Concours B INA ENSA
Session 2001

L' usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.
Dans ce problème, on considère la fonction définie pour tout x réel par :

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Les parties III et IV sont indépendantes des parties I et II.

PARTIE I : *Une famille de fonctions polynomiales*.

I.1. Montrer que la fonction ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Notations :

Pour tout n, entier naturel non nul, on note $\psi^{(n)}$ la fonction dérivée n ième de ψ et on pose $\psi^{(0)}=\psi$.

E étant un espace vectoriel réel, on rappelle qu'un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E.

Pour tout n, entier naturel, on note P_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_n(x)=\sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{2}x^2}\psi^{(n)}(x)$$

I.2. Déterminer P_0, P_1, P_2.

I.3.a. Vérifier pour tout n, entier naturel, et pour tout x, réel, l'égalité (1) :

$$P_{n+1}(x)=P_n'(x)-xP_n(x)$$

I.3.b. En déduire que P_n est une fonction polynomiale de degré n à coefficients entiers.

I.3.c. Quel est le coefficient du terme de degré n dans P_n ?

I.4.a. Vérifier que la fonction ψ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y'(x)+xy(x)=0$$

I.4.b. En déduire pour tout n, entier naturel, et pour tout x, réel, l'égalité (2) :

$$P_{n+2}(x)=-xP_{n+1}(x)-(n+1)P_n(x)$$

I.5. Montrer que pour tout n, entier naturel, et pour tout x, réel, on a l'égalité (3) :

$$P_n''(x)=xP_n'(x)-nP_n(x)$$

PARTIE II : ***Résolution d'une équation différentielle.***

Notations :
Dans cette partie k désigne un entier naturel et on note E_k le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, à coefficients réels, de degrés inférieurs ou égaux à k.
On note f_k la fonction définie sur E_k par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall Q \in E_k,\ f_k(Q)(x) = xQ'(x) - Q''(x).$$

II.1. Vérifier que f_k est un endomorphisme de E_k.

II.2.a. Montrer que $B_k = (P_0, P_1, \ldots, P_k)$ est une base de E_k.
II.2.b. Montrer que pour tout m, entier naturel inférieur ou égal à k, P_m est un vecteur propre de f_k pour une valeur propre qu'on précisera.

II.3. Soit M_k la matrice de f_k dans la base B_k.
II.3.a. Déterminer M_k, ainsi que son rang.
II.3.b. Préciser une base du noyau et une base de l'image de f_k.

II.4. On suppose dans cette question que $k = 3$.
On note T la fonction polynomiale de E_3 définie pour tout x réel par :

$$T(x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1.$$

II.4.a. Déterminer les coordonnées de T sur la base B_3.
II.4.b. Déduire de **II.3.** une solution particulière, dans E_3, de l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}$:

$$xy'(x) - y''(x) = -2x^3 + x^2 - 2x - 1. \qquad (L)$$

On note par la suite Q_0 l'élément de E_3 ainsi défini.
II.4.c. Soit Q, un élément de E_3, également solution de (L) ; montrer que $Q - Q_0$ appartient à $\ker(f_3)$.
II.4.d. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (L) dans E_3.

PARTIE III : ***Un équivalent en*** $+\infty$.

Rappel et notations
On rappelle que $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,dt$ est définie pour tout x réel.
La fonction Φ correspondante vérifie : $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1$; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = \psi$.
Dans cette partie, on définit pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, les expressions :

$$g_0(x) = \frac{\psi(x)}{x} \text{ et } g_1(x) = \psi(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right).$$

III.1. Montrer que les fonction g_0 et g_1 sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

III.2. Vérifier que

$$\lim_{x\to+\infty} g_0(x)=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g_1(x)=0$$

III.3. Vérifier que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ g_0'(x)=-\psi(x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \text{ et } g_1'(x)=\psi(x)\left(-1+\frac{3}{x^4}\right).$$

III.4. En déduire que, pour tout *x* réel strictement positif, on dispose de l'encadrement :

$$g_0'(x)\le-\psi(x)\le g_1'(x).$$

III.5. Montrer que pour tout couple (x,y) de réels strictement positifs vérifiant $x\le y$

$$g_1(x)-g_1(y)\le\Phi(y)-\Phi(x)\le g_0(x)-g_0(y).$$

III.6. En déduire que pour tout *x*, réel strictement positif :

$$g_1(x)\le 1-\Phi(x)\le g_0(x).$$

III.7. Montrer que lorsque *x* tend vers $+\infty$, $1-\Phi(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}\psi(x)$.

PARTIE IV : *Évaluation de la queue de distributions de probabilités.*

Soit *X* une variable aléatoire réelle admettant une densité de probabilité et telle que :

$$\forall\alpha>0,\ P[X>\alpha]>0$$

On note F_X la fonction de répartition de *X*.

Pour tout couple (α,ε) de réels strictement positifs, on note $p(\alpha,\varepsilon)$ la probabilité conditionnelle :

$$p(\alpha,\varepsilon)=\mathrm{P}\big([X>\alpha+\varepsilon]/[X>\alpha]\big)$$

IV.1. Montrer que

$$\forall(\alpha,\varepsilon)\in\mathbb{R}_+^{*2},\ p(\alpha,\varepsilon)=\frac{1-F_X(\alpha+\varepsilon)}{1-F_X(\alpha)}.$$

IV.2. Dans cette question, *X* suit la loi exponentielle de paramètre λ, de densité proportionnelle à $e^{-\lambda t}$ pour $t\ge0$ et nulle pour $t<0$.

IV.2.a. Déterminer F_X à l'aide de λ.

IV.2.b. Pour tout couple (α,ε) de réels strictement positifs, simplifier l'expression de $p(\alpha,\varepsilon)$.

IV.2.c. Pour tout $\varepsilon>0$, déterminer la limite de $p(\alpha,\varepsilon)$ quand α tend vers $+\infty$.

IV.3. Dans cette question, X suit la loi normale centrée réduite.

IV.3.a. Reconnaître F_X à l'aide des fonction introduites au **III**.

IV.3.b. En utilisant la question **III.7.**, déterminer, pour tout ε, réel strictement positif,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} p(\alpha, \varepsilon).$$

IV.3.c. En déduire que pour tout ε, réel strictement positif donné, $P(\alpha < X < \alpha + \varepsilon)$ est équivalent à $P(\alpha < X)$ quand α tend vers $+\infty$.