

# Biologie Mathématique et Modélisation

## Mardi 29 mai 2018 - Durée : 2 heures

### Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique.

- Pour cocher une case, remplissez la en noir (■) en utilisant un stylo noir.
- Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex®). Ne la redessinez pas.
- N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
- Le symbole ♣ indique que le nombre de bonnes réponses proposées est indéterminé (0, 1, 2, ...).  
Son absence signifie que la question a une unique bonne réponse.

Il s'agit d'un QCM est à espérance nulle : 15 questions,  $k = 1$  point par question ; pas de réponse ou réponses incohérentes : 0 point ; Réponse juste : 1 point ; réponse fausse à une question avec  $n$  réponses proposées :  $-\frac{k}{n-1}$  points.

### Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

Numéro d'étudiant :

<input type="checkbox"/>	0																		
<input type="checkbox"/>	1																		
<input type="checkbox"/>	2																		
<input type="checkbox"/>	3																		
<input type="checkbox"/>	4																		
<input type="checkbox"/>	5																		
<input type="checkbox"/>	6																		
<input type="checkbox"/>	7																		
<input type="checkbox"/>	8																		
<input type="checkbox"/>	9																		

## 1 Partie I : questionnaire à choix multiples

**Question 1 ♣** Soit  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$  avec  $\mathbf{A}$  une matrice de dimension 2 telle que  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . A quelle(s) condition(s) pourra-t-on dire que  $\mathbf{X}^*$  est asymptotiquement stable ?

- |                                                                 |                                       |                                                      |
|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> $\text{tr}(\mathbf{A}) < 0$ | <input type="checkbox"/> $\Delta < 0$ | <input type="checkbox"/> $\det(\mathbf{A}) < 0$      |
| <input checked="" type="checkbox"/> $\det(\mathbf{A}) > 0$      | <input type="checkbox"/> $\Delta > 0$ | <input type="checkbox"/> $\text{tr}(\mathbf{A}) > 0$ |

**Question 2 ♣** Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont sous forme de Jordan ?

- |                                                                                     |                                                                                      |                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| <input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$             | <input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$             | <input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$          |

**Question 3** Parmi les matrices suivantes, laquelle correspond à un point d'équilibre origine qui est foyer instable ?

- |                                                                                     |                                                                           |                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ | <input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ | <input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   |
| <input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$             | <input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  | <input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ |

**Question 4** Parmi les matrices suivantes, laquelle correspond à un point d'équilibre origine qui est nœud dégénéré asymptotiquement stable ?

## CORRECTION

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

**Question 5 ♣** Quelle sont les matrices canoniques associées à une infinité de points d'équilibre :

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Question 6** Quelle est la matrice canonique associée à une crête :

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Question 7 ♣** Parmi les relations suivantes concernant les coordonnées polaires, lesquelles sont vraies ?

$x = r \sin \theta$  et  $y = r \cos \theta$

$r^2 = x^2 + y^2$

$\tan \theta = \frac{x}{y}$

$\tan \theta = \frac{y}{x}$

$x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$

$r^2 = x^2 - y^2$

Soit le système dynamique :

$$(S_1) \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$

**Question 8** Laquelle des fonctions suivantes est une intégrale première pour  $(S_1)$  ?

$H(x, y) = \frac{1}{2}x^2y$

$H(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y$

$H(x, y) = xy$

Dans les deux questions suivantes, on considère le système suivant :

$$(S_2) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 6x^2y \end{cases}$$

**Question 9** Soit  $V(x, y) = x^2 + y^2$ .

Étudiez les variations de  $V(x, y)$  le long des trajectoires de  $(S_2)$ .

$\dot{V} = -12x^2y^2$

$\dot{V} = 12x^2y$

$\dot{V} = 6xy^2$

$\dot{V} = -12xy$

$\dot{V} = -6x^2y^2$

$\dot{V} = -6xy$

**Question 10** Cochez ce qui est vrai :

$V(x, y)$  est une fonction de Lyapunov faible pour  $(S_2)$

$V(x, y)$  est une fonction de Lyapunov forte pour  $(S_2)$

$V(x, y)$  n'est pas une fonction définie positive

**Question 11** Comment montrer que le point d'équilibre  $(0, 0)$  de  $(S_2)$  est asymptotiquement stable ?

Avec le théorème de Lyapunov pour fonctions fortes

Avec le théorème de Barbashin-Krasovskii-La Salle

Avec le théorème de Četaev

$(0, 0)$  n'est pas asymptotiquement stable

Dans les deux questions suivantes, on considère le système dynamique suivant :

$$(S_3) \begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x (x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y (x^2 + y^2) \end{cases}$$

**Question 12** L'équivalent de  $(S_3)$  en coordonnées polaires s'écrit :

- |                                     |                                                                               |                          |                                                                               |
|-------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | $\begin{cases} \dot{r} = \alpha r (1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$  | <input type="checkbox"/> | $\begin{cases} \dot{r} = \alpha r (r^2 - 1) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}$ |
| <input type="checkbox"/>            | $\begin{cases} \dot{r} = \alpha r (1 - r^2) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}$ | <input type="checkbox"/> | $\begin{cases} \dot{r} = \alpha (1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$    |
| <input type="checkbox"/>            | $\begin{cases} \dot{r} = \alpha r (r^2 - 1) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$  | <input type="checkbox"/> | $\begin{cases} \dot{r} = r (1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$         |

**Question 13** Si  $\alpha = 0$ , à quelle classe d'équivalence appartient le point d'équilibre  $(0, 0)$  de  $(S_3)$  ?

- |                                                            |                                                         |
|------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> Centres                | <input type="checkbox"/> Flux                           |
| <input type="checkbox"/> Équilibre instable                | <input type="checkbox"/> Vallée                         |
| <input type="checkbox"/> Équilibre asymptotiquement stable | <input type="checkbox"/> Crête                          |
| <input type="checkbox"/> Points selle                      | <input type="checkbox"/> Infinité de points d'équilibre |

**Question 14** Si  $\alpha > 0$ , à quelle classe d'équivalence appartient le point d'équilibre  $(0, 0)$  de  $(S_3)$  ?

- |                                                            |                                                         |
|------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Centres                           | <input type="checkbox"/> Flux                           |
| <input checked="" type="checkbox"/> Équilibre instable     | <input type="checkbox"/> Vallée                         |
| <input type="checkbox"/> Équilibre asymptotiquement stable | <input type="checkbox"/> Crête                          |
| <input type="checkbox"/> Points selle                      | <input type="checkbox"/> Infinité de points d'équilibre |

**Question 15** Si  $\alpha < 0$ , le système dynamique  $(S_3)$  admet un cycle limite asymptotiquement stable ?

- Faux  
 Vrai

## 2 Partie II : évolution temporelle d'une épidémie

On considère une épidémie où l'augmentation de la quantité de plantes infectées en fonction du temps dépend de l'inoculum (i.e., la quantité de plantes infectées à  $t = 0$ ) et de la quantité de matière végétale restant saine, donc susceptible d'être contaminée, au temps  $t$ . On peut écrire cela mathématiquement :

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx_0(1 - x(t))$$

avec  $x(t)$  la proportion de plantes infectées au temps  $t$ ,  $x_0$  l'inoculum et  $r > 0$  le coefficient d'efficacité de l'inoculum.

**Question 16** Quelle est la solution générale de l'équation différentielle ?

- |                                     |                                  |                          |                              |
|-------------------------------------|----------------------------------|--------------------------|------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | $x(t) = 1 - (1 - x_0)e^{-rx_0t}$ | <input type="checkbox"/> | $x(t) = (1 + x_0)e^{-rx_0t}$ |
| <input type="checkbox"/>            | $x(t) = (1 - x_0)e^{-rx_0t}$     | <input type="checkbox"/> | $x(t) = x_0e^{-rx_0t}$       |

**Question 17** Quel(s) est(sont) le(s) point(s) d'équilibre ?

- |                                     |             |                          |                            |                          |                              |
|-------------------------------------|-------------|--------------------------|----------------------------|--------------------------|------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | $x_1^* = 1$ | <input type="checkbox"/> | $x_1^* = x_0$              | <input type="checkbox"/> | $x_1^* = x_0$ et $x_2^* = 1$ |
| <input type="checkbox"/>            | $x_1^* = 0$ | <input type="checkbox"/> | $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 1$ | <input type="checkbox"/> | $x_1^* = 0$ et $x_2^* = x_0$ |

**Question 18** Quelle est la limite de  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  ?

- 1  
 0

- $+\infty$   
  $x(t)$  n'a pas de limite

**Question 19** Les courbes  $x(t)$  présentent-elles un point d'inflexion ?

- Non  
 Oui

**Question 20** Le point d'équilibre non trivial est-il asymptotiquement stable ?

- Oui  
 Non

**Question 21** Quelle interprétation pouvez-vous faire du résultat précédent ? L'hypothèse selon laquelle l'évolution de  $x(t)$  dépend de l'inoculum est-elle vérifiée ? Justifiez.  0   $\frac{1}{2}$   1

Quelle que soit la condition initiale,  $x(t)$  tend vers 1 c'est-à-dire toutes les plantes sont infectées. Le modèle ne traduit pas l'hypothèse de départ selon laquelle l'évolution de  $x(t)$  dépend de l'inoculum. L'inoculum influence seulement la vitesse avec laquelle on atteint l'équilibre.

### 3 Partie III : système dynamique

On considère le modèle défini par :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -4x(t) - 5y(t) + \frac{6y(t)}{1+x^2(t)} \end{cases}$$

**Question 22** Déterminez les points d'équilibre du système.  0   $\frac{1}{2}$   1

Unique point d'équilibre : (0, 0)

**Question 23** Donnez la matrice jacobienne du système.

0   $\frac{1}{2}$   1

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 - \frac{12x}{(1+x^2)^2} & -5 + \frac{6}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

**Question 24** Donnez la matrice jacobienne au point d'équilibre  $(0, 0)$ . Que pouvez-vous en conclure quant à sa stabilité et sa nature ?

0   $\frac{1}{2}$   1   $\frac{3}{2}$   2

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule  $\det \mathbf{J}_{(0,0)} = 4 > 0$

On calcule  $\text{tr} \mathbf{J}_{(0,0)} = 1 > 0$

On calcule  $\Delta \mathbf{J}_{(0,0)} = -15 < 0$

On en conclut que  $(0, 0)$  est un **foyer instable**.

**Question 25** Soit  $V(x, y) = 2x^2 + \frac{y^2}{2}$ . Montrez que la fonction  $V(x, y)$  est définie positive.

0   $\frac{1}{2}$   1

On vérifie aisément que  $V(x, y) > 0$  pour tout  $(x, y) \neq (0, 0)$  et que  $V(0, 0) = 0$ .

## CORRECTION

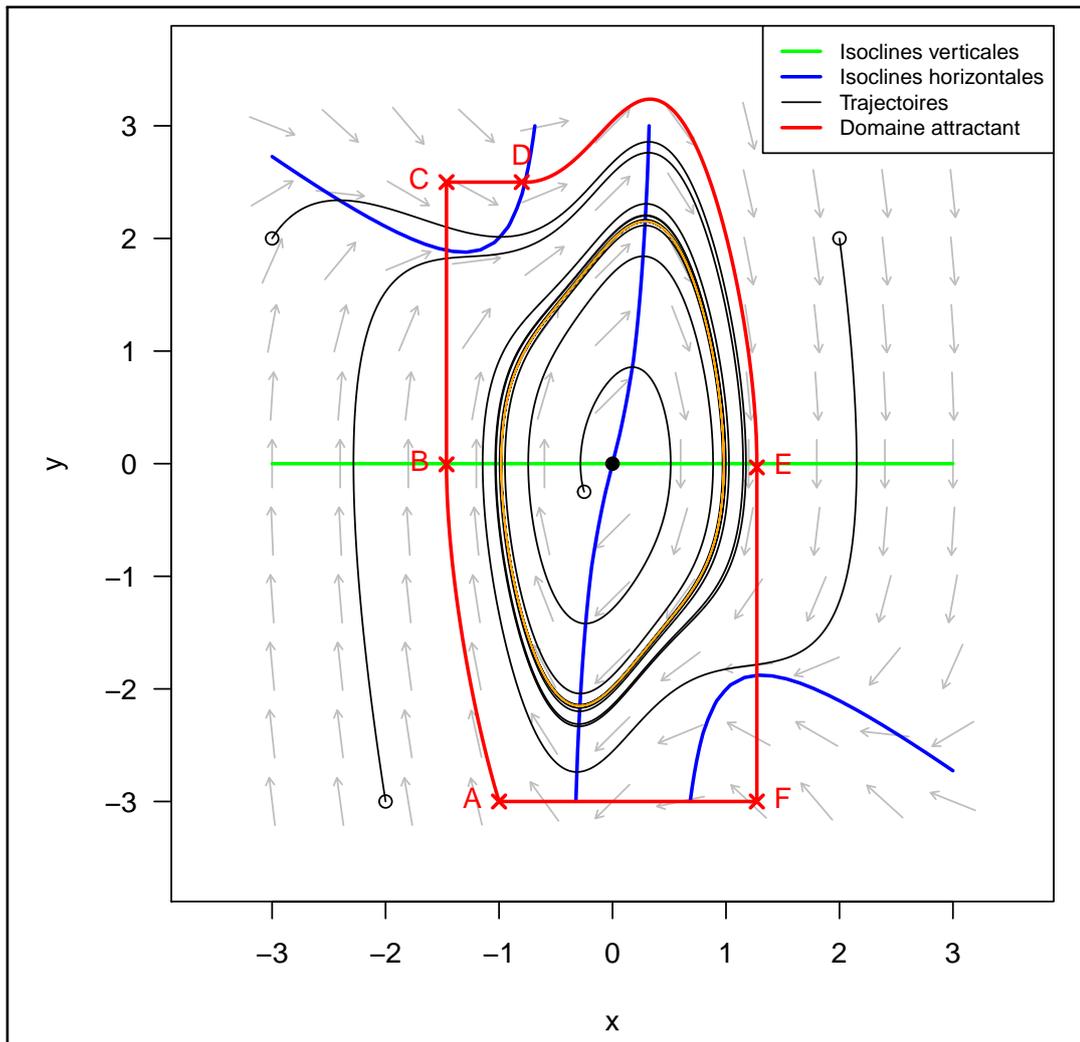
**Question 26** Soit  $D_1$  le domaine défini par  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 < \frac{1}{5}\}$ . Calculez  $\frac{dV}{dt}$  et déterminez son signe sur  $D_1$ . Que pouvez-vous en conclure? Justifiez.

0   $\frac{1}{2}$   1   $\frac{3}{2}$   2

On obtient  $\frac{dV}{dt} = \frac{y^2}{1+x^2}(1-5x^2)$ , et on vérifie que  $\frac{dV}{dt} > 0$  sur  $D_1$ . D'après le théorème de Lyapunov, on peut en conclure que le point d'équilibre  $(0, 0)$  est instable.  
Remarque : on le savait déjà de par la linéarisation question 24.

**Question 27** Reportez sur le plan de phase ci-dessous les isoclines horizontales (en bleu) et verticales (en vert), les points d'équilibre et les vecteurs vitesse, dont vous justifierez de l'orientation.

Complétez la légende.

 0     $\frac{1}{2}$     1     $\frac{3}{2}$     2     $\frac{5}{2}$     3


**Question 28** À partir du portrait de phase ci-dessous, proposez un domaine attractant que vous justifierez. Dessinez-le en rouge.

 0     $\frac{1}{2}$     1     $\frac{3}{2}$     2

Sur le graphe ci-dessus, le domaine ABCDEF est attractant. Il est défini par morceaux :

- $[AB]$  : morceau de trajectoire au départ de A ;
- $[BC]$  : segment vertical ;
- $[CD]$  : segment horizontal ;
- $[DE]$  : morceau de trajectoire au départ de D ;
- $[EF]$  : segment vertical ;
- $[FA]$  : segment horizontal.

**Question 29** Énoncez le corollaire du théorème de Poincaré-Bendixson que vous pouvez utiliser

et concluez.

0   $\frac{1}{2}$   1   $\frac{3}{2}$   2

Le domaine attractant défini précédemment contient un unique point d'équilibre instable. D'après le corollaire 2 du théorème de Poincaré-Bendixson, on peut en conclure qu'il existe au moins un cycle limite entièrement contenu dans ce domaine (en orange sur le portrait de phase).

**Question 30** Sur le portrait de phase ci-dessus, dessinez les trajectoires correspondants aux conditions initiales suivantes :

- $(x(0), y(0)) = (-3, 2)$  ;
- $(x(0), y(0)) = (-2, -3)$  ;
- $(x(0), y(0)) = (2, 2)$  ;
- $(x(0), y(0)) = (-0.5, -0.5)$ .

0   $\frac{1}{2}$   1   $\frac{3}{2}$   2

Voir graphe ci-dessus.