Biologie Mathématique et Modélisation
Mardi 29 mai 2018 - Durée : 2 heures

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique.
- Pour cocher une case, remplissez la en noir (■) en utilisant un stylo noir.
- Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex®). Ne la redessinez pas.
- N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
- Le symbole ♣ indique que le nombre de bonnes réponses proposées est indéterminé (0, 1, 2,...). Son absence signifie que la question a une unique bonne réponse.

Il s'agit d'un QCM est à espérance nulle : 15 questions, $k = 1$ point par question ; pas de réponse ou réponses incohérentes : 0 point ; Réponse juste : 1 point ; réponse fausse à une question avec n réponses proposées : $-\frac{k}{n-1}$ points.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

....

Numéro d'étudiant :

....

☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0
☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1
☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2
☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3
☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4
☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5
☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6
☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7
☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8
☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9

1 Partie I : questionnaire à choix multiples

Question 1 ♣ Soit $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$ avec $\mathbf{A}$ une matrice de dimension 2 telle que $\det(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$. A quelle(s) condition(s) pourra-t-on dire que $\mathbf{X}^*$ est asymptotiquement stable ?

☐ $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) < \mathbf{0}$ ☐ $\Delta < 0$ ☐ $\det(\mathbf{A}) < \mathbf{0}$
☐ $\det(\mathbf{A}) > \mathbf{0}$ ☐ $\Delta > 0$ ☐ $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) > \mathbf{0}$

Question 2 ♣ Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont sous forme de Jordan ?

☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Question 3 Parmi les matrices suivantes, laquelle correspond à un point d'équilibre origine qui est foyer instable ?

☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Question 4 Parmi les matrices suivantes, laquelle correspond à un point d'équilibre origine qui est nœud dégénéré asymptotiquement stable ?

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Question 5 ♣ Quelle sont les matrices canoniques associées à une infinité de points d'équilibre :

- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Question 6 Quelle est la matrice canonique associée à une crête :

- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Question 7 ♣ Parmi les relations suivantes concernant les coordonnées polaires, lesquelles sont vraies ?

- ☐ $x = r\sin\theta$ et $y = r\cos\theta$
- ☐ $r^2 = x^2 + y^2$
- ☐ $\tan\theta = \frac{x}{y}$
- ☐ $\tan\theta = \frac{y}{x}$
- ☐ $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$
- ☐ $r^2 = x^2 - y^2$

Soit le système dynamique :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = 2y \end{array}\right.$$

Question 8 Laquelle des fonctions suivantes est une intégrale première pour (S_1) ?

- ☐ $H(x, y) = \frac{1}{2}x^2y$
- ☐ $H(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y$
- ☐ $H(x, y) = xy$

Dans les deux questions suivantes, on considère le système suivant :

$$(S_2)\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 6x^2y \end{array}\right.$$

Question 9 Soit $V(x, y) = x^2 + y^2$.
Étudiez les variations de $V(x, y)$ le long des trajectoires de (S_2).

- ☐ $\dot{V} = -12x^2y^2$
- ☐ $\dot{V} = 12x^2y$
- ☐ $\dot{V} = 6xy^2$
- ☐ $\dot{V} = -12xy$
- ☐ $\dot{V} = -6x^2y^2$
- ☐ $\dot{V} = -6xy$

Question 10 Cochez ce qui est vrai :

- ☐ $V(x, y)$ est une fonction de Lyapunov faible pour (S_2)
- ☐ $V(x, y)$ est une fonction de Lyapunov forte pour (S_2)
- ☐ $V(x, y)$ n'est pas une fonction définie positive

Question 11 Comment montrer que le point d'équilibre $(0, 0)$ de (S_2) est asymptotiquement stable ?

- ☐ Avec le théorème de Lyapunov pour fonctions fortes
- ☐ Avec le théorème de Barbashin-Krasovskii-La Salle
- ☐ Avec le théorème de Četaev
- ☐ $(0, 0)$ n'est pas asymptotiquement stable

Dans les deux questions suivantes, on considère le système dynamique suivant :

$$(S_3)\left\{\begin{array}{l}\dot{x}=\alpha x-y-\alpha x\left(x^2+y^2\right)\\ \dot{y}=x+\alpha y-\alpha y\left(x^2+y^2\right)\end{array}\right.$$

Question 12 L'équivalent de (S_3) en coordonnées polaires s'écrit :

- ☐ $\left\{\begin{array}{l}\dot{r}=\alpha r\left(1-r^2\right)\\ \dot{\theta}=1\end{array}\right.$
- ☐ $\left\{\begin{array}{l}\dot{r}=\alpha r\left(1-r^2\right)\\ \dot{\theta}=-1\end{array}\right.$
- ☐ $\left\{\begin{array}{l}\dot{r}=\alpha r\left(r^2-1\right)\\ \dot{\theta}=1\end{array}\right.$
- ☐ $\left\{\begin{array}{l}\dot{r}=\alpha r\left(r^2-1\right)\\ \dot{\theta}=-1\end{array}\right.$
- ☐ $\left\{\begin{array}{l}\dot{r}=\alpha\left(1-r^2\right)\\ \dot{\theta}=1\end{array}\right.$
- ☐ $\left\{\begin{array}{l}\dot{r}=r\left(1-r^2\right)\\ \dot{\theta}=1\end{array}\right.$

Question 13 Si $\alpha=0$, à quelle classe d'équivalence appartient le point d'équilibre $(0,0)$ de (S_3) ?

- ☐ Centres
- ☐ Équilibre instable
- ☐ Équilibre asymptotiquement stable
- ☐ Points selle
- ☐ Flux
- ☐ Vallée
- ☐ Crète
- ☐ Infinité de points d'équilibre

Question 14 Si $\alpha>0$, à quelle classe d'équivalence appartient le point d'équilibre $(0,0)$ de (S_3) ?

- ☐ Centres
- ☐ Équilibre instable
- ☐ Équilibre asymptotiquement stable
- ☐ Points selle
- ☐ Flux
- ☐ Vallée
- ☐ Crète
- ☐ Infinité de points d'équilibre

Question 15 Si $\alpha<0$, le système dynamique (S_3) admet un cycle limite asymptotiquement stable ?

- ☐ Faux
- ☐ Vrai

2 Partie II : évolution temporelle d'une épidémie

On considère une épidémie où l'augmentation de la quantité de plantes infectées en fonction du temps dépend de l'inoculum (i.e., la quantité de plantes infectées à $t=0$) et de la quantité de matière végétale restant saine, donc susceptible d'être contaminée, au temps t. On peut écrire cela mathématiquement :

$$\frac{dx(t)}{dt}=rx_0\left(1-x(t)\right)$$

avec $x(t)$ la proportion de plantes infectées au temps t, x_0 l'inoculum et $r>0$ le coefficient d'efficacité de l'inoculum.

Question 16 Quelle est la solution générale de l'équation différentielle ?

- ☐ $x(t)=1-(1-x_0)e^{-rx_0t}$
- ☐ $x(t)=(1-x_0)e^{-rx_0t}$
- ☐ $x(t)=(1+x_0)e^{-rx_0t}$
- ☐ $x(t)=x_0e^{-rx_0t}$

Question 17 Quel(s) est(sont) le(s) point(s) d'équilibre ?

☐ $x_1^* = 1$ ☐ $x_1^* = x_0$ ☐ $x_1^* = x_0$ et $x_2^* = 1$
☐ $x_1^* = 0$ ☐ $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 1$ ☐ $x_1^* = 0$ et $x_2^* = x_0$

Question 18 Quelle est la limite de $x(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

☐ 1 ☐ $+\infty$
☐ 0 ☐ $x(t)$ n'a pas de limite

Question 19 Les courbes $x(t)$ présentent-elles un point d'inflexion ?

☐ Non
☐ Oui

Question 20 Le point d'équilibre non trivial est-il asymptotiquement stable ?

☐ Oui
☐ Non

Question 21 Quelle interprétation pouvez-vous faire du résultat précédent ? L'hypothèse selon laquelle l'évolution de $x(t)$ dépend de l'inoculum est-elle vérifiée ? Justifiez. ☐**0** ☐$\frac{1}{2}$ ☐**1**

3 Partie III : système dynamique

On considère le modèle défini par :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -4x(t) - 5y(t) + \frac{6y(t)}{1+x^2(t)} \end{cases}$$

Question 22 Déterminez les points d'équilibre du système. ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1

Question 23 Donnez la matrice jacobienne du système. ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1

Question 24 Donnez la matrice jacobienne au point d'équilibre $(0,0)$. Que pouvez-vous en conclure quant à sa stabilité et sa nature ? ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ☐$\frac{3}{2}$ ☐2

Question 25 Soit $V(x,y) = 2x^2 + \frac{y^2}{2}$. Montrez que la fonction $V(x,y)$ est définie positive.

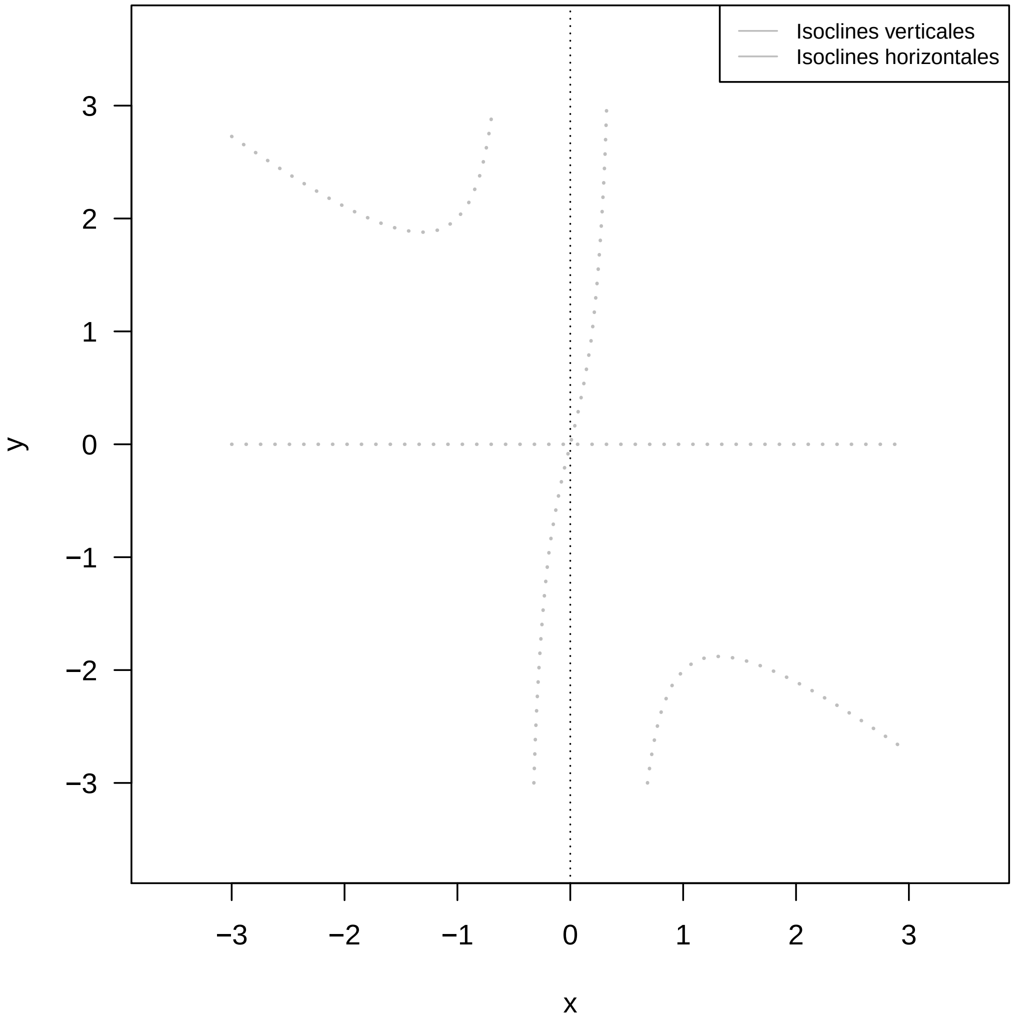
☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1

Question 26 Soit D_1 le domaine défini par $\left\{(x,y) \in \mathrm{R} \,|\, x^2 + y^2 < \frac{1}{5}\right\}$. Calculez $\frac{dV}{dt}$ et déterminez son signe sur D_1. Que pouvez-vous en conclure ? Justifiez.

☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ☐$\frac{3}{2}$ ☐2

Question 27 Reportez sur le plan de phase ci-dessous les isoclines horizontales (en bleu) et verticales (en vert), les points d'équilibre et les vecteurs vitesse, dont vous justifierez de l'orientation.

Complétez la légende. ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ☐$\frac{3}{2}$ ☐2 ☐$\frac{5}{2}$ ☐3



Question 28 A partir du portrait de phase ci-dessous, proposez un domaine attractant que vous justifierez. Dessinez-le en rouge.

☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ☐$\frac{3}{2}$ ☐2

Question 29 Énoncez le corollaire du théorème de Poincaré-Bendixson que vous pouvez utiliser et concluez.

☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ☐$\frac{3}{2}$ ☐2

Question 30 Sur le portrait de phase ci-dessus, dessinez les trajectoires correspondants aux conditions initiales suivantes :

- $(x(0), y(0)) = (-3, 2)$;
- $(x(0), y(0)) = (-2, -3)$;
- $(x(0), y(0)) = (2, 2)$;
- $(x(0), y(0)) = (-0.5, -0.5)$.

☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ☐$\frac{3}{2}$ ☐2