Concours B-BE INA ENSA
Session 2002

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

1. Première partie

p_1 et p_2 sont deux réels strictement positifs compris entre 0 et 1. Deux joueurs J_1 et J_2 jouent au jeu suivant : à chaque coup chaque joueur lance une balle sur son adversaire. Tout joueur atteint est éliminé. On suppose que J_1 atteint J_2 avec la probabilité p_1 et que J_2 atteint J_1 avec la probabilité p_2.

On suppose enfin que les tirs de chaque joueur sont indépendants des tirs de l'autre joueur, mais également les uns des autres. La partie est gagnée par le joueur qui reste seul en lice. La partie est nulle si les deux joueurs sont simultanément éliminés.

1.a. Pour tout *n* entier naturel non nul, on note A_n l'événement « J_1 gagne au *n*-ième coup », B_n l'événement « J_2 gagne au *n*-ième coup » et C_n l'événement « la partie est nulle au *n*-ième coup ».
Déterminer les probabilités $P(A_1)$, $P(B_1)$, $P(C_1)$ $P(A_2)$, $P(B_2)$, $P(C_2)$ et plus généralement $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$ pour tout *n* entier naturel non nul.

1.b. On note A l'événement « J_1 gagne », B l'événement « J_2 gagne » et C l'événement « la partie est nulle ». Justifier les égalités : $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ et $C=\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, ainsi que :

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),\ P(B)=\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \text{ et } P(C)=\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n)$$

1.c. Déduire de ce qui précède les valeurs de $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$, puis montrer que la probabilité pour que le jeu se poursuive indéfiniment est nulle.

2. Deuxième partie

Trois joueurs J_1, J_2 et J_3 jouent au jeu suivant : à chaque coup chacun des joueurs lance une balle sur l'un de ses adversaires. Tout joueur atteint est éliminé. On suppose que J_1 atteint le joueur qu'il vise avec la probabilité $2/3$, que J_2 atteint le joueur qu'il vise avec la probabilité $1/2$ et que J_3 atteint le joueur qu'il vise avec la probabilité $1/3$. Ainsi J_1 est-il réputé plus fort que J_2, qui est lui-même plus fort que J_3.
On suppose enfin que, lorsque les trois joueurs sont en jeu, chacun vise le plus fort de ses adversaires. Les tirs de chaque joueur sont indépendants des tirs des autres joueurs, mais également les uns des autres. La partie est gagnée par le joueur qui reste seul en lice. La partie est nulle si les trois joueurs sont éliminés.

On note $E_1 = \varnothing$, $E_2 = \{J_1\}$, $E_3 = \{J_2\}$, $E_4 = \{J_3\}$, $E_5 = \{J_1, J_3\}$, $E_6 = \{J_2, J_3\}$, ainsi que $E_7 = \{J_1, J_2, J_3\}$, les états possibles du jeu ; E_5 désigne par exemple une phase du jeu où seuls J_1 et J_3 demeurent en lice. Enfin, on note $E_8 = \{J_1, J_2\}$.
On désigne par $p_{i,j}$ la probabilité de passage en un coup de l'état E_j à l'état E_i, les états $E_1, \ldots, E_4$ étant réputés stables. Pour tout entier naturel non nul, $\mathbf{I}_n$ la matrice unité d'ordre *n*.

2.a. Pourquoi l'état $E_8 = \{J_1, J_2\}$ ne peut-il être atteint à partir de $E_7 = \{J_1, J_2, J_3\}$?

Dans la suite, on ne s'intéressera donc qu'aux états $E_1, \ldots, E_7$.

2.b. Montrer que $p_{1,5} = 2/9$, $p_{2,5} = 4/9$, $p_{5,5} = 2/9$, $p_{3,5} = p_{6,5} = p_{7,5} = 0$.
On admet dans la suite que la matrice de terme général $p_{i,j}$ vaut :

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \text{ où } \mathbf{Q} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{R} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.c. On note $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{D} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}_3$ et que pour tout *n* entier naturel non nul, on a : $\mathbf{R}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}$.

2.d. Montrer par récurrence que pour tout *n* entier naturel non nul, on a :

$$\mathbf{\Pi}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{Q}.\left(\mathbf{I}_3 + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \ldots + \mathbf{R}^{n-1}\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^n \end{pmatrix}$$

Indication : On utilisera, sans la démontrer, la multiplication des matrices blocs :
Si $(\mathbf{A}, \mathbf{A}') \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $(\mathbf{B}, \mathbf{B}') \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, $(\mathbf{C}, \mathbf{C}') \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$, $(D, D') \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, alors le produit des matrices blocs $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{p+m}(\mathbb{R})$ est donnée par la formule : $\mathbf{QQ}' = \begin{pmatrix} \mathbf{AA}' + \mathbf{BC}' & \mathbf{AB}' + \mathbf{BD}' \\ \mathbf{CA}' + \mathbf{DC}' & \mathbf{CB}' + \mathbf{DD}' \end{pmatrix}$.

2.e. On suppose que $P[X_0 = E_7] = 1$; pour tout *n* entier naturel non nul, on note X_n la variable aléatoire décrivant l'état du système après le *n*-ième lancer. Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que pour tout entier naturel *k* tel que $1 \le k \le 7$, $P[X_n = E_k]$ est le terme situé à la *k*-ième ligne, septième colonne, de la matrice $\mathbf{\Pi}^n$.

2.f. Déterminer les termes de la troisième colonne de $\mathbf{R}^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ puis montrer que le terme situé à la deuxième ligne, troisième colonne de $\mathbf{QR}^k$, est $\frac{8}{9^{k+1}}\left(2^k - 1\right)$.

2.g. Pour tout n entier naturel non nul, on note A_n l'événement « J_1 gagne au n-ième coup » et A l'événement « J_1 gagne ».

Justifier l'égalité $P\left[X_n = E_2\right] = \sum_{k=1}^{k=n} P\left(A_n\right)$ et montrer que $P\left(A_n\right) = \frac{8}{9}\left(\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right)$.

En déduire la valeur de $P\left(A\right)$.

Indication : On admettra que $P\left(A\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P\left[X_n = E_2\right]$.