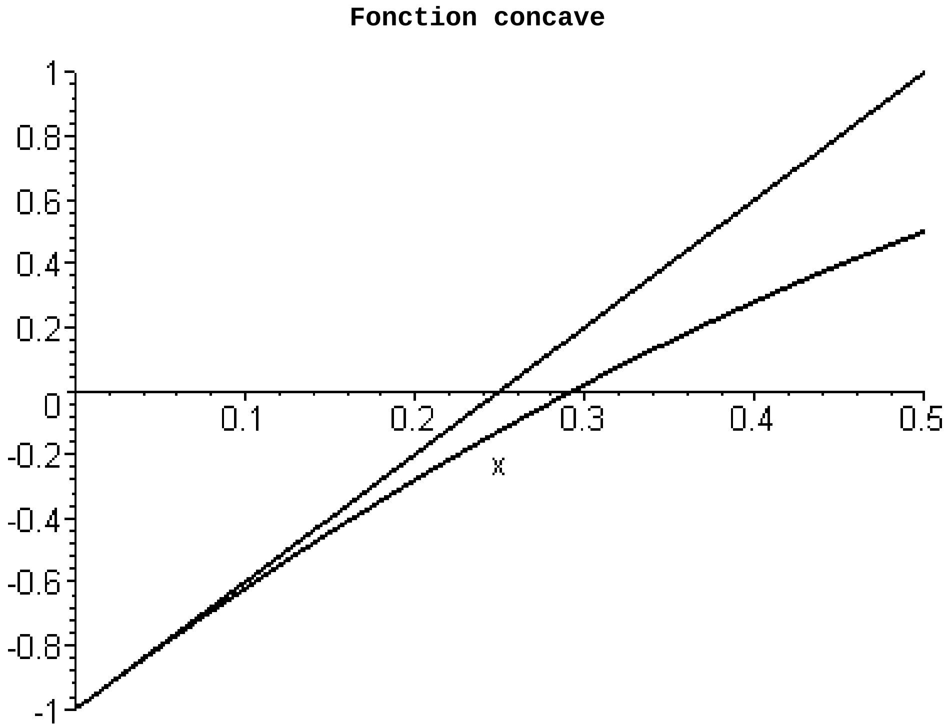
Concours B INA ENSA
Session 2000

PROBLÈME I : ***Une méthode d'approximation de la racine d'une équation.***

Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et f une application de classe C^2 sur $[a,b]$, vérifiant $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) < 0$.
On remarque que la situation générale est illustrée par la figure suivante :



On remarquera également que pour tout $x \in [a,b]$, la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(x, f(x))$ est située au-dessus de la courbe représentative de f.

1. Montrer qu'il existe un seul $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

2. Soit x un élément de $[a,b]$.

2.a. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(x, f(x))$.

2.b. Montrer que cette droite coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(X,0)$ avec $X = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

3. Pour tout x élément de $[a,b]$ on pose :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

3.a. Vérifier que α est l'unique solution sur $[a,b]$ de l'équation : $g(x) = x$.

3.b. Montrer que tout élément de $[a,\alpha[$ a une image par g dans $[a,\alpha[$.

3.c. Montrer que g est de classe C^1 sur $[a,b]$; déterminer le signe de $g'(x)$ pour x élément de $[a,\alpha[$. Calculer $g'(\alpha)$.

4. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite récurrente définie par : $x_0 \in [a,\alpha[$ et pour tout n, $n \geq 0$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

4.a. Montrer que l'on définit ainsi une suite d'éléments de $[a,\alpha[$.

4.b. Montrer que cette suite est monotone et convergente. Donner sa limite.

5. Dans cette question, n est un entier naturel fixé et x désigne un élément de $[a,\alpha[$. On considère la fonction u définie sur $[x,\alpha]$ par la formule :

$$u(t) = f(t) - f(x) - (t-x) f'(x) - (t-x)^2 \frac{A}{2}$$

où A est l'unique réel tel que : $u(\alpha) = 0$.

5.a. En appliquant deux fois le théorème de Rolle à la fonction u sur $[x,\alpha]$; justifier l'existence d'un élément c_x de $]x,\alpha[$ tel que l'on ait :

$$f(x) + (\alpha - x) f'(x) = -\frac{(\alpha - x)^2}{2} f''(c_x).$$

5.b. On pose : $h_n = \alpha - x_n$. En utilisant la question précédente, justifier l'existence d'un réel θ_n, élément de $]0,1[$, tel que :

$$h_{n+1} = -\frac{h_n^2 f''(x_n + \theta_n h_n)}{f'(x_n)}.$$

5.c. En déduire qu'il existe une constante c strictement positive, indépendante de n, telle que :

$$|h_{n+1}| \leq \frac{c}{2} h_n^2$$

et montrer l'inégalité :

$$|h_{n+1}| \leq (b-a)^{2^{n+1}} \left(\frac{c}{2}\right)^{2^{n+1}-1}$$

6. *Application numérique* : on reprend les notations des questions précédentes avec $a = 0$, $b = \dfrac{1}{2}$, et $f(x) = 4x - 1 - 2x^2$. Vérifier que l'on peut bien appliquer les résultats des questions 1 à 4 ; déterminer c et le plus petit entier naturel N pour lequel la majoration du **5.c.** assure que x_N est une valeur approchée de $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ à 10^{-100} près.

PROBLÈME II : ***Un problème de gestion de stock***

Le gérant d'un kiosque à journaux vend, entre autres, le quotidien "Bidule". Chaque jour, le nombre de clients souhaitant acheter "Bidule" est représenté par une variable aléatoire X prenant des valeurs entières k vérifiant : $0 \le k \le N$, où N est un élément de $\mathbb{N}$ supposé supérieur ou égal à 2. Chaque exemplaire de "Bidule" vendu rapporte un bénéfice a ($a>0$), chaque invendu représente une perte $-b$ ($b \ge 0$) ; de plus, le coût associé à chaque client potentiel qui ne peut être servi est estimé à $-c$ ($c \ge 0$).
Enfin, pour tout entier naturel r, on note G_r la variable aléatoire égale au gain du gérant au cours d'une journée où il s'est procuré chez le grossiste r exemplaires de "Bidule", le calcul n'étant effectué que sur ce seul titre.

1. Dans cette question on suppose : $a=1$; $b=0.2$; $c=0$; $N=3$. On donne de plus : $\mathrm{P}[X=0]=1/8$; $\mathrm{P}[X=1]=1/2$; $\mathrm{P}[X=2]=1/4$; $\mathrm{P}[X=3]=1/8$.

1.a. Calculer les espérances des variables G_r, lorsque r varie entre 0 et 3.

1.b. Exprimer $E[G_r]$ en fonction de r, b et $E[G_3]$ pour tout r supérieur ou égal à 3 et justifier dans ce cas l'inégalité : $E[G_r] \le E[G_3]$.

1.c. En déduire la valeur de r rendant $E[G_r]$ maximal.

2. On revient au cas général.

2.a. Déterminer $E[G_r]$ lorsque r est supérieur ou égal à N. Vérifier que dans ce cas on a toujours : $E[G_r] \le E[G_N]$.

2.b. Justifier, lorsque r est inférieur à N, l'égalité :

$$E[G_r] = -r(a+b+c)\sum_{k=0}^{r}\mathrm{P}[X=k] + (a+b+c)\sum_{k=0}^{r}k\mathrm{P}[X=k] + r(a+c) - cE[X]$$

3. On suppose désormais que X suit la loi uniforme et on a donc pour tout k vérifiant $0 \le k \le N$:

$$\mathrm{P}[X=k] = \frac{1}{N+1}$$

Expliciter $E[G_r]$ en fonction de a, b, c et r.

4. On considère l'application ϕ qui à tout x réel associe :

$$\phi(x) = -\frac{x(x+1)}{N+1}\frac{a+b+c}{2} + x(a+c) - c\frac{N}{2}$$

4.a. Montrer que ϕ admet un maximum en une valeur x_0, réelle, que l'on calculera en fonction de a, b, c et de N.

4.b. Montrer que x_0 est strictement positif si et seulement si :

$$\frac{a+c}{a+b+c} > \frac{1}{2(N+1)}$$

On supposera désormais cette condition vérifiée.

4.c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que x_0 soit inférieur ou égal à *N*.

5. On note désormais r_0 une valeur de *r* rendant $E[G_r]$ maximal.

5.a. Justifier l'existence de r_0.

5.b. *Application numérique n°1* : déterminer r_0 lorsque $N=100$, $a=5$, $b=2$ et $c=3$.

5.c. *Application numérique n°2* : déterminer r_0 lorsque $N=100$, $a=2$, $b=4$ et $c=1$.