CORRIGE DU CONCOURS INA/ENSA B 1999

PROBLEME I

Ce problème a pour objet l'étude des espaces vectoriels euclidiens, c'est-à-dire des espaces vectoriels réels munis d'une forme bilinéaire symétrique que l'on nomme **produit scalaire** (φ). On applique les résultats généraux obtenus à la partie A à l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3 (partie B).

PARTIE A

A.1. Fixons $x \in E$. Prenons ensuite $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y, z \in E$.

- Nous avons d'une part :

$$\begin{aligned}\varphi_x(\lambda z) &= \varphi(x, \lambda z)\\ &= \varphi(\lambda z, x) \text{ par (ii)}\\ &= \lambda \varphi(z, x) \text{ par (i)}\\ &= \lambda \varphi(x, z) \text{ par (ii)}\\ &= \lambda \varphi_x(z)\end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}\varphi_x(y+z) &= \varphi(x, y+z)\\ &= \varphi(y+z, x) \text{ par (ii)}\\ &= \varphi(y, x) + \varphi(z, x) \text{ par (i)}\\ &= \varphi_x(y) + \varphi_x(z)\end{aligned}$$

Ainsi, φ_x est bien une application linéaire.

A.2. Cette vérification est immédiate (c'est une question de cours). En effet, en notant $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, on obtient que $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j)$ en utilisant les relations (i) et (ii) données dans l'énoncé. Ainsi, nous avons $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij}$ et donc :

$$\boxed{\varphi(x,y) = {}^tXAY} \text{ en notant } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}.$$

A.3.*a*. L'inégalité que nous allons démontrer est connue sous le nom d'inégalité de *Cauchy-Schwarz*.

Fixons x et y dans E et considérons le polynôme réel $P(\lambda) = \varphi(x+\lambda y, x+\lambda y)$, comme suggéré par l'énoncé. D'après la relation (iii) de l'énoncé, nous avons $P(\lambda) \geq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. D'autre part, les relations (i) et (ii) nous permettent d'obtenir que :

$$P(\lambda) = \varphi(y,y)\lambda^2 + 2\lambda\varphi(x,y) + \varphi(x,x)$$

Ainsi, on dispose d'un trinôme du second degré en λ qui est de signe constant. Cela veut dire que son discriminant est nécessairement négatif ou nul. On obtient ainsi que :

$$4\varphi(x,y)^2 - 4\varphi(y,y)\varphi(x,x) \leq 0$$
$$\varphi(x,y)^2 \leq \varphi(y,y)\varphi(x,x)$$

$$\text{et donc } \boxed{|\varphi(x,y)| \leq \varphi(y,y)^{\frac{1}{2}}\varphi(x,x)^{\frac{1}{2}}}$$

A.3.*b*. Prenons $x, y \in E$. On a $\varphi(x+y,x+y) = \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y)$ et, d'après la question précédente, il vient :

$$\varphi(x+y,x+y) \leq \varphi(x,x) + 2\varphi(x,x)^{\frac{1}{2}}\varphi(y,y)^{\frac{1}{2}} + \varphi(y,y)$$

$$\text{c'est-à-dire } \varphi(x+y,x+y) \leq \left(\varphi(x,x)^{\frac{1}{2}} + \varphi(y,y)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Comme, de plus, $\varphi(x+y,x+y) \geq 0$, on obtient bien l'inégalité désirée en prenant les racines carrées des deux membres de l'inégalité précédente.

PARTIE B

B.1. Prenons donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q, R \in E$.

(i) On a $\varphi(\lambda P+Q,R)=\lambda\varphi(P,R)+\varphi(Q,R)$ par linéarité de l'intégrale.

(ii) Ce point est immédiat à vérifier par commutativité dans E.

(iii) On a $\varphi(P,P)=\int_0^1 P^2(t)dt \geq 0$ car on intègre une fonction positive (croissance de l'intégrale). De plus, si P est non nul, alors P^2 est continue et strictement positive donc on obtient bien que $\varphi(P,P)>0$.

$\boxed{\textbf{B.2.}}$ Des calculs immédiats nous donnent que :

$$\varphi(1,1)=1 \qquad \varphi(1,X)=\frac{1}{2} \qquad \varphi(1,X^2)=\frac{1}{3} \qquad \varphi(1,X^3)=\frac{1}{4}$$

$$\varphi(X,X)=\frac{1}{3} \qquad \varphi(X,X^2)=\frac{1}{4} \qquad \varphi(X,X^3)=\frac{1}{5}$$

$$\varphi(X^2,X^2)=\frac{1}{5} \qquad \varphi(X^2,X^3)=\frac{1}{6}$$

$$\varphi(X^3,X^3)=\frac{1}{7}$$

Comme $\mathbf{A}$ est symétrique, on en déduit que $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{B.3.}\textit{a.}}$ Nous allons suivre l'indication proposée dans l'énoncé en déterminant effectivement cette unique famille de polynômes.

- **Calcul de** P_0 : comme P_0 est de degré 0 et a pour coefficient du terme de plus haut degré 1, on a immédiatement que $\boxed{P_0=1}$.
- **Calcul de** P_1 : les conditions (1) et (2) nous donnent que $P_1=X+b$. D'autre part, le fait que $\varphi(P_0,P_1)=0$ nous donne que $b=-\frac{1}{2}$ donc $\boxed{P_1(X)=X-\frac{1}{2}}$.

- **Calcul de** P_2 : d'après les conditions (1) et (2) nous avons $P_2(X) = X^2 + aX + b$.

  Comme $\varphi(P_0, P_2) = 0$ et $\varphi(P_1, P_2) = 0$, il vient $\boxed{P_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}}$.

- **Calcul de** P_3 : là encore nous avons $\boxed{P_3(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{5}X - \frac{1}{20}}$ en utilisant $\varphi(P_0, P_3) = \varphi(P_1, P_3) = \varphi(P_2, P_3) = 0$.

Enfin, cette famille est bien unique car, P_0 étant déterminé de manière unique, il s'ensuit la même chose pour les autres polynômes.

B.3.*b*. Comme E est de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que la famille $\{P_{0,}P_{1,}P_{2,}P_{3,}\}$ est une famille libre. Or ceci est immédiat car chacun de ces polynômes est de degré différent.

Remarque :

On peut également regarder le déterminant de la matrice de cette famille dans la base B, déterminant qui est égal à 1 car cette matrice est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

La fin de la question est une propriété vue en cours sur les bases d'un espace vectoriel.

B.3.*c*. On a $P(X) = X^3 + X^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base B. La matrice de passage de la base B à la base $\{P_{0,}P_{1,}P_{2,}P_{3,}\}$ est la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{20} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de P dans la base $\{P_{0,}P_{1,}P_{2,}P_{3,}\}$ sont donc :

$$\mathbf{M}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\\0&1&1&\frac{9}{10}\\0&0&1&\frac{3}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{12}\\\frac{19}{10}\\\frac{5}{2}\\1\end{pmatrix}$$

Ainsi, on peut en déduire que :

$$\boxed{P=\frac{7}{12}P_0+\frac{19}{10}P_1+\frac{5}{2}P_2+P_3}$$

$\boxed{\textbf{B.4.}a.}$ On a $F=<1,X>$ donc $\dim_{\mathbb{R}} F=2$. Comme P_0 et P_1 sont dans F et comme $\{P_0,P_1\}$ est une famille libre (à cause des degrés), on a bien que $\{P_0,P_1\}$ est une base de F.

D'autre part, prenons $R_1,R_2\in G$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Pour $Q\in F$, nous avons :

$$\varphi(\lambda R_1+R_2,Q)=\lambda\varphi(R_1,Q)+\varphi(R_2,Q)=0$$

Donc G est bien un sous-espace vectoriel de E.

<u>Remarque</u> :

Ce sous-espace vectoriel G de E est appelé **l'orthogonal** de F selon φ.

$\boxed{\textbf{B.4.}b.}$ Soit $R\in E$.

- Si $R\in G$, alors il est clair que $\varphi(R,P_0)=\varphi(R,P_1)=0$ car $P_0,P_1\in F$.
- Supposons maintenant $\varphi(R,P_0)=\varphi(R,P_1)=0$. Soit $Q=\lambda_0P_0+\lambda_1P_1\in F$. On a alors $\varphi(R,Q)=\lambda_0\varphi(R,P_0)+\lambda_1\varphi(R,P_1)=0$ et ainsi $R\in G$.

Cette équivalence démontrée nous donne que $\{P_2,P_3\}$ est une <u>famille libre</u> (à cause des degrés) de G. D'autre part, cette <u>famille est génératrice</u> : en effet prenons $R=\sum_{i=0}^{3}\lambda_iP_i\in G$; nous avons $\lambda_0=\varphi(R,P_0)=0$ et $\lambda_1\varphi(P_1,P_1)=\varphi(R,P_1)=0$ donc $\lambda_1=0$. Ainsi, nous avons en fait $R=\lambda_2P_2+\lambda_3P_3$.

Finalement, nous pouvons bien conclure que $\{P_2,P_3\}$ est une <u>base</u> de G.

B.4.*c*. Soit $P \in E$.

- **Existence de l'écriture** : comme $\{P_{0,}P_{1,}P_{2,}P_{3,}\}$ est une base de E, on peut écrire que

$P = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i P_i$. Ainsi on a $P = P_F + P_G$ en posant $P_F = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 \in F$ et $P_G = \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \in G$.

- **Unicité de l'écriture** :

On a tout d'abord besoin de montrer que $F \cap G = \{0\}$. En effet, prenons $R = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i P_i \in F \cap G$. Comme $\varphi(R, P_i) = 0$ pour $i = 0,1,2,3$, on en déduit par linéarité que $\varphi(R, R) = 0$ et donc $R = 0$ car φ vérifie la propriété (iii). La réciproque étant évidente, il s'ensuit que l'on a bien $F \cap G = \{0\}$.

Montrons maintenant l'unicité de l'écriture. Pour cela on considère que l'on a deux écritures $P = P_F^1 + P_G^1 = P_F^2 + P_G^2$ avec $P_F^1, P_F^2 \in F$ et $P_G^1, P_G^2 \in G$. On en déduit alors que $P_F^1 - P_F^2 = P_G^2 - P_G^1 \in F \cap G$ car $F \cap G$ est un espace vectoriel. D'où l'on déduit de ce qui précède que $P_F^1 - P_F^2 = P_G^2 - P_G^1 = 0$ et donc que $P_F^1 = P_F^2$ et $P_G^1 = P_G^2$.

L'unicité de l'écriture est ainsi démontrée.

- Montrons enfin l'inégalité désirée.

Soient $P \in E$ et $R \in F$. Nous avons les égalités et inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi(P-R, P-R) &= \varphi(P_F + P_G - R, P_F + P_G - R) \\
&= \underbrace{\varphi(P_F - R, P_F - R)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{car } \varphi \text{ vérifie (iii)}}} + 2\underbrace{\varphi(P_F - R, P_G)}_{\substack{=0 \\ \text{car } P_F - R \in F \text{ et } P_G \in G}} + \varphi(P_G, P_G)
\end{aligned}$$

$$\varphi(P-R, P-R) \geq \varphi(P_G, P_G)$$

B.5. Reprenons $P = X^3 + X^2$ de la question **B.3.*c*.** Rechercher a_0 et b_0 revient à déterminer le polynôme P_F dans l'écriture $P = P_F + P_G$ d'après la question précédente. Or, nous savons d'après la question **B.3.*c*.** que $P = \frac{7}{12}P_0 + \frac{19}{10}P_1 + \frac{5}{2}P_2 + P_3$ et donc que $P_F = \frac{7}{12}P_0 + \frac{19}{10}P_1$ et $P_G = \frac{5}{2}P_2 + P_3$. C'est-à-dire que l'on a $P_F = \frac{19}{10}X - \frac{11}{30}$. Ainsi nous pouvons conclure que : $\boxed{a_0 = \frac{19}{10} \text{ et } b_0 = -\frac{11}{30}}$.

PROBLEME II

Ce problème a pour objet l'étude d'une suite d'épreuves de Bernoulli satisfaisant à certaines contraintes. Pour cela, on est amené à utiliser des résultats concernant les suites récurrentes, les séries entières et les fractions rationnelles.

1.*a*. Si l'on réalise moins de deux épreuves, alors il est certain que l'événement A ne s'est pas réalisé deux fois de suite. Il est donc certain que les événements E_0 et E_1 sont réalisés. C'est pourquoi on pose $p_0 = p_1 = 1$.

1.*b*.

- **Calcul de** p_2 : l'événement A s'est réalisé deux fois de suite lors des deux premières épreuves s'il s'est réalisé dans chacune des deux épreuves (indépendantes) et donc avec une probabilité de α^2. Ainsi, nous avons : $\boxed{p_2 = 1-\alpha^2}$.
- **Calcul de** p_3 : la probabilité que A soit réalisé lors des deux premières épreuves est α^2 et la probabilité que A soit réalisé à la seconde et à la troisième épreuve mais pas à la première est $(1-\alpha)\alpha^2$. Ainsi, nous pouvons en déduire que :

$$\boxed{p_3 = 1-\left(\alpha^2 + (1-\alpha)\alpha^2\right) = 1-\alpha^2(2-\alpha)}$$

1.*c*.

- L'événement E_n / B signifie que l'événement A ne s'est pas réalisé deux fois de suite de la seconde épreuve jusqu'à la n ième épreuve, soit en tout qu'il ne s'est pas réalisé lors de $n-1$ épreuves. Comme ces épreuves sont indépendantes deux à deux, on peut en déduire que $\boxed{P(E_n/B) = P(E_{n-1}) = p_{n-1}}$.
- L'événement E_n/B^c signifie que l'événement A s'est réalisé lors de la première épreuve, que l'événement A ne s'est pas réalisé lors de la seconde épreuve et que l'événement A ne s'est pas réalisé deux fois de suite de la troisième épreuve jusqu'à la n ième épreuve. On peut alors en déduire immédiatement que :

$$P\left(E_n/B^c\right) = \alpha(1-\alpha)\, p_{n-2}.$$

- En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{aligned} P(E_n) &= P(E_n \cap B) + P\left(E_n \cap B^c\right) \\ &= P(B)P(E_n/B) + P\left(E_n \cap B^c\right) \end{aligned}$$

Donc il s'ensuit que $\boxed{p_n = (1-\alpha)\,p_{n-1} + \alpha(1-\alpha)\,p_{n-2}}$.

$\boxed{\textbf{2.}\boldsymbol{a}\textbf{.}}$ Soient $x \in \left]-1,1\right[$ et $n \geq 2$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} p_k x^k \\ &= p_0 + p_1 x + \sum_{k=2}^{n} p_k x^k \\ &= 1 + x + \sum_{k=2}^{n}\left[(1-\alpha)\,p_{k-1} + \alpha(\alpha-1)\,p_{k-2}\right]x^k \\ &= 1 + x + (1-\alpha)\sum_{k=2}^{n} p_{k-1}x^k + \alpha(\alpha-1)\sum_{k=2}^{n} p_{k-2}x^k \\ &= 1 + x + (1-\alpha)\,x\sum_{k=2}^{n} p_{k-1}x^{k-1} + \alpha(\alpha-1)\,x^2\sum_{k=2}^{n} p_{k-2}x^{k-2} \end{aligned}$$

Donc, en changeant les indices, on obtient :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= 1 + x + (1-\alpha)\,x\sum_{k=1}^{n-1} p_k x^k + \alpha(\alpha-1)\,x^2\sum_{k=0}^{n-2} p_k x^k \\ &= 1 + x + (1-\alpha)\,x\left(F_{n-1}(x) - 1\right) + \alpha(\alpha-1)\,x^2 F_{n-2}(x) \end{aligned}$$

On trouve finalement que

$$\boxed{F_n(x) = 1 + \alpha x + (1-\alpha)\,xF_{n-1}(x) + \alpha(1-\alpha)\,x^2 F_{n-2}(x)}$$

$\boxed{\textbf{2.}\boldsymbol{b}\textbf{.}}$

On fait tendre n vers $+\infty$ (F_n converge vers F) dans la relation précédente pour obtenir :

$$F(x) = 1 + \alpha x + (1-\alpha)\,xF(x) + \alpha(1-\alpha)\,x^2 F(x)$$

De cette relation, on déduit alors que

$$\boxed{F(x) = \frac{1+\alpha x}{1-(1-\alpha)\,x - \alpha(1-\alpha)\,x^2}}$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ On prend maintenant $\alpha = \frac{2}{3}$.

$\boxed{\textbf{3.}a\textbf{.}}$ On a ainsi

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1+\frac{2}{3}x}{1-\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}x^2} \\ &= \frac{9+6x}{9-3x-2x^2} \\ &= \frac{6x+9}{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+3)} \end{aligned}$$

F est donc une fraction rationnelle avec deux pôles simples.

On en déduit immédiatement que

$$\boxed{F(x) = \frac{4}{3-2x} - \frac{1}{x+3}}$$

$\boxed{\textbf{3.}b\textbf{.}}$ On utilise le développement limité $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$ valable au voisinage de 0.

En effet, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{4}{3-2x} - \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{1-\frac{2}{3}x} - \frac{1}{1+\frac{x}{3}}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(4\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}x\right)^k - \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{x}{3}\right)^k\right) + o(x^n) \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$\boxed{F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+2}-(-1)^k}{3^{k+1}} x^k + o(x^n)}$$

Il s’agit du développement limité de $F(x)$ au voisinage de 0.

3.*c*. Un résultat classique du cours sur les séries entières nous permet de dire que $p_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$. D'après la question précédente, on a $F^{(n)}(0) = n!\frac{2^{n+2} - (-1)^n}{3^{n+1}}$ et ainsi on obtient

$$\boxed{p_n = \frac{2^{n+2} - (-1)^n}{3^{n+1}}}$$

4. Rappelons que l'on a toujours $\alpha = \frac{2}{3}$.

4.*a*.

- Dire que $X = 2$ signifie que l'événement A est réalisé deux fois consécutivement pour la première fois lors des deux premières épreuves donc

$$\boxed{P(X = 2) = \alpha^2 = \frac{4}{9}}$$

- Dire que $X = 3$ signifie que l'événement A est réalisé deux fois consécutivement pour la première lors de la seconde et de la troisième épreuve (et donc que A ne s'est pas réalisé lors de la première épreuve). Ainsi, nous avons

$$\boxed{P(X = 3) = (1-\alpha)\alpha^2 = \frac{4}{27}}$$

4.*b*. Dire que $X = n$ signifie que :

- l'événement A ne s'est pas réalisé deux fois consécutivement lors des $n-3$ premières épreuves.
- l'événement A ne s'est pas réalisé lors de l'épreuve $n-2$.
- l'événement A s'est réalisé aux étapes $n-1$ et n.

Par indépendance de ces événements, nous pouvons alors en déduire que :

$$P(X = n) = p_{n-3}(1-\alpha)\alpha^2$$

Mais d'autre part, nous avons $p_n = (1-\alpha)\, p_{n-1} + \alpha(1-\alpha)\, p_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$, ce qui nous permet de déduire, après quelques calculs, que $p_{n-3}(1-\alpha)\alpha^2 = p_{n-1} - p_n$ et ainsi nous trouvons que :

$$\boxed{P(X=n) = p_{n-1} - p_n}.$$

4.*c.* On a, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=2}^{+\infty} nP(X=n) \\ &= P(X=2) + \sum_{n=3}^{+\infty} nP(X=n) \\ &= \frac{8}{9} + \sum_{n=3}^{+\infty} n(p_{n-1} - p_n) \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{+\infty} n(p_{n-1} - p_n) &= \sum_{n=3}^{+\infty} np_{n-1} - \sum_{n=3}^{+\infty} np_n \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)\, p_{n-1} + \sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-1} - \sum_{n=3}^{+\infty} np_n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} np_n + \sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-1} - \sum_{n=3}^{+\infty} np_n \\ &= 2p_2 + \sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{8}{9} + 2\left(1 - \frac{4}{9}\right) + \sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-1} \\ &= 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} p_n \end{aligned}$$

Mais la série du second membre peut se déterminer en utilisant l'expression de p_n trouvée à la question **3.***c.*

En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} p_n &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n+2} - (-1)^n}{3^{n+1}} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

$$= 2\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}$$
$$= 2\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n}$$

On reconnaît alors deux séries géométriques convergentes, ce qui nous donne :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} p_n = 2\times\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 - \frac{2}{3} - \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) = \frac{7}{4}$$

Nous pouvons enfin en déduire que $\boxed{E(X) = \frac{15}{4}}$.

FIN