Concours B INA ENSA
Session 1999

PROBLÈME I

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n, $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E et φ une application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(x,y,z)\in E^3$, $\varphi(\lambda x+y,z)=\lambda\varphi(x,y)+\varphi(y,z)$.

(ii) $\forall(x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$.

(iii) $\forall x\in E$, $\varphi(x,x)\geq 0$ et si x est non nul alors $\varphi(x,x)>0$.

PARTIE A

A.1. Montrer que pour tout x élément de E, l'application φ_x définie par :

$$\varphi_x : E\to\mathbb{R}$$
$$z\to\varphi_x(z)=\varphi(x,z)$$

est linéaire.

A.2. Soit $A=(a_{ij})_{i,j\in[1,n]}$ la matrice carrée de dimension n telle que $a_{ij}=\varphi(e_i,e_j)$, pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et n. Montrer que $\varphi(x,y)={}^tX.A.Y$ où X (resp. Y) est la matrice colonne des coordonnées de x (resp. y) dans la base B.

A.3.a. Montrer que :

$$\forall(x,y)\in E^2,\ |\varphi(x,y)|\leq[\varphi(x,x)]^{1/2}.[\varphi(y,y)]^{1/2}.$$

Indication : On pourra considérer le polynôme en λ défini par $\varphi(x+\lambda y,x+\lambda y)$ et utiliser le fait qu'il est de signe constant.

A.3.b. En déduire que, pour tout couple (x,y) d'éléments de E :

$$[\varphi(x+y,x+y)]^{1/2}\leq[\varphi(x,x)]^{1/2}+[\varphi(y,y)]^{1/2}.$$

PARTIE B

On suppose maintenant que $E=\mathbb{R}_3[X]$, ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels et de degré au plus 3, $B=(1,X,X^2,X^3)$ et : $\forall(R,Q)\in E^2$, $\varphi(R,Q)=\int_0^1 R(t)Q(t)\,dt$.

B.1. Montrer que φ vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii) ci-dessus.

B.2. Déterminer la matrice A associée à φ dans la base B.

B.3.a. Montrer qu'il existe une unique famille $(P_k)_{0\le k\le 3}$ d'éléments de *E* vérifiant les trois conditions suivantes pour tout entier $k\,(0\le k\le 3)$:

(1) $d°P_k = k$

(2) Le coefficient du terme de plus haut degré de P_k est égal à 1.

(3) $\forall i,(0\le i\le k)\Rightarrow \varphi(P_i,P_k)=0$.

Indication : on pourra déterminer explicitement et dans l'ordre P_0, P_1, P_2 et P_3.

B.3.b. Montrer que $\{P_0,P_1,P_2,P_3\}$ est une base de *E*. En déduire que tout élément *P* de *E* s'écrit de manière unique sous la forme : $P=\sum_{k=0}^{3}\lambda_k P_k$, où $(\lambda_k)_{0\le k\le 3}$ est une famille de réels.

B.3.c. *Application numérique* : déterminer explicitement λ_0, λ_1, λ_2 et λ_3 pour $P=X^3+X^2$.

B.4. On désigne par *F* le sous-espace vectoriel de *E* engendré par $\{1,X\}$ et on note :

$$G=\{R\in E,\forall Q\in F,\varphi(R,Q)=0\}.$$

B.4.a. Montrer que $\{P_0,P_1\}$ est une base de *F* et que *G* est un sous-espace vectoriel de *E*.

B.4.b. Vérifier que *R*, élément de *E*, est un élément de *G* si et seulement si on a :

$$\varphi(R,P_0)=0 \text{ et } \varphi(R,P_1)=0$$

En déduire que $\{P_2,P_3\}$ est une base de *G*.

B.4.c. À l'aide des questions précédentes, établir que tout élément *P* de *E* s'écrit de manière unique : $P=P_F+P_G$ où P_F est dans *F* et P_G est dans *G*. Vérifier que, pour tout élément *R* de *F*, on a la relation :

$$\varphi(P_G,P_G)\le \varphi(P-R,P-R)$$

B.5. *Application numérique :*

En utilisant les résultats précédents, déterminer les valeurs de a_0 et b_0 pour lesquelles on a :

$$\forall (a,b)\in R^2,\int_0^1 \left(t^3+t^2-a_0t-b_0\right)^2 dt\le \int_0^1\left(t^3+t^2-at-b\right)^2 dt.$$

PROBLÈME II.

Dans tout le problème on admettra que si $(a_n)_{n\ge 0}$ est une suite réelle positive et bornée, alors on définit une application *G* qui est C^∞ sur $]-1;1[$ en posant :

$$G(x)=\sum_{n\ge 0}a_n x^a.$$

De plus, pour tout entier *k* naturel non nul, on désignera par $G^{(k)}$ la fonction dérivée d'ordre *k* de *G* et on aura, pour tout $x\in\,]-1;1[$, l'égalité :

$$G^{(k)}(x)=\sum_{n\ge k} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

On considère une expérience aléatoire qui est une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, *A* un événement lié à chacune des épreuves et dont la probabilité de réalisation est α. Pour $n\ge 0$, soit E_n l'événement « *A* n'est pas réalisé deux fois successivement lors des *n* premières épreuves » et appelons p_n sa probabilité de réalisation.

1.a. On pose $p_0 = 1$ et $p_1 = 1$. Justifier brièvement ce choix.

1.b. Calculer p_2 et p_3.

1.c. Soit B l'événement « A ne s'est pas réalisé lors de la première épreuve ». Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\mathrm{P}\left[E_n \middle| B\right] = p_{n-1}$. Déterminer l'événement $E_n \cap B^c$. En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$p_n = (1-\alpha)\, p_{n-1} + \alpha(1-\alpha)\, p_{n-2}$$

2. Pour tout $x \in \left]-1;1\right[$ et $n \geq 0$, on pose $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ et $F(x) = \sum_{k \geq 0} p_k x^k$.

2.a. En utilisant la relation existant entre p_n, p_{n-1} et p_{n-2}, montrer que pour $x \in \left]-1;1\right[$ et $n \geq 2$, $F_n(x)$, $F_{n-1}(x)$ et $F_{n-2}(x)$ vérifient une relation que l'on déterminera.

2.b. En déduire que pour tout $x \in \left]-1;1\right[$, $F(x) = \dfrac{1+\alpha x}{1-(1-\alpha)x - \alpha(1-\alpha)x^2}$.

3. Dans toute la suite du problème, on suppose que $\alpha = 2/3$

3.a. Donner la décomposition en éléments simples de F.

3.b. Donner le développement limité à l'ordre n et au voisinage de 0 de F.

3.c. En utilisant la relation existant entre p_n et $F^{(n)}$, déduire la valeur de p_n, pour tout n entier naturel.

4. Soit X la variable aléatoire égale à n si et seulement si l'événement A est réalisé deux fois consécutivement pour la première fois lors des $(n-1)^{ième}$ et $n^{ième}$ épreuves.

4.a. Calculer $\mathrm{P}[X = 2]$ et $\mathrm{P}[X = 3]$.

4.b. Exprimer la probabilité de l'événement $[X = n]$ en fonction de p_n lorsque : $n \geq 3$.

4.c. Calculer l'espérance de X.