CORRIGE DU CONCOURS BANQUE AGRO B ET BE 2000

PROBLEME I : Une méthode d'approximation de la racine d'une équation.

Le but de ce problème est la mise en œuvre de la méthode de Newton pour la résolution approchée d'une équation (non linéaire). L'application numérique de la dernière question nous montre notamment toute l'efficacité de cette méthode (la convergence est quadratique, comme on l'obtient à la question **I.5.*c.***).

I.1. On sait que $a<b$, que la fonction *f* est de classe C^2 sur $[a,b]$ et que $f(a)<0<f(b)$.

f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists\alpha\in\,]a,b[$ tel que $f(\alpha)=0$.

f étant par ailleurs strictement monotone sur $[a,b]$ ($\forall x\in[a,b]\quad f'(x)>0$), le réel α est unique.

I.2.*a.* Cette tangente a pour coefficient directeur $f'(x)$ et elle passe par le point de coordonnées $(x,f(x))$. Son équation réduite est donc $Y=f(x)+f'(x)(X-x)$.

I.2.*b.* $Y=0\Leftrightarrow f(x)+f'(x)(X-x)=0\Leftrightarrow X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

I.3. Soit $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

I.3.*a.* $g(x)=x\Leftrightarrow x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}=x\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{f'(x)}=0\Leftrightarrow f(x)=0$. $\alpha\in\,]a,b[$ est donc bien l'unique solution de l'équation $g(x)=x$.

I.3.*b.*

- On peut d'abord remarquer que *g* est strictement croissante sur $[a,\alpha[$. En effet, *g* étant dérivable sur l'intervalle $[a,\alpha[$, nous avons :

$$g'(x)=1-\frac{\left[f'(x)\right]^2-f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$$

Sur $[a,\alpha[$, $f(x)<0$ et $f''(x)<0$. Donc $g'(x)>0$ sur $[a,\alpha[$.

- Soit maintenant $x\in[a,\alpha[$. Alors $g(a)\leq g(x)<g(\alpha)$, car g est strictement croissante sur $[a,\alpha[$.

  On sait que $g(\alpha)=\alpha$ (question $\boxed{\textbf{I.3.}a.}$), donc $g(a)\leq g(x)<\alpha$.

  D'autre part $g(a)=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}>a$ car $f(a)<0$ et $f'(a)>0$, donc $\dfrac{f(a)}{f'(a)}<1$.

  Ainsi, si $x\in[a,\alpha[$, alors $a\leq g(x)<\alpha$: $x\in[a,\alpha[\Rightarrow g(x)\in[a,\alpha[$.

$\boxed{\textbf{I.3.}c.}$

- Nous venons de voir que $g'(x)=\dfrac{f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$. f étant de classe C^2 sur $[a,b]$, il en découle immédiatement que g' est continue sur $[a,b]$ et donc que g est de classe C^1 sur $[a,b]$.
- D'autre part, $g'(x)$ est du signe de $f(x)f''(x)$, d'où $g'(x)>0$ sur $[a,\alpha[$.
- Enfin, $g'(\alpha)=0$ car $f(\alpha)=0$.

$\boxed{\textbf{I.4.}}$ Soit $x_0\in[a,\alpha[$ et $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}=g(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{I.4.}a.}$ On raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

- Par hypothèse $x_0\in[a,\alpha[$
- Supposons maintenant que $x_n\in[a,\alpha[$ (hypothèse de récurrence).

  Alors $g(x_n)\in[a,\alpha[$ d'après la question $\boxed{\textbf{I.3.}b.}$ et donc $x_{n+1}=g(x_n)\in[a,\alpha[$.
- On a donc bien le résultat souhaité.

$\boxed{\textbf{I.4.}b.}$ Soit $n\in\mathbb{N}$. Nous avons $x_n\in[a,\alpha[$ donc $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}<0$ et ainsi $x_n<x_{n+1}$. La suite récurrente définie par $x_{n+1}=g(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ est donc strictement croissante.

De plus, d'après $\boxed{\textbf{I.4.}a.}$, $x_n<\alpha$, $\forall n\in\mathbb{N}$, et donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée sur $[a,\alpha[$.

Par conséquent, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite $\ell\in[a,\alpha[$ vérifie $\ell=g(\ell)$.

D'après $\boxed{\textbf{I.3.}a.}$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=\alpha$.

$\boxed{\textbf{I.5.}a.}$

- La fonction u est continue sur $[x,\alpha]$ et dérivable sur $]x,\alpha[$. Par hypothèse, $u(\alpha)=0$ et on vérifie que $u(x)=0$. D'après le théorème de Rolle, $\exists c\in\,]x,\alpha[$ tel que $u'(c)=0$.
- Nous avons $u(t)=f(t)-f(x)-(t-x)f'(x)-(t-x)^2\dfrac{A}{2}$ et donc, nous pouvons en déduire que $u'(t)=f'(t)-f'(x)-(t-x)A$.

  La fonction u' est dérivable car f' est dérivable (f est de classe C^2). On sait que $u'(c)=0$ et on vérifie que $u'(x)=0$. Ainsi, en appliquant une deuxième fois le théorème de Rolle sur l'intervalle $]x,c[$, on peut dire $\exists c_x\in\,]x,c[\,\subset\,]x,\alpha[$ tel que $u''(c_x)=0$.
- Comme $u''(t)=f''(t)-A$, on en déduit que $u''(c_x)=0\Rightarrow A=f''(c_x)$.
- Enfin, le fait que $u(\alpha)=0$ et $f(\alpha)=0$ nous permet d'obtenir

$$-f(x)-(\alpha-x)f'(x)-(\alpha-x)^2\frac{f''(c_x)}{2}=0$$

C'est-à-dire :

$$f(x)+(\alpha-x)f'(x)=-\frac{(\alpha-x)^2}{2}f''(c_x)$$

$\boxed{\textbf{I.5.}b.}$ On pose $h_n = \alpha - x_n$.

$c_x \in]x,c[\Rightarrow c_x \in]x,\alpha[$. On peut donc écrire $c_x = x + \theta_x(\alpha - x)$ en prenant $0 < \theta_x < 1$.

D'après $\boxed{\textbf{I.5.}a.}$, si $x = x_n$, il vient :

$$f(x_n) + (\alpha - x_n) f'(x_n) = -\frac{(\alpha - x_n)^2}{2} f''(x_n + \theta_n(\alpha - x_n))$$
$$\Leftrightarrow f(x_n) + h_n f'(x_n) = -\frac{h_n^2}{2} f''(x_n + \theta_n h_n)$$

Or $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, donc :

$$h_{n+1} = \alpha - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = h_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ainsi :

$$f(x_n) + h_n f'(x_n) = -\frac{h_n^2}{2} f''(x_n + \theta_n h_n)$$
$$\Leftrightarrow h_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{h_n^2}{2}\frac{f''(x_n + \theta_n h_n)}{f'(x_n)} \quad (f'(x) > 0,\ \forall x \in [a,b])$$
$$\Leftrightarrow h_{n+1} = -\frac{h_n^2}{2}\frac{f''(x_n + \theta_n h_n)}{f'(x_n)}$$

$\boxed{\textbf{I.5.}c.}$

- Nous avons $h_{n+1} = -\dfrac{h_n^2}{2}\dfrac{f''(x_n + \theta_n h_n)}{f'(x_n)}$ donc $|h_{n+1}| = \dfrac{h_n^2}{2}\left|\dfrac{f''(x_n + \theta_n h_n)}{f'(x_n)}\right|$.

  f est de classe C^2 sur $[a,b]$, donc f'' est continue sur $[a,b]$, et f'' est bornée sur $[a,b]$ donc $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $|f''(x)| \le M$, $\forall x \in [a,b]$.

  Par ailleurs, $f''(x) < 0$, $\forall x \in [a,b]$. Donc f' est décroissante sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) \ge f'(b)$, soit $\dfrac{1}{f'(x)} \le \dfrac{1}{f'(b)}$ car $f'(x)$ et $f'(b)$ sont de même signe (positif). Ainsi :

$$\left|\frac{f''(x_n + \theta_n h_n)}{f'(x_n)}\right| \le \frac{M}{f'(b)} = C$$

D'où l'on tire :

$$|h_{n+1}| \leq \frac{C}{2} h_n^2$$

- Nous allons procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Nous avons clairement que $h_0 = \alpha - x_0 \leq b - a$. Supposons alors que $|h_n| \leq (b-a)^{2^n} \left(\frac{C}{2}\right)^{2^n - 1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

  L'inégalité précédente nous permet d'en déduire que :

$$\begin{aligned}
|h_{n+1}| &\leq \frac{C}{2} h_n^2 \\
&\leq \frac{C}{2}\left((b-a)^{2^n}\right)^2 \left(\left(\frac{C}{2}\right)^{2^n - 1}\right)^2 \\
&\leq \frac{C}{2}(b-a)^{2^{n+1}} \left(\frac{C}{2}\right)^{2^{n+1} - 2} \\
&\leq (b-a)^{2^{n+1}} \left(\frac{C}{2}\right)^{2^{n+1} - 1}
\end{aligned}$$

  Nous avons alors bien l'inégalité souhaitée.

$\boxed{\textbf{I.6.}}$ *Application numérique* : $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ et $f(x) = 4x - 1 - 2x^2$.

$$f(a) = f(0) = -1 < 0$$
$$f(b) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0$$

f est une fonction polynomiale donc *f* est de classe C^2 sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

$$f'(x) = 4(1-x) > 0 \quad \text{sur } \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$$
$$f''(x) = -4 < 0$$

Toutes les hypothèses de départ sont donc vérifiées. On peut alors appliquer les résultats des questions précédentes :

- $\left.\begin{array}{l} |f''(x)| = 4 \\ f'(b) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow C = 2$

- $f(x)=0 \Leftrightarrow 4x-1-2x^2=0$. $\Delta=8$, donc $f(x)=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. La valeur de α correspond à la racine contenue dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$: $\alpha=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Le plus petit entier naturel *N*, pour lequel la majoration de $\boxed{\textbf{I.5.}c.}$ assure que x_N est une valeur approchée de $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ à 10^{-100} près, doit vérifier : $|\alpha-x_N|\leq 10^{-100}$.

  Ainsi, il suffit de chercher *N* tel que :

$$
\begin{aligned}
&(b-a)^{2^N}\left(\frac{C}{2}\right)^{2^N-1}\leq 10^{-100}\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2^N}\left(\frac{2}{2}\right)^{2^N-1}\leq 10^{-100}\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2^N}\leq 10^{-100}\\
&\Leftrightarrow -2^N\ln 2\leq -100\ln 10\\
&\Leftrightarrow 2^N\geq 100\frac{\ln 10}{\ln 2}\\
&\Leftrightarrow N\ln 2\geq \ln\left(100\frac{\ln 10}{\ln 2}\right)\\
&\Leftrightarrow N\geq \frac{1}{\ln 2}\ln\left(100\frac{\ln 10}{\ln 2}\right)
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{\ln 2}\ln\left(100\frac{\ln 10}{\ln 2}\right)\simeq 8{,}376$. On obtient donc $\boxed{N=9}$.

PROBLEME II : Un problème de gestion de stock.

II.1.*a*.

- $\boxed{E(G_0)=0}$ car le gérant du kiosque à journaux ne s'est procuré aucun exemplaire du journal "Bidule" ($r=0$) et car le coût de la perte d'un client potentiel est nul ($c=0$).
- $G_1=\begin{cases}-b & si \quad X=0\\ a & si \quad X=1\\ a-c & si \quad X=2\\ a-2c & si \quad X=3\end{cases}$

$$
\begin{aligned}
E(G_1) &= -bP(X=0) + aP(X=1) + (a-c)P(X=2) + (a-2c)P(X=3) \\
&= -\frac{b}{8} + \frac{a}{2} + \frac{a-c}{4} + \frac{a-2c}{8} \\
&= \frac{7}{8}a - \frac{b}{8} - \frac{c}{2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E(G_1) = 0{,}85}$$

- $G_2 = \begin{cases} -2b & si \quad X=0 \\ a-b & si \quad X=1 \\ 2a & si \quad X=2 \\ 2a-c & si \quad X=3 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
E(G_2) &= -2bP(X=0) + (a-b)P(X=1) + 2aP(X=2) + (2a-c)P(X=3) \\
&= -\frac{2b}{8} + \frac{a-b}{2} + \frac{2a}{4} + \frac{2a-c}{8} \\
&= \frac{5}{4}a - \frac{3}{4}b - \frac{1}{8}c
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E(G_2) = 1{,}1}$$

- $G_3 = \begin{cases} -3b & si \quad X=0 \\ a-2b & si \quad X=1 \\ 2a-b & si \quad X=2 \\ 3a & si \quad X=3 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
E(G_3) &= -3bP(X=0) + (a-2b)P(X=1) + (2a-b)P(X=2) + 3aP(X=3) \\
&= -\frac{3b}{8} + \frac{a-2b}{2} + \frac{2a-b}{4} + \frac{3a}{8} \\
&= \frac{11}{8}a - \frac{13}{8}b
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E(G_3) = 1{,}05}$$

II.1.*b*.

En généralisant les résultats précédents, on obtient :

$$E(G_r) = -rbP(X=0) + \left[a-(r-1)b\right]P(X=1) + \left[2a-(r-2)b\right]P(X=2) + \left[3a-(r-3)b\right]P(X=3)$$

Puis, en développant, on obtient :

$$\begin{aligned}E(G_r) &= -rbP(X=0)-(r-1)bP(X=1)-(r-2)bP(X=2)-(r-3)bP(X=3)\\ &\quad +aP(X=1)+2aP(X=2)+3aP(X=3)\\ &= -rb\sum_{k=0}^{3}P(X=k)+b\left[P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)\right]\\ &\quad +aP(X=1)+2aP(X=2)+3aP(X=3)\end{aligned}$$

D'après $\boxed{\textbf{II.1.}a\textbf{.}}$, on a :

$$\begin{aligned}E(G_3) &= -3bP(X=0)+(a-2b)P(X=1)+(2a-b)P(X=2)+3aP(X=3)\\ &= -b\left[3P(X=0)+2P(X=1)+P(X=2)\right]+aP(X=1)+2aP(X=2)+3aP(X=3)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$aP(X=1)+2aP(X=2)+3aP(X=3)=E(G_3)+b\left[3P(X=0)+2P(X=1)+P(X=2)\right]$$

En remplaçant dans l'expression de $E(G_r)$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}E(G_r) &= -rb\sum_{k=0}^{3}P(X=k)+b\left[P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)\right]\\ &\quad +E(G_3)+b\left[3P(X=0)+2P(X=1)+P(X=2)\right]\\ &= -rb\sum_{k=0}^{3}P(X=k)+3b\sum_{k=0}^{3}P(X=k)+E(G_3)\end{aligned}$$

$$\boxed{E(G_r)=(3-r)b+E(G_3)} \qquad \text{car } \sum_{k=0}^{3}P(X=k)=1$$

On a immédiatement $E(G_r)\le E(G_3)$, la quantité $(3-r)b$ étant négative ($r\ge 3$).

$\boxed{\textbf{II.1.}c\textbf{.}}$ On a $E(G_r)\le E(G_3)$, $\forall r\ge 3$, donc, $\max\limits_{r\ge 0}E(G_r)=\max\limits_{0\le r\le 3}E(G_r)$.

D'après $\boxed{\textbf{II.1.}a\textbf{.}}$, la valeur maximale obtenue pour $E(G_r)$ est 1.1 et correspond à $\boxed{r=2}$.

$\boxed{\textbf{II.2.}a\textbf{.}}$ En généralisant le résultat de la question $\boxed{\textbf{II.1.}b\textbf{.}}$, on obtient :

$$\boxed{E(G_r)=(N-r)b+E(G_N)}$$

Il est alors immédiat que $E(G_r)\le E(G_N)$.

II.2.*b*. On prend $r \le N$.

$$G_r = \begin{cases} -rb & si \quad X = 0 \\ a-(r-1)b & si \quad X = 1 \\ 2a-(r-2)b & si \quad X = 2 \\ 3a-(r-3)b & si \quad X = 3 \\ \vdots & \\ ra & si \quad X = r \\ ra-(X-r)c & si \quad X > r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(G_r) &= a\sum_{k=0}^{r} kP(X=k) - b\sum_{k=0}^{r}(r-k)P(X=k) + \sum_{k=r+1}^{N}\left[ra-(k-r)c\right]P(X=k) \\ &= a\sum_{k=0}^{r} kP(X=k) - rb\sum_{k=0}^{r} P(X=k) + b\sum_{k=0}^{r} kP(X=k) \\ &\qquad + ra\sum_{k=r+1}^{N} P(X=k) - c\sum_{k=r+1}^{N} kP(X=k) + rc\sum_{k=r+1}^{N} P(X=k) \end{aligned}$$

On sait par ailleurs que $\sum_{k=0}^{N} P(X=k) = 1$, donc que $\sum_{k=r+1}^{N} P(X=k) = 1 - \sum_{k=0}^{r} P(X=k)$.

D'autre part, $E(X) = \sum_{k=0}^{N} kP(X=k)$, donc $\sum_{k=r+1}^{N} kP(X=k) = E(X) - \sum_{k=0}^{r} kP(X=k)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} E(G_r) &= (a+b)\sum_{k=0}^{r} kP(X=k) - rb\sum_{k=0}^{r} P(X=k) + ra\left[1 - \sum_{k=0}^{r} P(X=k)\right] \\ &\qquad - c\left[E(X) - \sum_{k=0}^{r} kP(X=k)\right] + rc\left[1 - \sum_{k=0}^{r} P(X=k)\right] \\ &= (a+b+c)\sum_{k=0}^{r} kP(X=k) - cE(X) + r(a+c) - r(a+b+c)\sum_{k=0}^{r} P(X=k) \end{aligned}$$

$$\boxed{E(G_r) = -r(a+b+c)\sum_{k=0}^{r} P(X=k) + (a+b+c)\sum_{k=0}^{r} kP(X=k) + r(a+c) - cE(X)}$$

II.3. On fait l'hypothèse que $P(X=k) = \dfrac{1}{N+1}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{r} P(X=k) = \frac{r+1}{N+1}$$

$$\sum_{k=0}^{r} kP(X=k) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{r} k = \frac{r(r+1)}{2(N+1)}$$

et $E(X)=\frac{1}{N+1}\frac{N(N+1)}{2}=\frac{N}{2}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} E(G_r) &= -r(a+b+c)\frac{r+1}{N+1}+(a+b+c)\frac{r(r+1)}{2(N+1)}+r(a+c)-c\frac{N}{2} \\ &= \frac{r(r+1)}{N+1}\left[-(a+b+c)+\frac{a+b+c}{2}\right]+r(a+c)-c\frac{N}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(G_r)=-\frac{r(r+1)(a+b+c)}{2(N+1)}+r(a+c)-c\frac{N}{2}}$$

II.4.

On se donne l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x)=E(G_x)$ si X suit la loi uniforme :

$$\phi(x)=-\frac{x(x+1)(a+b+c)}{2(N+1)}+x(a+c)-c\frac{N}{2}$$

II.4.*a.* $\phi'(x)=(a+c)-\frac{a+b+c}{2(N+1)}(2x+1)$.

$$\begin{aligned} \phi'(x)=0 &\Leftrightarrow (a+c)-\frac{a+b+c}{2(N+1)}(2x+1)=0 \\ &\Leftrightarrow 2x+1=\frac{2(N+1)(a+c)}{a+b+c} \\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left[\frac{2(N+1)(a+c)}{a+b+c}-1\right] \\ &\Leftrightarrow x=\frac{(N+1)(a+c)}{a+b+c}-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

En posant $\boxed{x_0=\frac{(N+1)(a+c)}{a+b+c}-\frac{1}{2}}$, on a donc que $\phi'(x_0)=0$. On vérifie d'autre part que $\phi'(x)$ change de signe au voisinage de x_0 (du positif au négatif : c'est une fonction affine de coefficient directeur négatif donc décroissante). Ainsi, ϕ admet un maximum en x_0.

II.4.*b*. Etant donné l'expression de x_0, nous avons :

$$x_0 > 0 \Leftrightarrow \frac{(N+1)(a+c)}{a+b+c} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{a+c}{a+b+c} > \frac{1}{2(N+1)}$$

II.4.*c*. Etant donné l'expression de x_0, nous avons :

$$\begin{aligned} x_0 \leq N &\Leftrightarrow \frac{(N+1)(a+c)}{a+b+c} - \frac{1}{2} \leq N \\ &\Leftrightarrow \frac{(N+1)(a+c)}{a+b+c} \leq N + \frac{1}{2} = \frac{2N+1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{a+c}{a+b+c} \leq \frac{2N+1}{2(N+1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{a+c}{a+b+c} \leq \frac{2N+2-1}{2(N+1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{a+c}{a+b+c} \leq 1 - \frac{1}{2(N+1)} \end{aligned}$$

Finalement, le maximum x_0 de $\phi(x)$ vérifiant $0 < x_0 \leq N$ doit satisfaire à la double condition suivante :

$$\frac{1}{2(N+1)} < \frac{a+c}{a+b+c} \leq 1 - \frac{1}{2(N+1)}$$

II.5.*a*. Nous avons $E(G_r) = \phi(r)$ mais il faut faire attention au fait que l'on ne peut pas *a priori* prendre $r_0 = x_0$ car nous voulons que r_0 soit un entier.

D'après **II.4.*a*.**, $\phi(x)$ admet un maximum unique x_0 qui vérifie, comme tous les nombres réels, $\lfloor x_0 \rfloor \leq x_0 < \lfloor x_0 \rfloor + 1$ où $\lfloor x_0 \rfloor$ désigne la partie entière de x_0.

Ainsi, si $\phi(\lfloor x_0 \rfloor) \geq \phi(\lfloor x_0 \rfloor + 1)$, on pose $r_0 = \lfloor x_0 \rfloor$ et si $\phi(\lfloor x_0 \rfloor) \leq \phi(\lfloor x_0 \rfloor + 1)$, alors on pose $r_0 = \lfloor x_0 \rfloor + 1$.

II.5.*b*. *Application numérique n°1* : $N = 100$, $a = 5$, $b = 2$ et $c = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2(N+1)} = 0{,}00495 \\ \dfrac{a+c}{a+b+c} = 0{,}8 \\ 1-\dfrac{1}{2(N+1)} = 0{,}995 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{On vérifie bien l'existence d'un } x_0 \text{ tel que } 0 < x_0 \leq N.$$

On trouve, grâce à la question **II.4.*a.***, $x_0 = 80,3$ et $\lfloor x_0 \rfloor = 80$.

$\phi(80) \approx 169{,}208$, $\phi(81) \approx 169{,}188$ et par conséquent : $\boxed{r_0 = 80}$.

II.5.*c.* *Application numérique n°2* : $N = 100$, $a = 2$, $b = 4$ et $c = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2(N+1)} = 0{,}00495 \\ \dfrac{a+c}{a+b+c} = 0{,}429 \\ 1-\dfrac{1}{2(N+1)} = 0{,}995 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{On vérifie bien l'existence d'un } x_0 \text{ tel que } 0 < x_0 \leq N.$$

On trouve $x_0 \approx 42{,}786$ et $\lfloor x_0 \rfloor = 42$.

$\phi(42) \approx 13{,}416$, $\phi(43) \approx 13{,}436$ et par conséquent : $\boxed{r_0 = 43}$.

FIN