CORRIGE DU CONCOURS BANQUE AGRO B ET BE 2002

L'objet du problème est l'étude probabiliste d'un jeu. La première partie porte sur un jeu à deux joueurs ; on y retrouve facilement des résultats classiques. La deuxième partie, sur un jeu à trois joueurs, fait appel à des notions d'algèbre linéaire permettant finalement de calculer la probabilité pour que le joueur favori l'emporte.

1. Première partie

1.*a*.

- Commençons par regarder ce qui se passe lorsque $n=1$.

$P(A_1)$ est la probabilité que J_1 gagne au premier coup et donc que J_2 perde au premier coup, d'où :

$$P(A_1)=p_1(1-p_2)\ :\ J_1 \text{ doit éliminer } J_2 \text{ mais sans que } J_2 \text{ ne l'élimine}$$

$P(B_1)$ est la probabilité que J_2 gagne au premier coup et donc que J_1 perde au premier coup, d'où :

$$P(B_1)=(1-p_1)p_2\ :\ J_2 \text{ doit éliminer } J_1 \text{ mais sans que } J_1 \text{ ne l'élimine}$$

$P(C_1)$ est la probabilité que la partie soit nulle au premier coup, et donc que J_1 et J_2 s'éliminent mutuellement au premier coup, d'où :

$$P(C_1)=p_1p_2$$

- Regardons maintenant la situation lorsque $n=2$.

$P(A_2)$ est la probabilité que J_1 gagne au deuxième coup, donc que J_1 et J_2 ne gagnent pas au premier coup, et que J_2 perde au deuxième coup, d'où, par indépendance, :

$$P(A_2)=\underbrace{(1-p_1)(1-p_2)}_{\substack{J_1 \text{ et } J_2 \text{ ne gagnent pas} \\ \text{au premier coup}}}\ \underbrace{p_1(1-p_2)}_{\substack{J_1 \text{ gagne et } J_2 \text{ perd} \\ \text{au deuxième coup}}}$$

Par un raisonnement analogue au précédent, on obtient :

$$P(B_2) = \underbrace{(1-p_1)(1-p_2)}_{\substack{J_1 \text{ et } J_2 \text{ perdent} \\ \text{au premier coup}}} \underbrace{(1-p_1)\,p_2}_{\substack{J_2 \text{ gagne et } J_1 \text{ perd} \\ \text{au deuxième coup}}}$$

$$P(C_2) = \underbrace{(1-p_1)(1-p_2)}_{\substack{J_1 \text{ et } J_2 \text{ perdent} \\ \text{au premier coup}}} \underbrace{p_1 p_2}_{\substack{J_1 \text{ et } J_2 \text{ gagnent} \\ \text{au deuxième coup}}}$$

- Enfin, par récurrence immédiate, il vient $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(A_n) = \left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^{n-1} p_1 (1-p_2)$$

$$P(B_n) = \left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^{n-1} (1-p_1)\, p_2$$

$$P(C_n) = \left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^{n-1} p_1 p_2$$

$\boxed{\textbf{1.}b\textbf{.}}$

- Montrons que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Si J_1 gagne, alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que J_1 gagne au *n*-ième coup, donc $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que J_1 gagne au *n*-ième coup, alors J_1 gagne et donc $A_n \subset A$. Comme ceci est vrai $\forall n \in \mathbb{N}^*$, alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A$.

Finalement on a bien $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

- On démontre par un raisonnement analogue que $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ et que $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.
- Enfin, si $m \neq n$, alors J_1 ne peut gagner à la fois au *m*-ième et au *n*-ième coup, donc $A_m \cap A_n = \varnothing$. Ainsi, les A_n sont deux à deux disjoints et on en déduit immédiatement que :

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

<u>*Remarque*</u> : On utilise en fait ici la σ-additivité de la mesure *P*.

* De la même manière, nous avons :

$$P(B) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$$

$$P(C) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n)$$

$\boxed{\textbf{1.}c\textbf{.}}$

* Compte tenu de ce qui précède :

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^{n-1} p_1(1-p_2) \\ &= p_1(1-p_2)\sum_{n=1}^{\infty} \left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^{n-1} \end{aligned}$$

$\sum_{n\geq 1} \left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^{n-1}$ est une série géométrique de raison strictement comprise entre –1 et 1 (on rappelle que $0 < p_1 < 1$ et $0 < p_2 < 1$) ; cette série est donc convergente et de somme égale à :

$$\frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$$

Par conséquent :

$$P(A) = \frac{p_1(1-p_2)}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{p_1(1-p_2)}{p_1(1-p_2) + p_2}}$$

En procédant de même pour les deux autres calculs, on obtient :

$$\boxed{P(B) = \frac{(1-p_1)p_2}{(1-p_1)p_2 + p_1}}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}}$$

- Le jeu se poursuit indéfiniment si les évènements *A*, *B* et *C* ne se produisent jamais. Si on note P_∞ cette probabilité que le jeu se poursuive indéfiniment, on a :

$$\begin{aligned} P_\infty &= 1-\left[P(A)+P(B)+P(C)\right] \\ &= 1-\frac{p_1(1-p_2)}{p_1(1-p_2)+p_2}-\frac{(1-p_1)\,p_2}{(1-p_1)\,p_2+p_1}-\frac{p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2} \\ &= \frac{(p_1+p_2-p_1p_2)-p_1(1-p_2)-(1-p_1)\,p_2-p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2} \\ &= \frac{p_1+p_2-p_1p_2-p_1+p_1p_2-p_2+p_1p_2-p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_\infty = 0}$$

2. Deuxième partie

Par commodité d'écriture, on pose $p_1=\frac{2}{3}$, $p_2=\frac{1}{2}$ et $p_3=\frac{1}{3}$.

2.*a*.

Lorsque les trois joueurs jouent ensemble, J_3 n'est pas visé puisqu'il est le moins fort. Par conséquent, il ne peut pas être éliminé et on ne peut pas passer de l'état $E_7=\{J_1,J_2,J_3\}$ à l'état $E_8=\{J_1,J_2\}$ en un seul coup.

2.*b*.

- $p_{1,5}$ est la probabilité de passer de $E_5=\{J_1,J_3\}$ à $E_1=\varnothing$, *i.e.* la probabilité pour qu'il y ait une partie nulle entre J_1 et J_3. Autrement dit, $p_{1,5}$ est la probabilité pour que J_1 et J_3 réussissent leur tir simultanément :

$$p_{1,5}=p_1p_3 \Rightarrow p_{1,5}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

- $p_{2,5}$ est la probabilité de passer de $E_5=\{J_1,J_3\}$ à $E_2=\{J_1\}$, *i.e.* la probabilité pour que J_1 gagne en jouant contre J_3 :

$$p_{2,5}=p_1(1-p_3) \Rightarrow p_{1,5}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

- $p_{5,5}$ est la probabilité de rester à l'état $E_5=\{J_1,J_3\}$, *i.e.* la probabilité que J_1 et J_3 perdent tous les deux :

$$p_{5,5}=(1-p_1)(1-p_3)\Rightarrow p_{1,5}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

- $p_{3,5}=0$, car J_2 ne peut pas gagner dans une partie où les seuls joueurs en présence sont J_1 et J_3.
- $p_{6,5}=0$, car J_2 ne peut pas jouer contre J_3 (état E_6) alors qu'il a déjà été éliminé (état E_5).
- $p_{7,5}=0$, car si J_2 a déjà été éliminé (état E_5), la partie ne peut plus comporter 3 joueurs.

$\boxed{\mathbf{2.}c\mathbf{.}}$

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathbf{I}_3$$

Pour démontrer que pour tout n entier naturel non nul, on a : $\mathbf{R}^n=\mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}$, on procède par récurrence :

- Si $n=1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{PDP}&=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&4\\0&3&3\\0&0&-1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&0&2\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\mathbf{R}\end{aligned}$$

- Supposons que pour un n donné, entier naturel non nul, $\mathbf{R}^n=\mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{PD}^{n+1}\mathbf{P} &= \mathbf{PD}^n\mathbf{DP} \\ &= \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^2\mathbf{DP} \quad \text{car } \mathbf{P}^2 = \mathbf{I}_3 \\ &= \underbrace{\mathbf{PD}^n\mathbf{P}}_{\mathbf{R}^n}\underbrace{\mathbf{PDP}}_{\mathbf{R}} \\ &= \mathbf{R}^n.\mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}^{n+1}\end{aligned}$$

- On en conclut que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{R}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}$.

$\boxed{\mathbf{2.}d\mathbf{.}}$

On procède là encore par récurrence.

- Pour $n=1$, on a bien $\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix}$; c'est la définition.

- Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{\Pi}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{Q}.\left(\mathbf{I}_3 + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \ldots + \mathbf{R}^{n-1}\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}^{n+1} &= \mathbf{\Pi}^n.\mathbf{\Pi} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{Q}.\left(\mathbf{I}_3 + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \ldots + \mathbf{R}^{n-1}\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{I}_4.\mathbf{Q} + \mathbf{Q}.\left(\mathbf{I}_3 + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \ldots + \mathbf{R}^{n-1}\right).\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^n.\mathbf{R} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{Q}.\left(\mathbf{I}_3 + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \ldots + \mathbf{R}^{n}\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{car } \mathbf{I}_4.\mathbf{Q} = \mathbf{Q}.\mathbf{I}_3\ (= \mathbf{Q})\end{aligned}$$

- On peut donc en conclure que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{\Pi}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{Q}.\left(\mathbf{I}_3 + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \ldots + \mathbf{R}^{n-1}\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^n \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{2.}e\mathbf{.}}$

On procède encore une fois par récurrence.

- Soit $n=1$. On a :

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2/9 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/9 & 1/6 & 4/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/9 & 0 & 2/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Il faut vérifier que $P\left[X_1 = E_k\right] = p_{k,7}$, où $p_{k,7}$ est le *k*-ième élément de la septième colonne de $\mathbf{\Pi}$, pour $k = 1\ldots 7$.

- $P\left[X_1 = E_1\right] = 0$ car J_3 ne peut être éliminé en un coup dans une partie à 3 joueurs (voir question $\boxed{\textbf{2.}a\textbf{.}}$). Pour la même raison $P\left[X_1 = E_2\right] = P\left[X_1 = E_3\right] = 0$.
- $P\left[X_1 = E_4\right]$ est la probabilité que « J_3 élimine J_1 et que J_1 élimine J_2 » ou bien que « J_1 et J_2 s'éliminent mutuellement » :

  $P\left[X_1 = E_4\right] = p_3 p_1 + p_1 p_2 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{9}$
- $P\left[X_1 = E_5\right]$ est la probabilité que « J_1 élimine J_2 , mais J_2 et J_3 n'éliminent pas J_1 » :

  $P\left[X_1 = E_5\right] = p_1\left(1 - p_2\right)\left(1 - p_3\right) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$
- Pour $P\left[X_1 = E_6\right]$ notons :

  ω_1 : l'événement « J_1 élimine J_2 »

  ω_2 : l'événement « J_2 élimine J_1 »

  ω_3 : l'événement « J_3 élimine J_1 »

$$\begin{aligned} P\left[X_1 = E_6\right] &= P\left[\overline{\omega}_1 \cap \left(\omega_2 \cup \omega_3\right)\right] \\ &= P\left[\overline{\omega}_1\right] \times P\left[\omega_2 \cup \omega_3\right] \quad \text{par indépendance} \\ &= P\left[\overline{\omega}_1\right] \times \left(P\left[\omega_2\right] + P\left[\omega_3\right] - P\left[\omega_2 \cap \omega_3\right]\right) \\ &= P\left[\overline{\omega}_1\right] \times \left(P\left[\omega_2\right] + P\left[\omega_3\right] - P\left[\omega_2\right] \times P\left[\omega_3\right]\right) \quad \text{par indépendance} \\ &= \left(1 - p_1\right)\left(p_2 + p_3 - p_2 p_3\right) \end{aligned}$$

$$P\left[X_1 = E_6\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

- $P\left[X_1 = E_7\right]$ est la probabilité qu'aucun des joueurs ne soit éliminé en un coup :

$$P\left[X_1 = E_7\right] = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

Les $P\left[X_1 = E_k\right] = p_{k,7}$, $1 \le k \le 7$, sont donc égaux aux termes de la septième colonne de $\mathbf{\Pi}$.

RAPPEL : La formule des probabilités totales

Définition :

Des sous-ensembles $B_1, B_2, \ldots, B_n$ d'un ensemble Ω forment une partition de Ω si :

- Les sous-ensembles B_i sont deux à deux disjoints,
- $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$.

Théorème :

Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω, la probabilité $P(A)$ d'un événement A quelconque de Ω est égale à :

$P(A) = \sum_{k=1}^{k=n} P(A \cap B_k)$ que l'on peut encore écrire $P(A) = \sum_{k=1}^{k=n} P(A/B_k) P(B_k)$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P\left[X_n = E_k\right] = p_{k,7}(n)$, $1 \le k \le 7$, où $p_{k,7}(n)$ est le terme de la k-ième ligne, septième colonne de $\mathbf{\Pi}^n$.

Les évènements $\{X_n = E_k\}$, $1 \le k \le 7$, forment une partition de l'univers car le jeu est dans l'un de ces 7 états au n-ième coup. Ainsi d'après le ***théorème des probabilités totales***, on peut écrire :

$$\begin{aligned} P\left(X_{n+1}=E_k\right) &= \sum_{i=1}^{i=7} P\left(\left\{X_{n+1}=E_k\right\}\cap\left\{X_n=E_i\right\}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{i=7} P\left(\left\{X_{n+1}=E_k\right\}/\left\{X_n=E_i\right\}\right)P\left(X_n=E_i\right) \end{aligned}$$

Avec les notations introduites précédemment, on a :

$P\left(\left\{X_{n+1}=E_k\right\}/\left\{X_n=E_i\right\}\right)=p_{k,i}$, *i.e.* l'élément de la *k*-ième ligne, *i*-ième colonne de $\mathbf{\Pi}$, car le jeu passe de l'état E_i à l'état E_k.

$P\left(X_n=E_i\right)=p_{i,7}(n)$, *i.e.* l'élément de la *i*-ième ligne, septième colonne de $\mathbf{\Pi}^n$.

Par conséquent :

$$P\left(X_{n+1}=E_k\right)=\sum_{i=1}^{i=7} p_{k,i}.p_{i,7}(n)$$

Compte tenu de la définition de $p_{k,i}$ et de $p_{i,7}(n)$, cette somme correspond en fait au terme de la *k*-ième ligne, septième colonne de $\mathbf{\Pi}.\mathbf{\Pi}^n=\mathbf{\Pi}^{n+1}$.

Ainsi, nous avons bien démontré que $P\left(X_{n+1}=E_k\right)=p_{k,7}(n+1)$.

- On peut donc en conclure que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P\left[X_n=E_k\right]=p_{k,7}(n),\ 1\le k\le 7$, où $p_{k,7}(n)$ est le terme de la *k*-ième ligne, septième colonne de $\mathbf{\Pi}^n$.

$\boxed{\mathbf{2.}f\mathbf{.}}$

D'après la question $\boxed{\mathbf{2.}c\mathbf{.}}$, on sait que $\mathbf{R}^k=\mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^k &= \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P} \\ &= \frac{1}{9^k}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^k&0&0\\0&3^k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9^k}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^k&0&2^{k+1}\\0&3^k&3^k\\0&0&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{9^k}\begin{pmatrix}2^k&0&2^{k+1}-2\\0&3^k&3^k-1\\0&0&1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

La troisième colonne de $\mathbf{R}^k$ est donc : $\frac{1}{9^k}\begin{pmatrix}2^{k+1}-2\\3^k-1\\1\end{pmatrix}$.

Le terme situé à la deuxième ligne, troisième colonne de $\mathbf{QR}^k$, que l'on notera $\left[\mathbf{QR}^k\right]_{(2,3)}$, s'obtient aisément, en multipliant la deuxième ligne de $\mathbf{Q}$ par la troisième colonne de $\mathbf{R}^k$ que l'on vient juste de calculer :

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{QR}^k\right]_{(2,3)} &= \frac{1}{9^k}\times\frac{1}{18}\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{k+1}-2\\ 3^k-1\\ 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{9^k}\times\frac{1}{2\times 9}\times 8\left(2^{k+1}-2\right)\\ &= \frac{1}{9^{k+1}}\times\frac{1}{2}\times 8\times 2\left(2^k-1\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\left[\mathbf{QR}^k\right]_{(2,3)} = \frac{8\left(2^k-1\right)}{9^{k+1}}}$$

2.*g*.

- Le jeu est l'état E_2 après le *n*-ième coup si J_1 a gagné au *n*-ième coup ou avant. Donc :

$$\left\{X_n = E_2\right\} = \bigcup_{k=1}^{k=n} A_k$$

Comme les A_k sont deux à deux disjoints, on en déduit immédiatement que :

$$\begin{aligned}P\left(X_n = E_2\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{k=n} A_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{k=n} P\left(A_k\right)\end{aligned}$$

- Prenons maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons que $P\left(A_n\right) = \frac{8}{9}\left(\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right)$.

Remarquons d'abord que si $n=1$, alors $P\left(A_1\right)=0$ car J_3 ne peut pas être éliminé au premier coup. La formule est donc vérifiée et on peut donc supposer maintenant que $n \geq 2$.
D'après l'égalité précédente, nous avons :

$$\begin{aligned}P\left(A_n\right) &= P\left(X_n = E_2\right) - P\left(X_{n-1} = E_2\right)\\ &= p_{2,7}\left(n\right) - p_{2,7}\left(n-1\right)\end{aligned}$$

Or $p_{2,7}(n)$ est le terme situé à la deuxième ligne, septième colonne de $\mathbf{\Pi}^n$, *i.e.*, d'après la question **2.d.**, le terme situé à la deuxième ligne, troisième colonne de la matrice

$$\mathbf{Q}.\left(\mathbf{I}_3+\mathbf{R}+\mathbf{R}^2+\ldots+\mathbf{R}^{n-1}\right)=\sum_{k=0}^{k=n-1}\mathbf{QR}^k$$

Ainsi, $p_{2,7}(n)$ est la somme des termes situés à la deuxième ligne, troisième colonne des matrices $\mathbf{QR}^k$, avec $1\leq k\leq n-1$. En utilisant la question **2.f.**, on obtient :

$$p_{2,7}(n)=\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{8\left(2^k-1\right)}{9^{k+1}}$$

De la même manière, on peut écrire :

$$p_{2,7}(n-1)=\sum_{k=0}^{k=n-2}\frac{8\left(2^k-1\right)}{9^{k+1}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}P\left(A_n\right)&=\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{8\left(2^k-1\right)}{9^{k+1}}-\sum_{k=0}^{k=n-2}\frac{8\left(2^k-1\right)}{9^{k+1}}\\&=\frac{8\left(2^{n-1}-1\right)}{9^n}\\&=\frac{8}{9}\left[\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right]\end{aligned}$$

- Il reste enfin à calculer $P(A)$:

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(A_n\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{9}\left[\left(\frac{2}{9}\right)^n-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]\\&=\frac{8}{9}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]\end{aligned}$$

$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{9}\right)^n$ et $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ sont deux séries géométrique de raison strictement comprise entre –1 et 1, et de sommes égales respectivement à $\frac{1}{1-\frac{2}{9}}$ et $\frac{1}{1-\frac{1}{9}}$.

Ainsi :

$$P(A) = \frac{8}{9}\left[\frac{1}{1-\frac{2}{9}} - \frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right]$$

$$= \frac{8}{9}\left[\frac{9}{7} - \frac{9}{8}\right]$$

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{7}}$$

FIN