CORRIGE DU CONCOURS BANQUE AGRO B ET BE 2001

L'objet du problème est l'utilisation de la fonction de Gauss pour introduire une famille de polynômes (partie **I**) nous servant à résoudre une équation différentielle à la partie **II**. Les parties **III** et **IV**, indépendantes du reste du problème mais pas indépendantes entre elles, ont pour objet respectivement l'étude de l'intégrale de la fonction de Gauss fonction de sa borne supérieure et l'étude de la quantité $p(\alpha,\varepsilon)=P\left([X>\alpha+\varepsilon]/[X>\alpha]\right)$ lorsque X suit une loi exponentielle ou une loi normale centrée réduite.

PARTIE I : Une famille de fonctions polynomiales.

$\boxed{\textbf{I.1.}}$ La fonction ψ est composée de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc, on peut en déduire que ψ est également de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{I.2.}}$ Il est utile de remarquer que $P_n(x)=\dfrac{\psi^{(n)}(x)}{\psi(x)}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ainsi, nous avons :

$$P_0(x)=\frac{\psi^{(0)}(x)}{\psi(x)}=\frac{\psi(x)}{\psi(x)}=1$$

En remarquant que $\psi'(x)=-x\psi(x)$, on trouve que

$$P_1(x)=-x$$

De même, en remarquant que $\psi''(x)=\left(x^2-1\right)\psi(x)$, on trouve que

$$P_2(x)=x^2-1$$

$\boxed{\textbf{I.3.}a\textbf{.}}$ Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} P_n'(x)-xP_n(x) &= \sqrt{2\pi}xe^{\frac{x^2}{2}}\psi^{(n)}(x)+\sqrt{2\pi}e^{\frac{x^2}{2}}\psi^{(n+1)}(x)-x\sqrt{2\pi}e^{\frac{x^2}{2}}\psi^{(n)}(x) \\ &= \sqrt{2\pi}e^{\frac{x^2}{2}}\psi^{(n+1)}(x) \\ &= P_{n+1}(x) \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{I.3.}b.}$ On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question $\boxed{\textbf{I.2.}}$, nous avons $P_0(x) = 1$, donc P_0 est bien une fonction polynomiale de degré 0 à coefficients entiers.
- Supposons maintenant que P_n soit une fonction polynomiale de degré n à coefficients entiers (hypothèse de récurrence).

  Alors $x \mapsto P_n'(x)$ et $x \mapsto xP_n(x)$ sont également des fonctions polynomiales à coefficients entiers. De plus, $P_n'(x)$ est de degré $n-1$ et $xP_n(x)$ est de degré $n+1$. Donc $x \mapsto P_{n+1}(x)$ est bien une fonction polynomiale de degré $n+1$ à coefficients entiers.
- On a donc bien le résultat souhaité.

$\boxed{\textbf{I.3.}c.}$ De la même manière, on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question $\boxed{\textbf{I.2.}}$, nous avons $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = -x$ et $P_2(x) = x^2 - 1$.
- Supposons, par hypothèse de récurrence, que le coefficient du terme de degré n dans P_n soit $(-1)^n$.

  D'après la question $\boxed{\textbf{I.3.}a.}$, le coefficient du terme de degré $n+1$ dans P_{n+1} est égal au coefficient du terme de degré $n+1$ dans $-xP_n(x)$, c'est-à-dire à $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$, par hypothèse de récurrence.
- Ainsi, nous avons bien montré que, $\forall n \in \mathbb{N}$, le coefficient du terme de degré n dans P_n est $(-1)^n$.

$\boxed{\textbf{I.4.}a.}$ D'après la question $\boxed{\textbf{I.1.}}$, on sait que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a } \psi'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} = -x\psi(x).$$

D'où l'on déduit que $\psi'(x) + x\psi(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{I.4.}b.}$ Nous allons raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Grâce à la question $\boxed{\textbf{I.2.}}$, on vérifie immédiatement que

$$P_2(x) = -xP_1(x) - P_0(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nous avons donc bien le résultat souhaité pour $n = 0$.

- Supposons maintenant, par hypothèse de récurrence, que la propriété à démontrer soit vraie au rang n. C'est-à-dire que l'on a

$$P_{n+2}(x) = -xP_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En multipliant chaque côté de cette égalité par $\psi(x)$, nous obtenons

$$P_{n+2}(x)\psi(x) = -xP_{n+1}(x)\psi(x) - (n+1)P_n(x)\psi(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Et donc, puisque $\psi^{(k)}(x) = P_k(x)\psi(x),\ \forall k \in \mathbb{N}$, il vient

$$\psi^{(n+2)}(x) = -x\psi^{(n+1)}(x) - (n+1)\psi^{(n)}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En dérivant cette identité, il vient

$$\begin{aligned}\psi^{(n+3)}(x) &= -\psi^{(n+1)}(x) - x\psi^{(n+2)}(x) - (n+1)\psi^{(n+1)}(x)\\ &= -x\psi^{(n+2)}(x) - (n+2)\psi^{(n+1)}(x)\end{aligned}\qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Enfin, en divisant cette identité par $\psi(x)$, non nul, et en réutilisant le fait que $\psi^{(k)}(x) = P_k(x)\psi(x),\ \forall k \in \mathbb{N}$, nous obtenons la relation suivante :

$$P_{n+3}(x) = -xP_{n+2}(x) - (n+2)P_{n+1}(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

ce qui est bien la relation recherchée au rang $n+1$.

- Finalement, nous avons bien montré que

$$P_{n+2}(x) = -xP_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{\textbf{I.5.}}$

- Un calcul immédiat nous montre que $P_n'(x) = xP_n(x) + P_{n+1}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Prenons maintenant $n \in \mathbb{N}$. En dérivant l'identité précédente et en l'utilisant pour $n+1$, on obtient :

$$\begin{aligned} P_n''(x) &= P_n(x) + xP_n'(x) + P_{n+1}'(x) \\ &= P_n(x) + xP_n'(x) + xP_{n+1}(x) + P_{n+2}(x) \end{aligned}$$

Mais comme $P_{n+2}(x) = -xP_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x)$ d'après la question précédente, on obtient bien le résultat recherché.

PARTIE II : Résolution d'une équation différentielle.

II.1. Avant de regarder si f_k est linéaire, il faut d'abord s'assurer que f_k est bien à valeurs dans E_k.

- Soit $Q \in E_k$. Il est clair que $f_k(Q)$ est une fonction polynomiale à coefficients réels. Reste à voir son degré : en confondant Q avec son polynôme associé, on a $\deg(Q) \leq k$, donc $\deg(Q') \leq k-1$ et donc, on en déduit que $\deg(XQ') \leq k$ et que $\deg(Q'') \leq k-2 \leq k$.

  Ainsi, $\deg(f_k(Q)) \leq k$ et donc $f_k(Q) \in E_k$.

- Pour montrer la linéarité de f_k, prenons $P, Q \in E_k$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f_k(\lambda P + Q)(x) &= x(\lambda P + Q)'(x) - (\lambda P + Q)''(x) \\ &= x(\lambda P'(x) + Q'(x)) - \lambda P''(x) - Q''(x) \\ &= \lambda(xP'(x) - P''(x)) + xQ'(x) - Q''(x) \\ &= \lambda f_k(P)(x) + f_k(Q)(x) \end{aligned}$$

  D'où :

$$f_k(\lambda P + Q) = \lambda f_k(P) + f_k(Q).$$

On a ainsi montré que f_k est un endomorphisme de E_k.

II.2.*a.* On a $\dim(E_k) = k+1 = card(B_k)$, donc il suffit de montrer que $P_0, \ldots\ldots, P_k$ est une famille libre dans E_k. Ceci est immédiat car les polynômes P_i, $i = 0 \ldots k$, sont tous de degré distinct ($\deg P_i = i$ d'après **I.3.*b.***).

II.2.*b*. Soit $m \in [\![0,k]\!]$. En utilisant la question **I.5.**, on obtient, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_k(P_m)(x) &= xP_m'(x) - P_m''(x) \\ &= xP_m'(x) - \left(xP_m'(x) - mP_m(x)\right) \\ &= mP_m(x) \end{aligned}$$

Ainsi, P_m est un vecteur propre de f_k associé à la valeur propre m.

II.3.*a*. D'après la question précédente, nous avons $f_k(P_m) = mP_m$, $\forall m \in [\![0,k]\!]$. Donc on en déduit la matrice M_k :

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & \mathbf{0} & \\ & & 2 & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & k-2 & & \\ & \mathbf{0} & & & & & k-1 & \\ & & & & & & & k \end{pmatrix}$$

D'où l'on déduit immédiatement que M_k est de rang k.

II.3.*b*.

- D'après le théorème du rang, nous avons $\dim(\ker f_k) = 1$. D'autre part, la question précédente nous donne que P_0 est dans $\ker f_k$. Il en constitue donc une base.
- Pour $m \in [\![1,k]\!]$, on a $f_k(P_m) = mP_m$ et donc $f_k\left(\dfrac{P_m}{m}\right) = P_m$, par linéarité de f_k. Ceci nous donne que $P_m \in \operatorname{Im}(f_k)$. Ainsi, $(P_1,.....,P_k)$ est une famille (libre d'après **II.2.*a*.**) de $\operatorname{Im}(f_k)$. Comme $\dim(\operatorname{Im} f_k) = rang(M_k) = k$, on en déduit que $(P_1,.....,P_k)$ est une base de $\operatorname{Im}(f_k)$.

$\boxed{\textbf{II.4.}a.}$ D'après $\boxed{\textbf{I.2.}}$, on sait que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = -x$$

$$P_2(x) = x^2 - 1$$

La question $\boxed{\textbf{I.3.}a.}$ nous donne de plus que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_3(x) = P_2'(x) - xP_2(x) = -x^3 + 3x$.

On écrit alors que $T = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$ et, en identifiant les coefficients, on obtient que $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,) = (0, 4, 1, 2)$.

$\boxed{\textbf{II.4.}b.}$ L'équation (L) est équivalente à l'équation $f_3(Q) = T$, d'inconnue $Q \in E_k$.

- Tout d'abord, remarquons que la résolution de cette équation est possible car $T \in vect(P_1, P_2, P_3)$ et donc $T \in \operatorname{Im}(f_3)$.
- D'après la question précédente, on a $T = 4P_1 + P_2 + 2P_3$ et donc, il suffit de trouver les antécédents de $4P_1$, de P_2 et de $2P_3$ grâce à la linéarité de f_3.

  En se servant de la question $\boxed{\textbf{II.2.}b.}$, on obtient immédiatement que

  $$f_3(4P_1) = 4P_1,\ f_3\left(\frac{P_2}{2}\right) = P_2 \text{ et } f_3\left(\frac{2}{3}P_3\right) = 2P_3.$$

  Ainsi, on a, par linéarité de f_3,

  $$f_3\left(4P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{2}{3}P_3\right) = T.$$

  D'où $Q_0 = 4P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{2}{3}P_3$, c'est-à-dire $Q_0(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{II.4.}c.}$ Comme Q_0 et Q sont solutions de (L), on a $f_3(Q_0) = f_3(Q) = T$. On peut alors en déduire que :

$$\begin{aligned} f_3(Q - Q_0) &= f_3(Q) - f_3(Q_0) \\ &= T - T \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $Q - Q_0 \in \ker f_3$.

II.4.*d*.

- Soit Q une solution de l'équation (L). Nous venons de voir que $Q-Q_0 \in \ker f_3$.

  Or, d'après la question **II.3.*b*.**, on a

$$\begin{aligned}\ker f_3 &= vect(P_0)\\ &= \{\lambda P_0\}_{\lambda\in\mathbb{R}}\end{aligned}$$

  Donc, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q-Q_0 = \lambda P_0$, c'est-à-dire $Q = Q_0 + \lambda P_0 \in E_3$.

- Réciproquement, il est clair que tout élément de la forme $Q_0 + \lambda P_0$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est solution de l'équation (L) dans E_3.

- Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (L) dans E_3 est

$$\{Q_0+\lambda P_0\}_{\lambda\in\mathbb{R}} = \left\{-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x-\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$$

PARTIE III : Un équivalent en $+\infty$.

III.1. g_0 et g_1 sont produits et sommes de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc ces deux fonctions sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

III.2.

- Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a immédiatement que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_0(x) = 0$.

- De même, en remarquant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, on trouve bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x) = 0$.

III.3. Prenons $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Comme $\psi(x)' = -x\psi(x)$, on a :

$$g_0'(x) = \frac{\psi'(x)x-\psi(x)}{x^2} = \frac{-x^2\psi(x)-\psi(x)}{x^2}$$

D'où

$$g_0'(x) = -\psi(x) - \frac{\psi(x)}{x^2} = -\psi(x)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

- De même, on a :

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= \psi'(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) + \psi(x)\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right) \\ &= -x\psi(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) + \psi(x)\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right) \\ &= -\psi(x) + \frac{\psi(x)}{x^2} - \frac{\psi(x)}{x^2} + \frac{3}{x^4}\psi(x) \\ &= \psi(x)\left(-1 + \frac{3}{x^4}\right) \end{aligned}$$

III.4. Prenons $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- On a $\psi(x) > 0$ et $1 + \frac{1}{x^2} > 1$, donc $\psi(x)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) > \psi(x)$ et $-\psi(x)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) < -\psi(x)$.

  C'est-à-dire que l'on a $g_0'(x) < -\psi(x)$, d'après la question précédente.
- On a $\frac{3}{x^4}\psi(x) > 0$, donc $-\psi(x) + \frac{3}{x^4}\psi(x) > -\psi(x)$ et donc $g_1'(x) > -\psi(x)$, toujours d'après la question précédente.
- Finalement, nous avons bien les inégalités souhaitées.

III.5. Prenons $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $x \le y$.

- Montrons que $\Phi(y) - \Phi(x) \le g_0(x) - g_0(y)$.

  D'après la question précédente, on a $g_0'(t) \le -\psi(t)$, $\forall t \in [x, y]$. En intégrant alors cette inégalité, il vient :

$$\int_x^y g_0'(t)dt \le -\int_x^y \psi(t)dt$$

  C'est-à-dire

$$g_0(y) - g_0(x) \le -\left(\int_x^{-\infty} \psi(t)\,dt + \int_{-\infty}^{y} \psi(t)\,dt\right)$$

Comme le second membre de cette inégalité est égal à $\Phi(x)-\Phi(y)$, nous pouvons en déduire l'inégalité

$$g_0(y)-g_0(x)\leq\Phi(x)-\Phi(y)$$

Et donc, il vient

$$\Phi(y)-\Phi(x)\leq g_0(x)-g_0(y)$$

- Montrons que $g_1(x)-g_1(y)\leq\Phi(y)-\Phi(x)$.

  D'après la question précédente, on a $-\psi(t)\leq g_1'(t)$, $\forall t\in[x,y]$. En intégrant alors cette inégalité, on obtient

$$-\int_x^y \psi(t)dt\leq\int_x^y g_1'(t)dt$$

  C'est-à-dire

$$-\left(\int_x^{-\infty}\psi(t)\,dt+\int_{-\infty}^y\psi(t)\,dt\right)\leq g_1(y)-g_1(x)$$

  Et ainsi, on obtient comme plus haut que

$$g_1(x)-g_1(y)\leq\Phi(y)-\Phi(x)$$

- En conclusion, nous avons bien montré que

$$g_1(x)-g_1(y)\leq\Phi(y)-\Phi(x)\leq g_0(x)-g_0(y)$$

$\boxed{\textbf{III.6.}}$ Soients $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $x\leq y$. On fait tendre y vers $+\infty$ dans les inégalités de la question précédente. On obtient alors le résultat souhaité en utilisant les égalités suivantes :

$$\lim_{y\to+\infty} g_0(y)=\lim_{y\to+\infty} g_1(y)=0 \text{ et } \lim_{y\to+\infty}\Phi(y)=1.$$

$\boxed{\textbf{III.7.}}$ En utilisant les expressions de $g_0(x)$ et de $g_1(x)$, la question précédente nous fournit les inégalités suivantes :

$$\psi(x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\leq 1-\Phi(x)\leq\frac{1}{x}\psi(x)$$

D'où l'on déduit que

$$1-\frac{1}{x^2} \leq \frac{1-\Phi(x)}{\frac{1}{x}\psi(x)} \leq 1$$

Le théorème des gendarmes nous donne alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\Phi(x)}{\frac{1}{x}\psi(x)} = 1$

D'où l'on déduit l'équivalent demandé.

PARTIE IV : Evaluation de la queue de distributions de probabilités.

$\boxed{\textbf{IV.1.}}$ Prenons $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, nous avons

$$p(\alpha,\varepsilon) = \frac{\mathrm{P}\left([X > \alpha+\varepsilon] \bigcap [X > \alpha]\right)}{\mathrm{P}[X > \alpha]}$$

Mais $[X > \alpha] \subset [X > \alpha+\varepsilon]$, donc $\mathrm{P}\left([X > \alpha+\varepsilon] \bigcap [X > \alpha]\right) = \mathrm{P}\left([X > \alpha+\varepsilon]\right)$.

Ainsi

$$\begin{aligned} p(\alpha,\varepsilon) &= \frac{\mathrm{P}\left([X > \alpha+\varepsilon]\right)}{\mathrm{P}[X > \alpha]} \\ &= \frac{1-\mathrm{P}\left([X \leq \alpha+\varepsilon]\right)}{1-\mathrm{P}[X \leq \alpha]} \\ &= \frac{1-F_X(\alpha+\varepsilon)}{1-F_X(\alpha)} \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{IV.2.}}$ Notons f la densité de X. On sait alors que f est définie de la manière suivante :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \text{ et } f(t) = 0 \text{ sinon.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

$\boxed{\textbf{IV.2.}a\textbf{.}}$ D'après ce qui précède, on obtient :

- Pour $x < 0$, $F_X(x) = 0$.

- Pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{0}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

IV.2.*b*. D'après ce qui précède, on a, pour $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} p(\alpha,\varepsilon) &= \frac{1-\left(1-e^{-\lambda(\alpha+\varepsilon)}\right)}{1-\left(1-e^{-\lambda\alpha}\right)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(\alpha+\varepsilon)}}{e^{-\lambda\alpha}} \\ &= e^{-\lambda\varepsilon} \end{aligned}$$

IV.2.*c*. On en déduit immédiatement que $\lim_{\alpha \to +\infty} p(\alpha,\varepsilon) = e^{-\lambda\varepsilon}$.

IV.3. En notant toujours f la densité de X, on a, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \\ &= \psi(t) \end{aligned}$$

IV.3.*a*. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt \\ &= \Phi(x) \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{IV.3.}\textbf{\textit{b.}}}$ Soient $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D' après la question $\boxed{\textbf{IV.1.}}$, on a $p(\alpha,\varepsilon) = \dfrac{1-F_X(\alpha+\varepsilon)}{1-F_X(\alpha)}$. Donc on peut déduire de la question précédente que $p(\alpha,\varepsilon) = \dfrac{1-\Phi(\alpha+\varepsilon)}{1-\Phi(\alpha)}$.

La question $\boxed{\textbf{III.7.}}$ nous donne alors que $p(\alpha,\varepsilon)$ est équivalent à $\dfrac{\frac{1}{\alpha+\varepsilon}\psi(\alpha+\varepsilon)}{\frac{1}{\alpha}\psi(\alpha)}$ lorsque α tend vers $+\infty$ à ε fixé. Mais, d'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{\alpha+\varepsilon}\psi(\alpha+\varepsilon)}{\frac{1}{\alpha}\psi(\alpha)} &= \frac{\alpha}{\alpha+\varepsilon}\frac{\psi(\alpha+\varepsilon)}{\psi(\alpha)} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\varepsilon}\frac{e^{-\frac{(\alpha+\varepsilon)^2}{2}}}{e^{-\frac{\alpha^2}{2}}} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\varepsilon}e^{-\alpha\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}}
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\frac{1}{\alpha+\varepsilon}\psi(\alpha+\varepsilon)}{\frac{1}{\alpha}\psi(\alpha)} = 0$$

Ainsi, on obtient que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} p(\alpha,\varepsilon) = 0$$

$\boxed{\textbf{IV.3.}\textbf{\textit{c.}}}$ Soient $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}([\alpha < X < \alpha+\varepsilon]) &= F_X(\alpha+\varepsilon) - F_X(\alpha) \\
&= \Phi(\alpha+\varepsilon) - \Phi(\alpha) \\
&= \Phi(\alpha+\varepsilon) - \Phi(\alpha) + 1 - 1
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\mathrm{P}([\alpha < X < \alpha+\varepsilon])}{\mathrm{P}([\alpha < X])} = \frac{1-\Phi(\alpha)}{\mathrm{P}([\alpha < X])} + \frac{\Phi(\alpha+\varepsilon)-1}{\mathrm{P}([\alpha < X])}$$

Mais comme

$$\begin{aligned}\mathrm{P}([\alpha < X]) &= 1 - \mathrm{P}([X \leq \alpha]) \\ &= 1 - F_X(\alpha) \\ &= 1 - \Phi(\alpha)\end{aligned}$$

On aboutit à l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{P}([\alpha < X < \alpha + \varepsilon])}{\mathrm{P}([\alpha < X])} &= 1 + \frac{\Phi(\alpha + \varepsilon) - 1}{1 - \Phi(\alpha)} \\ &= 1 - \frac{1 - \Phi(\alpha + \varepsilon)}{1 - \Phi(\alpha)}\end{aligned}$$

Et, finalement, en utilisant la question $\boxed{\textbf{IV.1.}}$:

$$\frac{\mathrm{P}([\alpha < X < \alpha + \varepsilon])}{\mathrm{P}([\alpha < X])} = 1 - p(\alpha, \varepsilon)$$

La question précédente nous donne alors que, pour ε fixé,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\mathrm{P}([\alpha < X < \alpha + \varepsilon])}{\mathrm{P}([\alpha < X])} = 1$$

On en déduit l'équivalent recherché.

FIN