Biologie Mathématique et Modélisation – 28 mai 2019
Durée : 120 minutes

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous sera sanctionnée par un retrait de points.

— Pour cocher une case, remplissez-la en noir (■) en utilisant un stylo bille noir.
— Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex®), sans la redessiner.
— N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
— Le symbole ♣ indique que le nombre de bonnes réponses proposées est indéterminé (2, 3, . . .). Son absence signifie que la question a une unique bonne réponse.

Les questions à choix multiples sont à espérance nulle : pas de réponse ou réponse incohérente : 0 point ; réponse juste : 1 point ; réponse fausse lorsqu'il y a n propositions : $-\frac{1}{n-1}$ points.

Toutes les parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Nous vous rappellons que vous pouvez vous munir d'une feuille A4 recto-verso manuscrite originale dont le contenu est à votre convenance, ainsi que de tout type de calculatrice.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

. . . .

Numéro d'étudiant :

. . . .

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

CORRECTION

Partie 1 : questions de cours

Question 1 ♣ Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont sous forme de Jordan :

■ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Question 2 ♣ Soit $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$ avec $\mathbf{A}$ une matrice de dimension 2 telle que $\det(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$. A quelle(s) condition(s) pourra-t-on dire que $\mathbf{X}^*$ est noeud asymptotiquement stable ?

■ $\Delta > 0$
■ $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) < \mathbf{0}$
■ $\det(\mathbf{A}) > \mathbf{0}$
□ $\det(\mathbf{A}) < \mathbf{0}$
□ $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) > \mathbf{0}$
□ $\Delta < 0$

Question 3 Si les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ commutent, alors :

□ $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} + e^{\mathbf{B}}$
□ $e^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} + e^{\mathbf{B}}$
□ $e^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \times e^{\mathbf{B}}$
■ $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \times e^{\mathbf{B}}$

Question 4 Soit $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Alors $e^{t\mathbf{J}}$ s'écrit :

□ $e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sin\beta t & -\cos\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$
■ $e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$
□ $e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \cos\beta t & \sin\beta t \end{pmatrix}$
□ $e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sin\beta t & -\cos\beta t \\ \cos\beta t & \sin\beta t \end{pmatrix}$

Question 5 Soit $(S) : \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$ et K une condition initiale pour (S). On suppose que $\det(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$. Alors, la solution $X(t)$ de (S) s'écrit :

■ $e^{t\mathbf{A}}K$
□ $Ke^{t\mathbf{A}}$
□ $e^{K}e^{t\mathbf{A}}$
□ $\mathbf{A}\mathbf{e}^{\mathbf{tK}}$

Question 6 Quelle est la matrice canonique associée à un flux ?

□ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
□ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
□ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
■ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
□ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On considère le système suivant :

$$(\mathrm{S}_1)\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = 2y(t) \end{cases}$$

Question 7 Laquelle des fonctions suivantes est une intégrale première pour (S_1) ?

□ $H(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y$
■ $H(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y$
□ $H(x,y) = xy$

Dans les deux questions suivantes, on considère le système suivant :

$$(\mathrm{S}_2)\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -x(t) - 6x^2(t)y(t) \end{cases}$$

Question 8 Soit $V(x, y) = x^2 + y^2$. Alors (*cochez ce qui est vrai*) :

- ■ V est une fonction de Lyapunov faible pour (S_2)
- □ V n'est pas une fonction définie positive
- □ V est une fonction de Lyapunov forte pour (S_2)

Question 9 Compte-tenu de la question précédente, comment montrer que le point d'équilibre $(0, 0)$ de (S_2) est asymptotiquement stable ?

- □ Avec le théorème de Lyapunov pour fonctions fortes
- □ $(0, 0)$ n'est pas asymptotiquement stable
- ■ Avec le théorème de Barbashin-Krasovskii-La Salle
- □ Avec le théorème de Četaev

Dans les questions suivantes, on considère le système suivant :

$$(S_3)\left\{\begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) - y(t) - \alpha x(t)\left(x^2(t) + y^2(t)\right) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) + \alpha y(t) - \alpha y(t)\left(x^2(t) + y^2(t)\right) \end{array}\right.$$

Question 10 ♣ Parmi les relations suivantes concernant les coordonnées polaires, lesquelles sont vraies ?

- □ $x = r \sin\theta$ et $y = r\cos\theta$
- ■ $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$
- □ $r^2 = x^2 - y^2$
- ■ $\tan\theta = \frac{y}{x}$
- □ $\tan\theta = \frac{x}{y}$
- ■ $r^2 = x^2 + y^2$

Question 11 Si $\alpha = 0$, à quelle classe d'équivalence appartient le point d'équilibre $(0, 0)$ de (S_3) ?

- □ Points selle
- □ Équilibre instable
- □ Flux
- □ Infinité de points d'équilibre
- □ Vallée
- ■ Centres
- □ Crète
- □ Équilibre asymptotiquement stable

Question 12 Sachant que l'équivalent de (S_3) en coordonnées polaires s'écrit $\dot{r} = \alpha r(1 - r^2)$ et $\dot{\theta} = 1$, dans quel sens le cycle limite sera-t-il parcouru ?

- □ trigonométrique inverse
- ■ trigonométrique direct

Partie 2 : problèmes d'interaction

Exercice 1

On s'intéresse ici à l'interaction entre deux populations de densités respectives $x_1(t)$ et $x_2(t)$ selon le modèle suivant :

$$(S_4)\left\{\begin{array}{l} \frac{dx_1(t)}{dt} = \mu x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \\ \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + \mu x_2(t) - x_2(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \end{array}\right.$$

avec $\mu \in \mathbb{R}^*$.

Soit $(0, 0)$ l'unique point d'équilibre de ce système.

Question 13 Démontrez que le passage en coordonnées polaires du système (S_4) conduit aux équations suivantes : $\dot{r} = r\left(\mu - r^2\right)$ et $\dot{\theta} = 1$. ☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.5 ■2

Les coordonnées polaires s'écrivent $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ et $\tan\theta = \frac{x_2}{x_1}$, avec $x_1 = r\cos\theta$ et $x_2 = r\sin\theta$.
En dérivant par rapport à t, on obtient d'une part :

$$\begin{aligned}
&2r\dot{r} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2\\
&r\dot{r} = x_1\left(\mu x_1 - x_2 - x_1 r^2\right) + x_2\left(x_1 + \mu x_2 - x_2 r^2\right)\\
&= \mu x_1^2 - x_1x_2 - x_1^2 r^2 + x_1x_2 + \mu x_2^2 - x_2^2 r^2\\
&= \mu r^2 - r^4\\
&\Leftrightarrow \dot{r} = r\left(\mu - r^2\right)
\end{aligned}$$

et d'autre part :

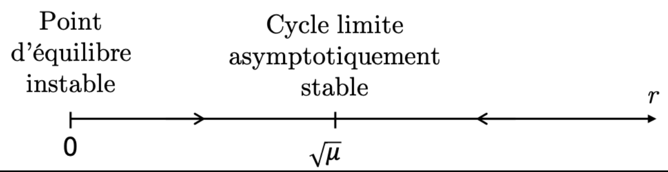
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\cos^2\theta}\dot{\theta} = \frac{\dot{x}_2 x_1 - x_2\dot{x}_1}{x_1^2}\\
&= \frac{\left(x_1 + \mu x_2 - x_2 r^2\right)x_1 - x_2\left(\mu x_1 - x_2 - x_1 r^2\right)}{r^2\cos^2\theta}\\
&= \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^2\cos^2\theta}\\
&\Leftrightarrow \dot{\theta} = 1
\end{aligned}$$

Question 14 Pour $\mu < 0$, déterminez la stabilité du point d'équilibre origine. ☐0 ■0.5

On étudie l'équation $\dot{r} = r\left(\mu - r(t)^2\right)$. Lorsque $\mu < 0$, r étant toujours > 0, on voit que $\dot{r} < 0$. Le point d'équilibre origine est donc asymptotiquement stable lorsque $\mu < 0$.

Question 15 Pour $\mu > 0$, déterminez la stabilité du cycle limite candidat. Précisez son rayon. ☐0 ☐0.5 ■1

On étudie l'équation $\dot{r} = r\left(\mu - r^2\right)$ qui s'annule pour $r = 0$ (point d'équilibre unique) et $r = \sqrt{\mu}$ (cycle limite candidat).
Lorsque $\mu > 0$, $\dot{r} > 0$ pour $0 < r < \sqrt{\mu}$, $\dot{r} < 0$ pour $r > \sqrt{\mu}$: le cycle limite est donc asymptotiquement stable.
Par voie de conséquence, le point d'équilibre $(0, 0)$ est instable.



Soit $V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$.

Question 16 Déterminez l'expression de $\dot{V}$ en fonction de r.

■ $\dot{V} = r^2(\mu - r^2)$
☐ $\dot{V} = \mu(1 - r^2)$
☐ $\dot{V} = -\mu r^2(r^2 - 1)$
☐ $\dot{V} = \mu r^2(1 - r^2)$

On fixe désormais $\mu = 1$.

Question 17 Déterminez le signe de $\dot{V}$ pour $r = 2$.

☐ $\frac{dV}{dt} > 0$ ☐ $\frac{dV}{dt} = 0$ ■ $\frac{dV}{dt} < 0$

Question 18 Déterminez le signe de $\dot{V}$ pour $r = 0.5$.

☐ $\frac{dV}{dt} < 0$ ☐ $\frac{dV}{dt} = 0$ ■ $\frac{dV}{dt} > 0$

Question 19 Concluez quant à l'existence ou non d'un cycle limite pour (S_4). ☐0 ☐0.5 ■1

En considérant l'anneau compris entre les cercles de rayons 0.5 et 2, on construit un domaine attractant pour le système ; il ne contient pas de point d'équilibre. L'application du corollaire 1 du théorème de Poincaré-Bendixson permet de conclure qu'il existe au moins un cycle limite entièrement contenu dans cet anneau.

Exercice 2

On s'intéresse maintenant à l'interaction entre deux populations de densités respectives $H(t)$ et $P(t)$ au temps t, décrite par le modèle suivant :

$$(\mathrm{S}_5) \begin{cases} \frac{dH(t)}{dt} = \alpha H(t)(k - H(t))(m - 2P(t)) \\ \\ \frac{dP(t)}{dt} = -\beta P(t)(m - P(t))(k - 2H(t)) \end{cases}$$

où α et β sont des paramètres strictement positifs ; k et m sont les capacités limite des populations de densités $H(t)$ et $P(t)$, respectivement. On supposera que $H(t) < k$ et $P(t) < m$.

Question 20 De quel type d'interaction s'agit-il ? Justifiez. ☐0 ■0.5

Il s'agit d'une interaction proies-prédateurs. Le terme en $H(t)P(t)$ est affecté d'une signe $-$ dans l'équation de $H(t)$, d'une signe $+$ dans l'équation de $P(t)$.

Question 21 Donnez l'expression des points d'équilibre dans le plan (H, P). On appellera A le point de coordonnées (H^*, P^*) avec $H^* \neq 0$ et $P^* \neq 0$ et B le point de coordonnées $(\frac{H^*}{2}, \frac{P^*}{2})$. Déterminez H^* et P^*. ☐0 ☐0.25 ☐0.5 ☐0.75 ☐1 ■1.25

$\dot{H} = 0 \Leftrightarrow H = 0 \,\text{ou}\, H = k \,\text{ou}\, P = \frac{m}{2}$.

Si $H = 0$, $\dot{P} = -\beta P(m - P)k$. Donc $\dot{P} = 0$ si $P = 0$ ou $P = m$. On obtient ainsi deux points d'équilibre : $(0, 0)$ et $(0, m)$.

Si $H = k$, $\dot{P} = -\beta P(m - P)(-k)$. Donc $\dot{P} = 0$ si $P = 0$ ou $P = m$. On obtient ainsi deux autres points d'équilibre : $(k, 0)$ et $(k, m) = A$.

Si $P = \frac{m}{2}$, $\dot{P} = -\beta \frac{m}{2}(m - \frac{m}{2})(k - 2H)$. Donc $\dot{P} = 0$ si $H = \frac{k}{2}$. On obtient un dernier point d'équilibre : $(\frac{k}{2}, \frac{m}{2}) = B$.

On détermine ainsi que $H^* = k$ et que $P^* = m$.

Question 22 Donnez la matrice jacobienne du système. ☐0 ☐0.25 ☐0.5 ☐0.75 ■1

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha km - 2\alpha mH - 2\alpha kP + 4\alpha HP & -2\alpha kH + 2\alpha H^2 \\ 2\beta mP - 2\beta P^2 & -\beta mk + 2\beta kP + 2\beta mH - 4\beta hP \end{pmatrix}$$

Question 23 Déterminez la nature et la stabilité des points d'équilibre.

☐0 ☐0.25 ☐0.5 ☐0.75 ☐1 ☐1.25 ☐1.25 ☐1.25 ☐2 ☐2.25 ■2.5

Pour $(0,0)$: $\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \alpha km & 0 \\ 0 & -\beta mk \end{pmatrix}$. Les deux valeurs propres sont de signe opposé, il s'agit d'un point selle.

Pour $(k,0)$: $\mathbf{J}_{(k,0)} = \begin{pmatrix} -\alpha km & 0 \\ 0 & \beta mk \end{pmatrix}$. Les deux valeurs propres sont de signe opposé, il s'agit d'un point selle.

Pour $(0,m)$: $\mathbf{J}_{(0,m)} = \begin{pmatrix} -\alpha km & 0 \\ 0 & \beta mk \end{pmatrix}$. Les deux valeurs propres sont de signe opposé, il s'agit d'un point selle.

Pour (k,m) : $\mathbf{J}_{(k,m)} = \begin{pmatrix} \alpha km & 0 \\ 0 & -\beta mk \end{pmatrix}$. Les deux valeurs propres sont de signe opposé, il s'agit d'un point selle.

Pour $(\frac{k}{2}, \frac{m}{2})$: $\mathbf{J}^* = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha k^2}{2} \\ \frac{\beta m^2}{2} & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $\det \mathbf{J}^* = \frac{\alpha\beta \mathbf{k^2 m^2}}{\mathbf{4}} > \mathbf{0}$ et $\mathrm{tr}\mathbf{J}^* = \mathbf{0}$: la linéarisation prévoit des centres.

Question 24 Montrez que la fonction $u(H,P) = \alpha \ln P + \alpha \ln (m-P) + \beta \ln H + \beta \ln (k-H)$

est une intégrale première pour le système (S_5). ☐0 ☐0.25 ☐0.5 ☐0.75 ■1

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial H}\frac{dH}{dt} + \frac{\partial u}{\partial P}\frac{dP}{dt}$$
$$\frac{\partial u}{\partial H} = \frac{\beta}{H} - \frac{\beta}{k-H} = \frac{\beta(k-2H)}{H(k-H)}$$
$$\frac{\partial u}{\partial P} = \frac{\alpha}{P} - \frac{\alpha}{m-P} = \frac{\alpha(m-2P)}{P(m-P)}$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{\beta(k-2H)}{H(k-H)}\alpha H\left(k-H\right)\left(m-2P\right) + \frac{\alpha(m-2P)}{P(m-P)}\beta P\left(m-P\right)\left(k-2H\right)$$
$$= \alpha\beta\left(k-2H\right)\left(m-2P\right) + \alpha\beta\left(m-2P\right)\left(k-2H\right)$$
$$= 0$$

Question 25 Par un développement en série de Taylor à l'ordre 2, montrez que la fonction $u(H, P)$ admet un extremum au point B. Déterminez la nature de cet extremum.

☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.25 ☐2 ■2.5

Les dérivées partielles sont :

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial u}{\partial H}=\frac{\beta}{H}-\frac{\beta}{k-H}\Rightarrow\left.\frac{\partial u}{\partial H}\right|_{(B)}=0\\
\frac{\partial^2 u}{\partial H^2}=-\frac{\beta}{H^2}-\frac{\beta}{(k-H)^2}\Rightarrow\left.\frac{\partial^2 u}{\partial H^2}\right|_{(B)}=-\frac{8\beta}{k^2}\\
\frac{\partial u}{\partial P}=\frac{\alpha}{P}-\frac{\alpha}{m-P}\Rightarrow\left.\frac{\partial u}{\partial P}\right|_{(B)}=0\\
\frac{\partial^2 u}{\partial P^2}=-\frac{\alpha}{P^2}-\frac{\alpha}{(m-P)^2}\Rightarrow\left.\frac{\partial^2 u}{\partial P^2}\right|_{(B)}=-\frac{8\alpha}{m^2}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial H\partial P}=0
\end{array}$$

On obtient ainsi :

$$u\left(H,P\right)-u\left(B\right)\sim-\frac{8\beta}{k^2}\left(H-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{8\alpha}{m^2}\left(P-\frac{m}{2}\right)^2$$

On en conclut que la fonction $u(H,P)$ admet bien un extremum ; il s'agit d'un maximum.

Question 26 Que pouvez-vous en conclure ? ☐0 ☐0.5 ■1

La fonction $u(H, P)$ admet un maximum au point d'intérêt B ; on peut l'approcher par une forme quadratique dont les courbes de niveaux se referment (de forme ellipsoïdale). Par conséquent, on a bien des centres autour du point B.

Question 27 Déterminez les isoclines verticales dans le plan (H, P). ☐0 ☐0.5 ☐1 ■1.5

$$\frac{dH}{dt} = 0 \Leftrightarrow H = 0, H = k, P = \frac{m}{2}$$

Les isoclines verticales sont donc : l'axe vertical, la droite verticale d'abscisse $H = k$ et la droite horizontale d'ordonnée $P = \frac{m}{2}$.

Question 28 Déterminez les isoclines horizontales dans le plan (H, P). ☐0 ☐0.5 ☐1 ■1.5

$$\frac{dP}{dt} = 0 \Leftrightarrow P = 0, P = m, H = \frac{k}{2}$$

Les isoclines horizontales sont donc : l'axe horizontal, la droite horizontale d'ordonnée $P = m$ et la droite verticale d'abscisse $H = \frac{k}{2}$.

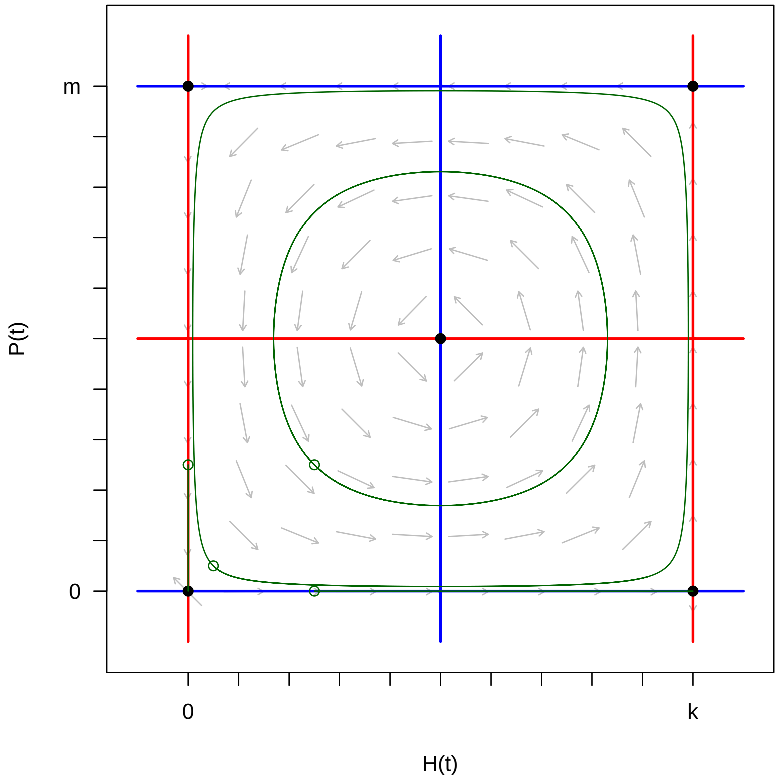
Question 29 Construisez le portrait de phase dans le plan (H, P) : placez les points d'équilibre, les vecteurs vitesse (dont vous justifierez le sens) et tracez les trajectoires pour les conditions initiales suivantes :

— $H(0) = \frac{k}{4}$ et $P(0) = \frac{m}{4}$;

— $H(0) = \varepsilon$ et $P(0) = \varepsilon$ avec ε petit ;

— $H(0) = 0$ et $P(0) = \frac{m}{4}$;
— $H(0) = \frac{k}{4}$ et $P(0) = 0$.

☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.5 ☐2 ☐2.5 ☐3 ■3.5



Question 30 Discutez dans chaque cas la dynamique à long terme des deux populations.

☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.5 ■2

Pour les conditions initiales $(\frac{k}{4}, \frac{m}{4})$ et $(\varepsilon, \varepsilon)$ avec ε petit, la dynamique décrit des centres : on a donc des oscillations entretenus en fonction du temps.

Pour la condition initiale $(0, \frac{m}{4})$, la dynamique converge vers $(0, 0)$: il y a donc extinction des deux populations.

Pour la condition initiale $(\frac{k}{4}, 0)$, la dynamique converge vers $(k, 0)$: il y a disparition des prédateurs et les proies convergent à leur capacité limite k.