Modélisation du Bioréacteur

(R. Bayard, P. Buffière, S. et H. Charles, C. Costaz,, C. Pothier, C. Rigotti)

Lundi 8 juin 2020 – Durée conseillée : 60 minutes

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous pourra être sanctionnée.

— Pour répondre, cochez une case ;

— Pour corriger, décochez la case ;

— N'inscrivez rien dans l'en-tête ni dans les marges des pages ;

— Le symbole ♣ indique que le nombre de bonnes réponses proposées est indéterminé (0, 1, 2 ou plus). Son absence signifie que la question a une unique bonne réponse.

Ce QCM est à espérance nulle : réponse juste = 1 point ; pas de réponse ou réponses incohérentes = 0 point ; réponse fausse à une question avec n propositions = $-\frac{1}{n-1}$ points. Pour la plupart, les questions sont indépendantes.

Référez-vous au tutoriel pour toute information complémentaire.

Identité

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Partie I

Question 1 ♣ Une enzyme :

- ☐ est modifiée par la réaction de transformation d'un substrat en produit
- ☐ possède une structure tridimensionnelle nécessaire à son fonctionnement
- ☐ possède un site actif constitué d'une centaine d'acides aminés
- ☐ est capable d'augmenter la vitesse d'une réaction
- ☐ est une macromolécule de type protéine

Question 2 ♣ D'après la Figure 1 ci-dessous :

- ☐ le point **A** a pour abscisse $V_{max}/2$
- ☐ il n'y a plus (ou presque) de substrat à transformer durant la phase de plateau
- ☐ le point **A** a pour ordonnée K_m (= constante de Michaelis)
- ☐ le point **A** a pour ordonnée $V_{max}/2$
- ☐ le point **A** a pour abscisse K_m
- ☐ la droite **(D)** correspond à la vitesse maximale V_{max}
- ☐ V_0 varie linéairement avec la concentration en substrat jusqu'à une limite maximale : la concentration saturante en substrat

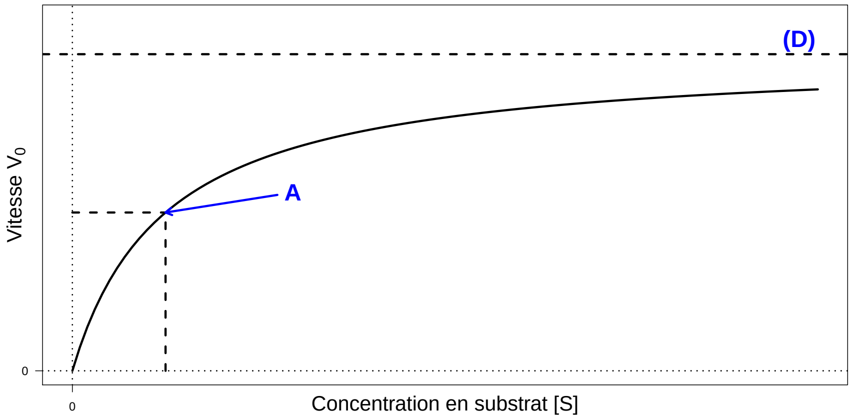


FIGURE 1 – Représentation graphique d'une courbe de ....

Question 3 Complétez la légende de la Figure 1 ci-dessus :

- ☐ Monod
- ☐ Gompertz
- ☐ Verhuslt
- ☐ Michaelis-Menten

Question 4 Quelle fonction `R` faut-il utiliser pour tracer la courbe ?

- ☐ `curve`
- ☐ `nullclines`
- ☐ `flowField`
- ☐ `trajectory`

Partie II

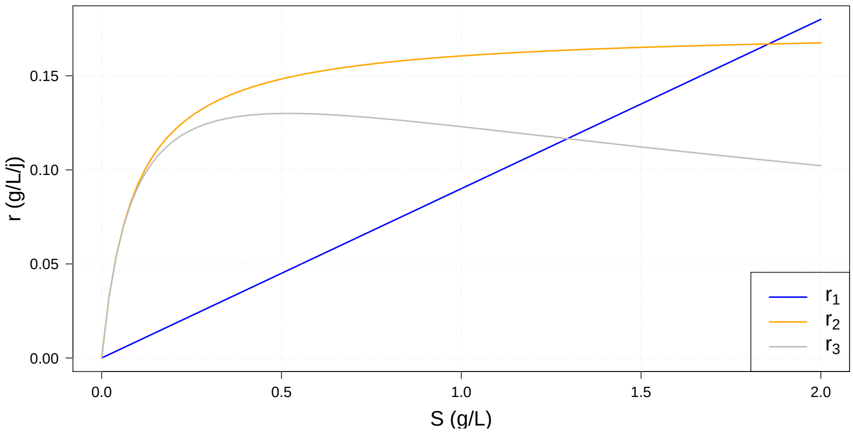


FIGURE 2 – Evolution de la vitesse d'élimination d'un substrat (notée r, en $g/L/j$) en fonction de la concentration de ce substrat (notée S, en g/L) pour différentes lois de vitesse.

Question 5 Sur la Figure 2 ci-dessus, la courbe en bleu (r_1) correspond à une loi de vitesse :

- ☐ d'ordre 2 par rapport à S
- ☐ d'ordre 1 par rapport à S
- ☐ sans ordre

Question 6 Sur la Figure 2, peut-on détecter une inhibition par le substrat ?

☐ Oui, sur r_3
☐ Oui, sur r_2
☐ Oui, sur r_1
☐ Non, sur aucune des courbes

Question 7 ♣ Un réacteur ouvert parfaitement agité est :

☐ Un réacteur dans lequel la concentration est uniforme
☐ Un réacteur fonctionnant en continu
☐ Un réacteur qui ne contient qu'un seul type de micro-organisme

Question 8 Un réacteur ouvert parfaitement agité de 5 L est alimenté avec un débit de 0,1 L par heure avec un réactif S dont la concentration en entrée est 2 $g.L^{-1}$ et la concentration en sortie est 0,2 $g.L^{-1}$, en régime permanent. La vitesse d'élimination de S est égale à :

☐ 0,036 $g.L^{-1}.h^{-1}$
☐ 90,0 $g.L^{-1}.h^{-1}$
☐ 1,8 $g.L^{-1}.h^{-1}$

Partie III

On propose de décrire la croissance bactérienne au cœur d'un bioréacteur par le modèle suivant :

$$\frac{dN(t)}{dt} = r_0 N(t)\left(1-(\alpha N(t))^2\right) \qquad (1)$$

avec $N(t)$ la densité bactérienne au temps t, $r_0 > 0$ et $\alpha > 0$.

Question 9 ♣ Donnez les points d'équilibre de l'équation (1) :

☐ $N^* = -\frac{1}{\alpha}$
☐ $N^* = -\alpha$
☐ $N^* = \frac{1}{\alpha}$
☐ $N^* = \alpha$
☐ $N^* = 0$
☐ $N^* = \frac{1}{\alpha^2}$

Question 10 Donnez la décomposition en éléments simple de $\frac{1}{N(1-(\alpha N)^2)}$:

☐ $\frac{1}{N} + \frac{1}{1-\alpha N} + \frac{1}{1+\alpha N}$
☐ $\frac{1}{N} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha N} - \frac{1}{1+\alpha N}\right)$
☐ $\frac{1}{N} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha N} + \frac{1}{1+\alpha N}\right)$
☐ $\frac{1}{N} + \frac{1}{1-\alpha N} - \frac{1}{1+\alpha N}$

Question 11 Donnez une primitive de $\frac{1}{1-\alpha N}$:

☐ $-\alpha \ln|1-\alpha N|$
☐ $-\frac{1}{\alpha} \ln|1-\alpha N|$
☐ $\frac{1}{\alpha} \ln|1-\alpha N|$
☐ $-\ln|1-\alpha N|$

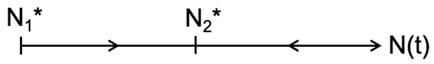
Question 12 En déduire la solution générale de l'équation (1) pour $C \in \mathbb{R}$:

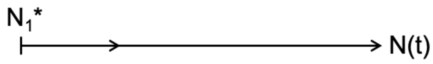
☐ $N(t) = C\sqrt{(\alpha C)^2 + e^{-2r_0 t}}$
☐ $N(t) = \frac{C}{\sqrt{(\alpha C)^2 + e^{2r_0 t}}}$
☐ $N(t) = \frac{C}{\sqrt{(\alpha C)^2 + e^{-2r_0 t}}}$
☐ $N(t) = C\sqrt{(\alpha C)^2 - e^{-2r_0 t}}$

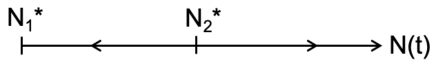
Question 13 Donnez la limite de $N(t)$ lorsque $t \to +\infty$:

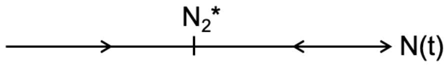
☐ $+\infty$
☐ 0
☐ $\frac{1}{\alpha}$
☐ C

Question 14 Quel est le portrait de phase associé à l'équation (1) ?

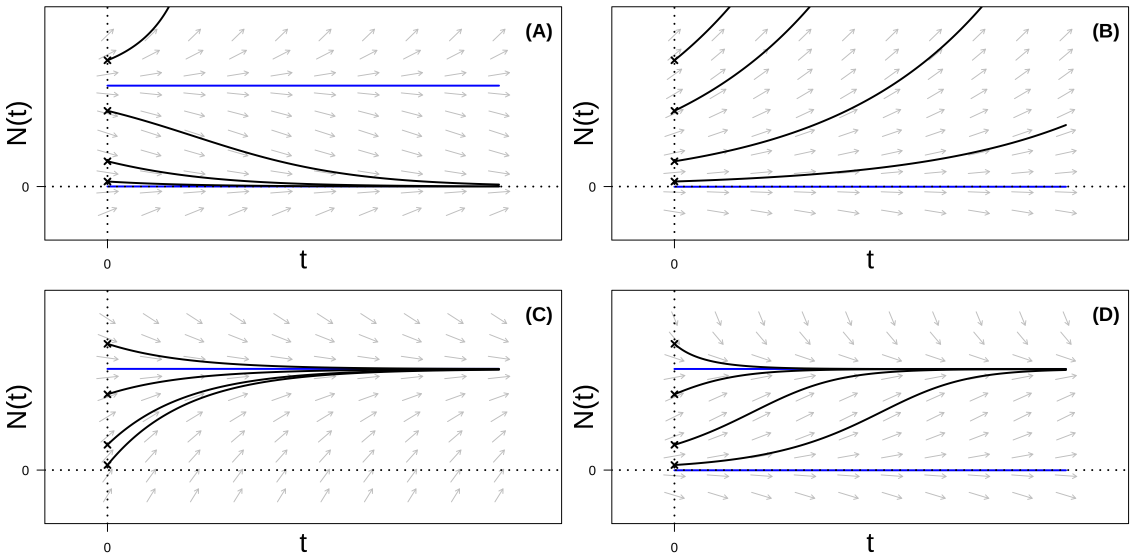
☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

Question 15 Quelles sont les chroniques associées à l'équation (1) ?



☐ **(A)** ☐ **(C)** ☐ **(B)** ☐ **(D)**

Question 16 Si les chroniques admettent un point d'inflexion, pour quelle valeur de N_i ?

☐ $\frac{1}{\alpha}$
☐ $\frac{1}{3\alpha^2}$
☐ $\frac{3}{\alpha^2}$
☐ Les chroniques n'admettent pas de point d'inflexion

Partie IV

On considère le modèle suivant pour décrire l'évolution de la biomasse bactérienne $N(t)$ au temps t, ainsi que de la concentration en substrat $S(t)$ à l'intérieur d'un chémostat :

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = \alpha_1 \left(\frac{N(t)}{1+N(t)}\right) S(t) - N(t) = f\left(N(t), S(t)\right) \\ \\ \frac{dS(t)}{dt} = -\left(\frac{N(t)}{1+N(t)}\right) S(t) - S(t) + \alpha_2 = g\left(N(t), S(t)\right) \end{cases} \qquad (2)$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.

Question 17 ♣ Quelles sont les hypothèses sous-jacentes au modèle (2) ?

- ☐ Un substrat unique permet la croissance bactérienne dans la chambre de culture
- ☐ Le taux de croissance bactérien est indépendant de la biomasse bactérienne
- ☐ La biomasse évolue linéairement en fonction du temps
- ☐ Le milieu de culture est infiniment mélangé et homogène
- ☐ La consommation en nutriments se fait en continu

Question 18 Que représente le paramètre α_2 dans le modèle (2) ?

- ☐ Le débit entrant en substrat dans la chambre de culture par unité de temps
- ☐ La consommation en substrat par les bactéries à chaque unité de temps
- ☐ La biomasse bactérienne en l'absence de substrat dans la chambre de culture
- ☐ Le taux d'élimination du substrat par le flux de sortie

Question 19 ♣ Quels sont les points d'équilibre du modèle (2) ?

- ☐ $(N_1^*, S_1^*) = (0, 0)$
- ☐ $(N_1^*, S_1^*) = (\alpha_2, 0)$
- ☐ $(N_2^*, S_2^*) = \left(\frac{\alpha_1\alpha_2-1}{2\alpha_1}, \frac{\alpha_1\alpha_2+1}{2}\right)$
- ☐ $(N_2^*, S_2^*) = \left(\frac{\alpha_1\alpha_2+1}{2}, \frac{\alpha_1\alpha_2-1}{2\alpha_1}\right)$
- ☐ $(N_2^*, S_2^*) = \left(\frac{\alpha_1\alpha_2-1}{2}, \frac{\alpha_1\alpha_2+1}{2\alpha_1}\right)$
- ☐ $(N_1^*, S_1^*) = (0, \alpha_2)$

Question 20 ♣ A quelle(s) condition(s) sur les paramètres du modèle (2) le chémostat se comporte-t-il comme attendu ?

- ☐ $\alpha_1\alpha_2 < 1$
- ☐ $\alpha_1\alpha_2 > 1$
- ☐ $\alpha_2 < 1$
- ☐ $\alpha_1 > 1$

Question 21 Donnez les dérivées partielles des fonctions $f(N, S)$ et $g(N, S)$ qui définissent les EDO du modèle (2).

- ☐ $\frac{\partial f(N,S)}{\partial N} = \frac{\alpha_1 N}{1+N}$ $\quad\frac{\partial f(N,S)}{\partial S} = \frac{\alpha_1 S}{(1+N)^2} - 1$ $\quad\frac{\partial g(N,S)}{\partial N} = -\frac{N}{1+N} - 1$ $\quad\frac{\partial g(N,S)}{\partial S} = -\frac{S}{(1+N)^2}$
- ☐ $\frac{\partial f(N,S)}{\partial N} = \frac{\alpha_1 N}{1+N}$ $\quad\frac{\partial f(N,S)}{\partial S} = \frac{\alpha_1 S}{(1+N)^2} - 1$ $\quad\frac{\partial g(N,S)}{\partial N} = -\frac{S}{(1+N)^2}$ $\quad\frac{\partial g(N,S)}{\partial S} = -\frac{N}{1+N} - 1$
- ☐ $\frac{\partial f(N,S)}{\partial N} = \frac{\alpha_1 N}{1+N}$ $\quad\frac{\partial f(N,S)}{\partial S} = -\frac{S}{(1+N)^2}$ $\quad\frac{\partial g(N,S)}{\partial N} = \frac{\alpha_1 S}{(1+N)^2} - 1$ $\quad\frac{\partial g(N,S)}{\partial S} = -\frac{N}{1+N} - 1$
- ☐ $\frac{\partial f(N,S)}{\partial N} = \frac{\alpha_1 S}{(1+N)^2} - 1$ $\quad\frac{\partial f(N,S)}{\partial S} = \frac{\alpha_1 N}{1+N}$ $\quad\frac{\partial g(N,S)}{\partial N} = -\frac{S}{(1+N)^2}$ $\quad\frac{\partial g(N,S)}{\partial S} = -\frac{N}{1+N} - 1$

Question 22 Déduire de la Figure 3 la valeur numérique du paramètre α_2.

- ☐ $\alpha_2 = 1.75$
- ☐ $\alpha_2 = 0.5$
- ☐ $\alpha_2 = 2$
- ☐ $\alpha_2 = 1.5$

Question 23 Déduire de la Figure 3 les coordonnées numériques du point d'équilibre (N_2^*, S_2^*).

- ☐ $(N_2^*, S_2^*) = (1.25, 2)$
- ☐ $(N_2^*, S_2^*) = (0, 2)$
- ☐ $(N_2^*, S_2^*) = (0, 0.5)$
- ☐ $(N_2^*, S_2^*) = (1.5, 1.25)$

Question 24 De quelle couleur est(sont) l'(les)isocline(s) nulle(s) verticale(s) ?

- ☐ bleue(s)
- ☐ rouge(s)

Question 25 Quelle est(sont) l'(les)équation(s) de l'(des)isocline(s) nulle(s) horizontale(s) ?

- ☐ $S = \alpha_2 \frac{N-1}{2N-1}$
- ☐ $N = 0$
- ☐ $S = \alpha_2 \frac{N+1}{2N+1}$
- ☐ $S = \alpha_2 \frac{N-1}{2N-1}$

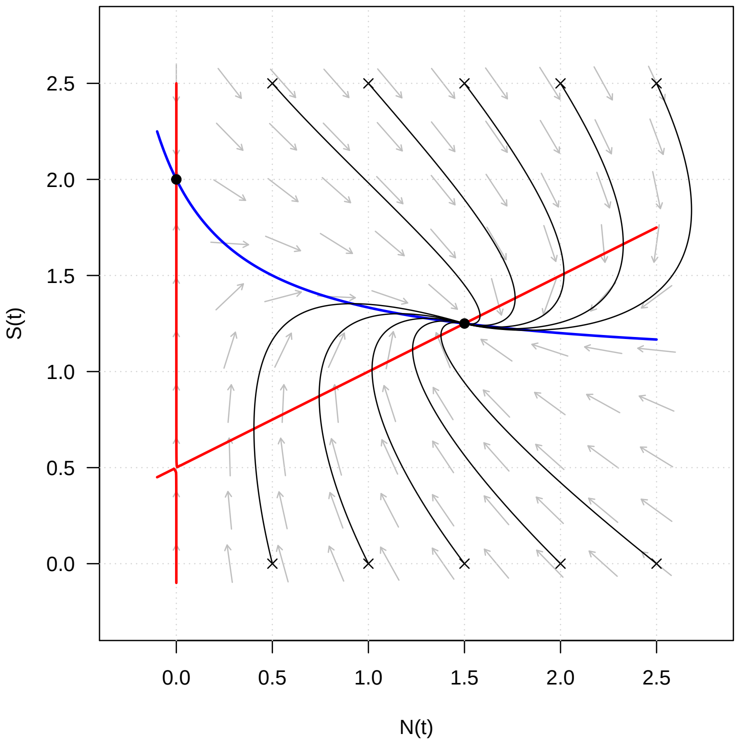


FIGURE 3 – Portrait de phase du chémostat tel que décrit par le modèle (2).

Question 26 Vers quelle limite exacte tend la courbe bleue ?

☐ $\frac{1}{\alpha_1}$ ☐ $+\infty$ ☐ $\frac{\alpha_2}{2}$ ☐ 0

Question 27 Vers quel point sur la Figure 3 les trajectoires convergeront-elles si $\alpha_1 = 0.25$?

☐ $(0, 2)$ ☐ $(0, 0.5)$ ☐ $(1.5, 1.75)$ ☐ $(1.75, 2)$

Partie V

Question 28 Soit la réaction réversible $R_1 : A + B \leftrightarrow C + D$ et la réaction totale $R_2 : D \rightarrow E$. On suppose que les quantités de réactifs A, B, C, D et E sont non nulles au départ et que les constantes de vitesse des réactions sont non nulles. Laquelle de ces trois propositions est vraie :

- ☐ La concentration en composé C ne peut qu'augmenter à partir de l'instant de départ
- ☐ Avant l'équilibre la concentration en composé C peut augmenter ou diminuer dans le temps, mais quand on atteint l'équilibre la concentration en C est toujours plus grande que la concentration en C de départ
- ☐ A l'équilibre la concentration en E est toujours plus grande que la concentration en C de départ

Question 29 Si on calcule sur ordinateur le résultat de l'expression

$$1.4 + 0.6 - 1.0$$

laquelle de ces trois propositions est vraie :

- ☐ Le résultat est toujours un nombre entier
- ☐ Le résultat est toujours égal à un
- ☐ Le résultat n'est pas toujours égal à un