{2}{\lambda} \end{aligned}$$

La fonction f_2 présente donc un point d'inflexion en $\boxed{t_i = 2t_{opt}}$.

- D'autre part, nous avons $f_2\left(t_{opt}\right)=e^{-1}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f_2(t)=0$ par croissance comparée. D'où le tableau de variation suivant :

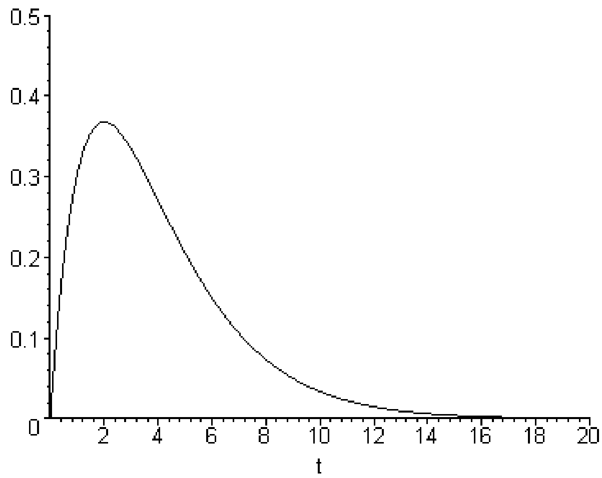
t	0		$1/\lambda$		$+\infty$
$f_2'(t)$		$+$	0	$-$	
$f_2(t)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

I.C.2.*c*. *Application numérique* : $\lambda=0,5$.

$$t_{opt}=\frac{1}{\lambda}=2$$

$$t_i=2t_{opt}=4$$

$$f_2(2)=e^{-1}\simeq 0,368$$



PARTIE II : Une famille de fonctions.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}^{*+}$. On considère le système suivant :

$$(3)\quad\begin{cases} f_1'(t)=-\lambda f_1(t) \\ \forall n\in\mathbb{N}^*\begin{cases} f_{n+1}'(t)=\lambda f_n(t)-\lambda f_{n+1}(t) \text{ pour tout } t\in\mathbb{R} \\ f_n(0)=1\end{cases}\end{cases}$$

II.1. Pour $n=2$, on retrouve le système de la partie **I.C.** pour $\lambda=\mu$, avec toutefois une condition initiale différente. Ainsi :

$$f_1(t)=e^{-\lambda t} \text{ et } f_2(t)=(\lambda t+K)e^{-\lambda t}$$

Or ici on veut $f_n(0)=1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ceci conduit à $K=1$, c'est-à-dire :

$$\boxed{f_1(t)=e^{-\lambda t} \text{ et } f_2(t)=(\lambda t+1)e^{-\lambda t}}$$

II.2. Comme suggéré dans l'énoncé, nous allons raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- La question précédente nous donne immédiatement que $P_1(t)=1$ et $P_2(t)=\lambda t+1$.
- Supposons (hypothèse de récurrence) que $f_n(t)=P_n(t)e^{-\lambda t}$ où P_n est un polynôme de degré $n-1$ et de coefficient dominant égal à $\dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$.

  D'après la question **I.A.2.*a.***, nous avons $f_{n+1}(t)=u_{n+1}(t)e^{-\lambda t}$ où u_{n+1} est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. En injectant l'expression de f_{n+1} dans le système (3), on obtient que $u'_{n+1}(t)=\lambda P_n(t)$. Ainsi, u_{n+1} est un polynôme que l'on note désormais P_{n+1}. Comme $P'_{n+1}=\lambda P_n$, on en déduit que P_{n+1} est de degré n. De plus, en identifiant les coefficients dominants, on obtient que le coefficient dominant de P_{n+1} est égal à $\dfrac{1}{n}\lambda\dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}=\dfrac{\lambda^n}{n!}$. Nous avons donc bien le résultat souhaité.

<u>*Remarque*</u> :

Comme $f_n(0)=1$, nous pouvons également en déduire que $P_n(0)=1$.

II.3. D'après la question précédente, nous avons :

$$\boxed{P_1(t)=1}$$

$$\boxed{P_2(t)=\lambda t+1}$$

P_3 vérifie $P'_3(t)=\lambda P_2(t)=\lambda(\lambda t+1)$ et $P_3(0)=1$. Ainsi :

$$P_3(t)=\lambda^2\frac{t^2}{2}+\lambda t+K \text{ avec } K=1$$

$$\boxed{P_3(t)=\frac{\lambda^2}{2}t^2+\lambda t+1}$$

II.4. On raisonne là encore par récurrence. On pose comme hypothèse de récurrence (HR) que :

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- HR est vérifiée pour $n = 1$: $P_1(t) = 1$, et pour $n = 2$: $P_2(t) = \lambda t + 1$.
- Supposons que HR soit vraie au rang *n*. D'après **II.2.**, nous avons :

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(t) &= \lambda P_n(t) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1} t^k}{k!} \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1} t^{k+1}}{k!(k+1)} + C \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!} + C \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda^j t^j}{j!} + C \end{aligned}$$

Toujours d'après **II.2.**, $P_{n+1}(0) = 1$, ce qui conduit à $C = 1$. Ainsi :

$$P_{n+1}(t) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda^j t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda^j t^j}{j!} \quad \text{i.e. HR vraie au rang } (n+1)$$

- Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$.

II.5.*a*. Soit *n* un entier non nul fixé. D'après la question précédente, il vient :

$$P_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Ce qui est revient à écrire d'après **II.2.** :

$$f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

D'après le développement en série entière de $e^{\lambda t}$, on peut écrire :

$$e^{\lambda t} \geq \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Ainsi :

$$\frac{e^{\lambda t}}{(\lambda t)^{n-1}} \geq \frac{\lambda t}{n!}$$

Or $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\lambda t}{n!} = +\infty$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^{\lambda t}}{(\lambda t)^{n-1}} = +\infty$, ce qui conduit à $\lim\limits_{t\to+\infty} (\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t} = 0$.

Finalement : $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} f_n(t) = 0}$

II.5.*b*. $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{\lambda t}$ (développement en série entière de $e^{\lambda t}$). D'où l'on déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} P_n(t) \times e^{-\lambda t} = 1$.

II.6. Pour tout entier *n* non nul et tout réel *t*, on pose : $\varphi_n(t) = -(f_{n+1})'(t)$

II.6.*a*.

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= -(f_{n+1})'(t) \\ &= -\lambda f_n(t) + \lambda f_{n+1}(t) \\ &= -\lambda P_n(t) e^{-\lambda t} + \lambda P_{n+1}(t) e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}P_{n+1}(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} + \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= P_n(t) + \frac{(\lambda t)^n}{n!}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\varphi_n(t) = \lambda e^{-\lambda t} \left[P_{n+1}(t) - P_n(t) \right]$$

$$\boxed{\varphi_n(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

II.6.*b*.

$$\lim_{T \to +\infty} \int_0^T \varphi_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \varphi_n(t)\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\,dt$$

Soit $J_n = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\,dt$. Montrons par récurrence que $J_n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$ (HR).

- $J_0 = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} = 1$

- Supposons que HR soit vraie au rang n :

$$J_{n+1} = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt$$

Posons $u(t) = \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Il vient $u'(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ et $v(t) = -e^{-\lambda t}$.

Par une intégration par parties, rendue possible car u et v sont C^1 sur $[0;+\infty[$, on obtient :

$$J_{n+1} = \underbrace{\left[-\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\,dt}_{=J_n}$$

Ainsi, $J_{n+1} = 1$. HR est donc vraie au rang $(n+1)$.

- Finalement, nous avons montré que $J_n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

  Par conséquent, $\lim_{T \to +\infty} \int_0^T \varphi_n(t)\,dt = 1$.

II.6.*c*.

Compte tenu de ce qui précède, $I_n = \frac{1}{\lambda} J_n$.

Par conséquent :

$$\boxed{I_n = \frac{1}{\lambda}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

PARTIE III : Des variables aléatoires à densité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit X_n la variable aléatoire réelle continue dont la densité de probabilité vérifie :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+, & h_n(t) = \alpha_n f_n(t) \\ \forall t \in \mathbb{R}^{*-}, & h_n(t) = 0 \end{cases}$$

III.1. $h_1(t) = \alpha_1 f_1(t) = \alpha_1 e^{-\lambda t}$.

h_1 étant une densité de probabilité, nous avons $\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t)\,dt = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_1 e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} \alpha_1 e^{-\lambda t} dt \\ &= \alpha_1 \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\alpha_1}{\lambda} \end{aligned}$$

Ainsi, on a nécessairement $\alpha_1 = \lambda$.

Par conséquent, $h_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, la loi de X_1 est la **loi exponentielle** de paramètre λ.

Calcul de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t h_1(t)\,dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt \end{aligned}$$

En posant $u(t) = t$ et $v'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, et en intégrant par parties, on obtient :

$$u'(t) = 1 \qquad v(t) = -e^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \left[-t e^{-\lambda t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^{+\infty} \qquad \boxed{E(X_1) = \frac{1}{\lambda}} \end{aligned}$$

<u>*Calcul de la variance*</u> :

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E\left(\left[X_1 - E(X_1)\right]^2\right) \\ &= E\left(X_1^2\right) - \left[E(X_1)\right]^2 \end{aligned}$$

Calculons d'abord $E\left(X_1^2\right)$:

$$\begin{aligned} E\left(X_1^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 h_1(t)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t}\,dt \end{aligned}$$

En posant $u(t) = t^2$ et $v''(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, une double intégration par parties conduit à :

$$u'(t) = 2t \qquad u''(t) = 2$$

$$v'(t) = -e^{-\lambda t} \qquad v(t) = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned} E\left(X_1^2\right) &= \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t}\,dt \\ &= \underbrace{\left[-t^2 e^{-\lambda t} - \frac{2}{\lambda} t e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dx \\ &= \frac{2}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} \\ E\left(X_1^2\right) &= \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant dans la variance, on obtient :

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E\left(X_1^2\right) - \left[E(X_1)\right]^2 \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{V(X_1) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

III.2.*a*. D'après la partie **II** :

$$f_n(t) = P_n(t) e^{-\lambda t} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

h_n étant une densité de probabilité, $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,dt = 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,dt = 1 &\Leftrightarrow \int_{0}^{+\infty} h_n(t)\,dt = 1 \\
&\Leftrightarrow \int_{0}^{+\infty} \alpha_n f_n(t)\,dt = 1 \\
&\Leftrightarrow \int_{0}^{+\infty} \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}\,dt = 1 \\
&\Leftrightarrow \alpha_n \int_{0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}\,dt = 1 \\
&\Leftrightarrow \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}\,dt}_{=I_k} = 1
\end{aligned}$$

Finalement, $\alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} I_k = 1 \Leftrightarrow \alpha_n \dfrac{n}{\lambda} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_n = \dfrac{\lambda}{n}}$.

III.2.*b*.

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \int_{0}^{+\infty} t\alpha_n f_n(t)\,dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} t\frac{\lambda}{n} f_n(t)\,dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} t\frac{\lambda}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}\,dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \frac{1}{n} \int_{0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} (k+1) e^{-\lambda t}\,dt \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1) \int_{0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t}\,dt \right] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) I_{k+1} \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{\lambda} \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E\left(X_n\right)=\frac{n+1}{2\lambda}}$$

III.3.*a*. Raisonnons par récurrence avec comme hypothèse de récurrence HR :

$$\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1} \text{ pour tout } 1 \leq p \leq n$$

- Si $n=1$, la seule valeur possible pour p est $p=1$.

$$\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_1^1 = 1 \text{ et } C_{n+1}^{p+1} = C_2^2 = 1$$

- Supposons maintenant que HR soit vraie au rang n. Prenons alors $p \in [\![1;n+1]\!]$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1} C_k^p &= \sum_{k=p}^{n} C_k^p + C_{n+1}^p \\ &= C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^p\end{aligned}$$

Mais d'après la formule de Pascal, $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$, c'est-à-dire $C_{n+2}^{p+1} = C_{n+1}^p + C_{n+1}^{p+1}$.

Ainsi, $\sum_{k=p}^{n+1} C_k^p = C_{n+2}^{p+1}$; HR est donc vraie au rang $(n+1)$.

- Nous avons donc bien montré que $\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$ pour tout $1 \leq p \leq n$.

III.3.*b*.

$$\begin{aligned}E\left(X_n^2\right) &= \int_0^{+\infty} t^2 \alpha_n f_n(t)\,dt \\ &= \frac{\lambda}{n}\int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k t^{k+2}}{k!}e^{-\lambda t}dt \\ &= \frac{\lambda}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\lambda^2}(k+1)(k+2)\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{k+2}}{(k+2)!}e^{-\lambda t}dt\right] \\ &= \frac{\lambda}{n}\frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(k+2)I_{k+2} \\ &= \frac{\lambda}{n}\frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(k+2)\end{aligned}$$

$$\boxed{E\left(X_n^2\right)=\frac{1}{n\lambda^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(k+2)}$$

Plus généralement, on peut écrire :

$$E\left(X_n^p\right)=\frac{1}{n\lambda^p}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(k+2)\ldots(k+p)$$

Or $(k+1)(k+2)\ldots(k+p)=\dfrac{(k+p)!}{k!}=p!C_{k+p}^p$

Donc $E\left(X_n^p\right)=\dfrac{1}{n\lambda^p}\,p!\sum_{k=0}^{n-1}C_{k+p}^p$. Par le changement d'indice $j=k+p$, il vient :

$$E\left(X_n^p\right)=\frac{1}{n\lambda^p}\,p!\underbrace{\sum_{j=p}^{n+p-1}C_j^p}_{\substack{=C_{n+p}^{p+1}\\ \text{d'après III.3.a.}}}$$

$$\begin{aligned}E\left(X_n^p\right)&=\frac{1}{n\lambda^p}\,p!C_{n+p}^{p+1}\\&=\frac{1}{n\lambda^p}\,p!\frac{(n+p)!}{(p+1)!(n-1)!}\end{aligned}$$

$$\boxed{E\left(X_n^p\right)=\frac{1}{n\lambda^p}\frac{(n+p)!}{(p+1)(n-1)!}}$$

Vérification pour $p=1$: $E\left(X_n\right)=\dfrac{1}{n\lambda}\dfrac{(n+1)!}{2(n-1)!}=\dfrac{n+1}{2\lambda}$.

FIN