

Modélisation du Bioréacteur

(R. Bayard, P. Buffière, S. et H. Charles, C. Costaz,, C. Pothier, C. Rigotti)

Lundi 8 juin 2020 – Durée conseillée : 60 minutes

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous pourra être sanctionnée.

- Pour répondre, cochez une case ;
- Pour corriger, décochez la case ;
- N’inscrivez rien dans l’en-tête ni dans les marges des pages ;
- Le symbole ♣ indique que le nombre de bonnes réponses proposées est indéterminé (0, 1, 2 ou plus). Son absence signifie que la question a une unique bonne réponse.

Ce QCM est à espérance nulle : réponse juste = 1 point ; pas de réponse ou réponses incohérentes = 0 point ; réponse fautive à une question avec n propositions = $-\frac{1}{n-1}$ points. Pour la plupart, les questions sont indépendantes.

Référez-vous au tutoriel pour toute information complémentaire.

Identité

Codez votre numéro d’étudiant ci-contre.

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Partie I

Question 1 ♣ Une enzyme :

- est modifiée par la réaction de transformation d’un substrat en produit
- possède une structure tridimensionnelle nécessaire à son fonctionnement
- possède un site actif constitué d’une centaine d’acides aminés
- est capable d’augmenter la vitesse d’une réaction
- est une macromolécule de type protéine

Question 2 ♣ D’après la Figure 1 ci-dessous :

- le point **A** a pour abscisse $V_{max}/2$
- il n’y a plus (ou presque) de substrat à transformer durant la phase de plateau
- le point **A** a pour ordonnée K_m (= constante de Michaelis)
- le point **A** a pour ordonnée $V_{max}/2$
- le point **A** a pour abscisse K_m
- la droite (**D**) correspond à la vitesse maximale V_{max}
- V_0 varie linéairement avec la concentration en substrat jusqu’à une limite maximale : la concentration saturante en substrat

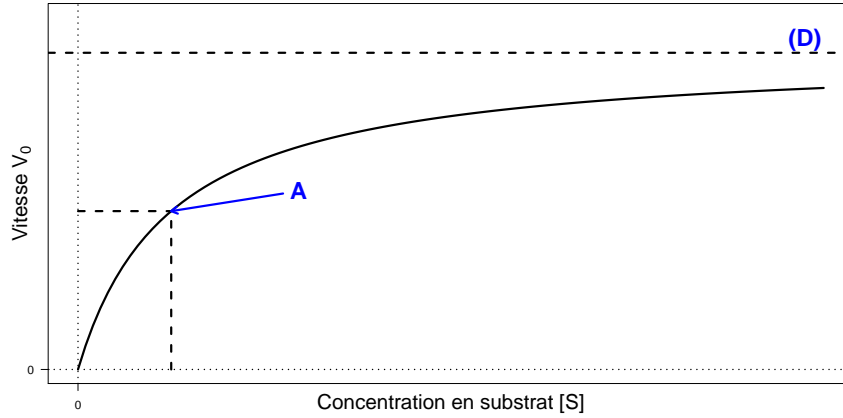


FIGURE 1 – Représentation graphique d’une courbe de

Question 3 Complétez la légende de la Figure 1 ci-dessus :

Monod
Gompertz

Verhuslt
Michaelis-Menten

Question 4 Quelle fonction R faut-il utiliser pour tracer la courbe ?

curve

nullclines

flowField

trajectory

Partie II

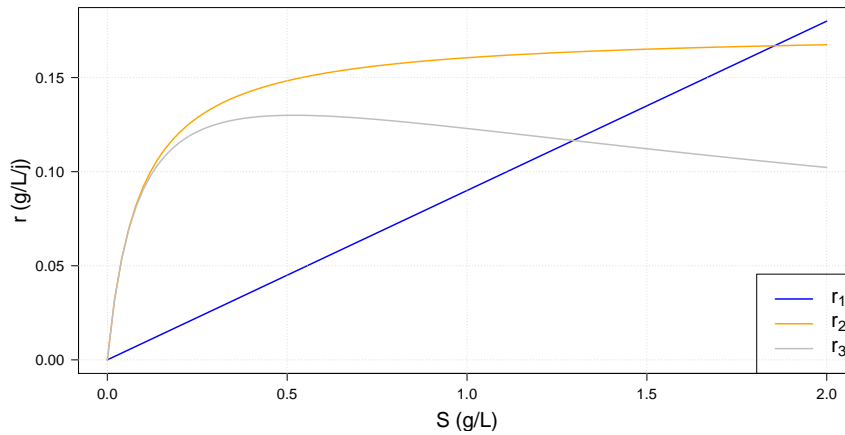


FIGURE 2 – Evolution de la vitesse d’élimination d’un substrat (notée r , en $g/L/j$) en fonction de la concentration de ce substrat (notée S , en g/L) pour différentes lois de vitesse.

Question 5 Sur la Figure 2 ci-dessus, la courbe en bleu (r_1) correspond à une loi de vitesse :
 d’ordre 2 par rapport à S
 d’ordre 1 par rapport à S
 sans ordre

Question 6 Sur la Figure 2, peut-on détecter une inhibition par le substrat ?

CORRECTION

Oui, sur r_3

Oui, sur r_2

Oui, sur r_1

Non, sur aucune des courbes

Question 7 ♣ Un réacteur ouvert parfaitement agité est :

Un réacteur dans lequel la concentration est uniforme

Un réacteur fonctionnant en continu

Un réacteur qui ne contient qu'un seul type de micro-organisme

Question 8 Un réacteur ouvert parfaitement agité de 5 L est alimenté avec un débit de 0,1 L par heure avec un réactif S dont la concentration en entrée est 2 g.L^{-1} et la concentration en sortie est $0,2 \text{ g.L}^{-1}$, en régime permanent. La vitesse d'élimination de S est égale à :

$$0,036 \text{ g.L}^{-1}.\text{h}^{-1}$$

$$90,0 \text{ g.L}^{-1}.\text{h}^{-1}$$

$$1,8 \text{ g.L}^{-1}.\text{h}^{-1}$$

Partie III

On propose de décrire la croissance bactérienne au cœur d'un bioréacteur par le modèle suivant :

$$\frac{dN(t)}{dt} = r_0 N(t) \left(1 - (\alpha N(t))^2 \right) \quad (1)$$

avec $N(t)$ la densité bactérienne au temps t , $r_0 > 0$ et $\alpha > 0$.

Question 9 ♣ Donnez les points d'équilibre de l'équation (1) :

$$\begin{aligned} N^* &= -\frac{1}{\alpha} \\ N^* &= \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^* &= -\alpha \\ N^* &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^* &= \frac{1}{\alpha} \\ N^* &= \frac{1}{\alpha^2} \end{aligned}$$

Question 10 Donnez la décomposition en éléments simple de $\frac{1}{N(1-(\alpha N)^2)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} + \frac{1}{1-\alpha N} + \frac{1}{1+\alpha N} & \qquad \frac{1}{N} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{1-\alpha N} - \frac{1}{1+\alpha N} \right) \\ \frac{1}{N} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{1-\alpha N} + \frac{1}{1+\alpha N} \right) & \qquad \frac{1}{N} + \frac{1}{1-\alpha N} - \frac{1}{1+\alpha N} \end{aligned}$$

Question 11 Donnez une primitive de $\frac{1}{1-\alpha N}$:

$$\begin{aligned} -\alpha \ln |1 - \alpha N| \\ \frac{1}{\alpha} \ln |1 - \alpha N| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha} \ln |1 - \alpha N| \\ -\ln |1 - \alpha N| \end{aligned}$$

Question 12 En déduire la solution générale de l'équation (1) pour $C \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} N(t) &= C \sqrt{(\alpha C)^2 + e^{-2r_0 t}} \\ N(t) &= \frac{C}{\sqrt{(\alpha C)^2 + e^{-2r_0 t}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{C}{\sqrt{(\alpha C)^2 + e^{2r_0 t}}} \\ N(t) &= C \sqrt{(\alpha C)^2 - e^{-2r_0 t}} \end{aligned}$$

Question 13 Donnez la limite de $N(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$:

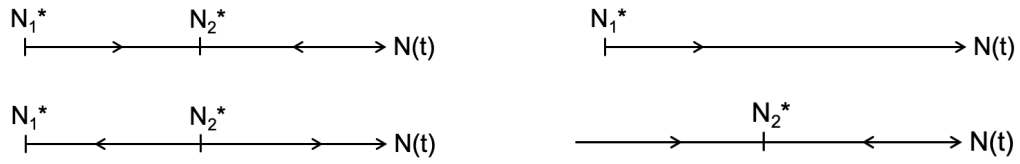
$$+\infty$$

$$0$$

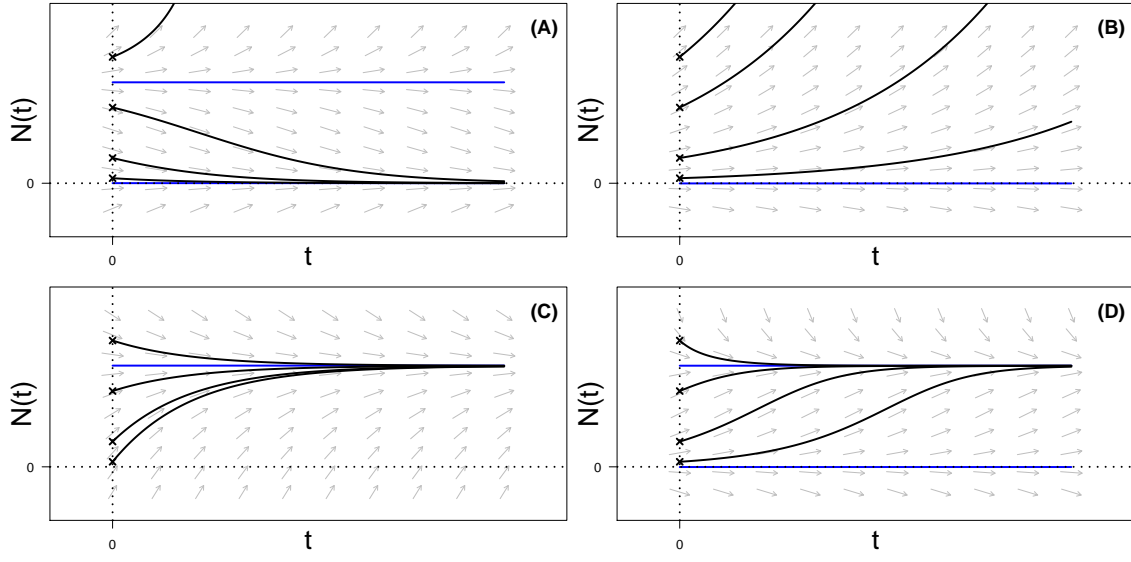
$$\frac{1}{\alpha}$$

$$C$$

Question 14 Quel est le portrait de phase associé à l'équation (1) ?



Question 15 Quelles sont les chroniques associées à l'équation (1) ?



(A) (C) (B) (D)

Question 16 Si les chroniques admettent un point d'inflexion, pour quelle valeur de N_i ?

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{3\alpha^2}, \frac{3}{\alpha^2}$$

Les chroniques n'admettent pas de point d'inflexion

Partie IV

On considère le modèle suivant pour décrire l'évolution de la biomasse bactérienne $N(t)$ au temps t , ainsi que de la concentration en substrat $S(t)$ à l'intérieur d'un chémostat :

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = \alpha_1 \left(\frac{N(t)}{1+N(t)} \right) S(t) - N(t) = f(N(t), S(t)) \\ \frac{dS(t)}{dt} = - \left(\frac{N(t)}{1+N(t)} \right) S(t) - S(t) + \alpha_2 = g(N(t), S(t)) \end{cases} \quad (2)$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.

Question 17 ♣ Quelles sont les hypothèses sous-jacentes au modèle (2) ?

- Un substrat unique permet la croissance bactérienne dans la chambre de culture
- Le taux de croissance bactérien est indépendant de la biomasse bactérienne
- La biomasse évolue linéairement en fonction du temps
- Le milieu de culture est infiniment mélangé et homogène
- La consommation en nutriments se fait en continu

Question 18 Que représente le paramètre α_2 dans le modèle (2) ?

- Le débit entrant en substrat dans la chambre de culture par unité de temps
- La consommation en substrat par les bactéries à chaque unité de temps
- La biomasse bactérienne en l'absence de substrat dans la chambre de culture
- Le taux d'élimination du substrat par le flux de sortie

Question 19 ♣ Quels sont les points d'équilibre du modèle (2) ?

$$\begin{aligned} (N_1^*, S_1^*) &= (0, 0) & (N_2^*, S_2^*) &= \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 + 1}{2}, \frac{\alpha_1 \alpha_2 - 1}{2\alpha_1} \right) \\ (N_1^*, S_1^*) &= (\alpha_2, 0) & (N_2^*, S_2^*) &= \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 - 1}{2}, \frac{\alpha_1 \alpha_2 + 1}{2\alpha_1} \right) \\ (N_2^*, S_2^*) &= \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 - 1}{2\alpha_1}, \frac{\alpha_1 \alpha_2 + 1}{2} \right) & (N_1^*, S_1^*) &= (0, \alpha_2) \end{aligned}$$

Question 20 ♣ A quelle(s) condition(s) sur les paramètres du modèle (2) le chimostat se comporte-t-il comme attendu ?

$$\alpha_1 \alpha_2 < 1 \qquad \alpha_1 \alpha_2 > 1 \qquad \alpha_2 < 1 \qquad \alpha_1 > 1$$

Question 21 Donnez les dérivées partielles des fonctions $f(N, S)$ et $g(N, S)$ qui définissent les EDO du modèle (2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(N, S)}{\partial N} &= \frac{\alpha_1 N}{1+N} & \frac{\partial f(N, S)}{\partial S} &= \frac{\alpha_1 S}{(1+N)^2} - 1 & \frac{\partial g(N, S)}{\partial N} &= -\frac{N}{1+N} - 1 & \frac{\partial g(N, S)}{\partial S} &= -\frac{S}{(1+N)^2} \\ \frac{\partial f(N, S)}{\partial N} &= \frac{\alpha_1 N}{1+N} & \frac{\partial f(N, S)}{\partial S} &= \frac{\alpha_1 S}{(1+N)^2} - 1 & \frac{\partial g(N, S)}{\partial N} &= -\frac{S}{(1+N)^2} & \frac{\partial g(N, S)}{\partial S} &= -\frac{N}{1+N} - 1 \\ \frac{\partial f(N, S)}{\partial N} &= \frac{\alpha_1 N}{1+N} & \frac{\partial f(N, S)}{\partial S} &= -\frac{S}{(1+N)^2} & \frac{\partial g(N, S)}{\partial N} &= \frac{\alpha_1 S}{(1+N)^2} - 1 & \frac{\partial g(N, S)}{\partial S} &= -\frac{N}{1+N} - 1 \\ \frac{\partial f(N, S)}{\partial N} &= \frac{\alpha_1 S}{(1+N)^2} - 1 & \frac{\partial f(N, S)}{\partial S} &= \frac{\alpha_1 N}{1+N} & \frac{\partial g(N, S)}{\partial N} &= -\frac{S}{(1+N)^2} & \frac{\partial g(N, S)}{\partial S} &= -\frac{N}{1+N} - 1 \end{aligned}$$

Question 22 Déduire de la Figure 3 la valeur numérique du paramètre α_2 .

$$\alpha_2 = 1.75 \qquad \alpha_2 = 0.5 \qquad \alpha_2 = 2 \qquad \alpha_2 = 1.5$$

Question 23 Déduire de la Figure 3 les coordonnées numériques du point d'équilibre (N_2^*, S_2^*) .

$$\begin{aligned} (N_2^*, S_2^*) &= (1.25, 2) & (N_2^*, S_2^*) &= (0, 0.5) \\ (N_2^*, S_2^*) &= (0, 2) & (N_2^*, S_2^*) &= (1.5, 1.25) \end{aligned}$$

Question 24 De quelle couleur est(sont) l'(les)isocline(s) nulle(s) verticale(s) ?

$$\text{bleue(s)} \qquad \text{rouge(s)}$$

Question 25 Quelle est(sont) l'(les)équation(s) de l'(des)isocline(s) nulle(s) horizontale(s) ?

$$\begin{aligned} S &= \alpha_2 \frac{N-1}{2N-1} & S &= \alpha_2 \frac{N+1}{2N+1} \\ N &= 0 & S &= \alpha_2 \frac{N-1}{2N-1} \end{aligned}$$

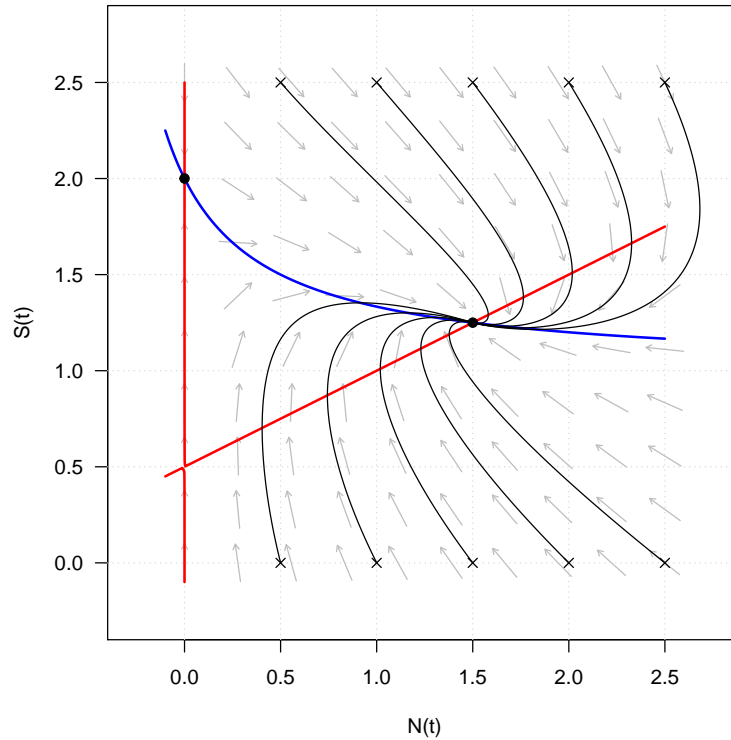


FIGURE 3 – Portrait de phase du chémostat tel que décrit par le modèle (2).

Question 26 Vers quelle limite exacte tend la courbe bleue ?

$\frac{1}{\alpha_1}$	$+\infty$	$\frac{\alpha_2}{2}$	0
----------------------	-----------	----------------------	-----

Question 27 Vers quel point sur la Figure 3 les trajectoires convergeront-elles si $\alpha_1 = 0.25$?

(0, 2)	(0, 0.5)	(1.5, 1.75)	(1.75, 2)
--------	----------	-------------	-----------

Partie V

Question 28 Soit la réaction réversible $R_1 : A + B \leftrightarrow C + D$ et la réaction totale $R_2 : D \rightarrow E$. On suppose que les quantités de réactifs A , B , C , D et E sont non nulles au départ et que les constantes de vitesse des réactions sont non nulles. Laquelle de ces trois propositions est vraie :

La concentration en composé C ne peut qu'augmenter à partir de l'instant de départ
 Avant l'équilibre la concentration en composé C peut augmenter ou diminuer dans le temps, mais quand on atteint l'équilibre la concentration en C est toujours plus grande que la concentration en C de départ

A l'équilibre la concentration en E est toujours plus grande que la concentration en C de départ

Question 29 Si on calcule sur ordinateur le résultat de l'expression

$$1.4 + 0.6 - 1.0$$

laquelle de ces trois propositions est vraie :

Le résultat est toujours un nombre entier

Le résultat est toujours égal à un

Le résultat n'est pas toujours égal à un