

#### Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous sera sanctionnée par un retrait de points.

- Pour cocher une case, remplissez-la en noir (■) en utilisant un stylo bille noir.
- Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex<sup>®</sup>), sans la redessiner.
- N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
- Le symbole & indique que le nombre de bonnes réponses proposées est indéterminé (2, 3, ...). Son absence signifie que la question a une unique bonne réponse.

Les questions à choix multiples sont à espérance nulle : pas de réponse ou réponse incohérente : 0 point ; réponse juste : 1 point ; réponse fausse lorsqu'il y a n propositions :  $-\frac{1}{n-1}$  points.

Toutes les parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Nous vous rappellons que vous pouvez vous munir d'une feuille A4 recto-verso manuscrite originale dont le contenu est à votre convenance, ainsi que de tout type de calculatrice.

| Identité   |   |  |  |  |  |  |
|--|---|--|--|--|--|--|
| Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre. | $\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$   |  |  |  |  |  |
| Nom et Prénom :  | 3       3       3       3       3       3       3         4 |  |  |  |  |  |
|  |   |  |  |  |  |  |



### Partie 1 : questions de cours

Question 1 A Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont sous forme de Jordan :

$$\Box \quad \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\square \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Box \quad \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\square \quad \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{array}\right) \qquad \square \quad \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{array}\right) \qquad \square \quad \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \square \quad \left(\begin{array}{cc} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{array}\right)$$

Question 2 🌲 Soit  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$  avec  $\mathbf{A}$  une matrice de dimension 2 telle que  $\det(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$ . A quelle(s) condition(s) pourra-t-on dire que  $X^*$  est noeud asymptotiquement stable?

$$\Delta > 0$$

$$\square \operatorname{tr}(\mathbf{A}) < \mathbf{0}$$

$$\square \det(\mathbf{A}) > \mathbf{0}$$

$$\Box$$
 det(**A**) < **0**

$$\Box$$
 tr(**A**) > **0**

$$\Delta < 0$$

Question 3 Si les matrices A et B commutent, alors :

$$\Box e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} + e^{\mathbf{B}}$$

$$\Box e^{\mathbf{A} \times \mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} + e^{\mathbf{B}}$$
$$\Box e^{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \times e^{\mathbf{B}}$$

$$\Box e^{\mathbf{A} \times \mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \times e^{\mathbf{B}}$$

$$\Box e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \times e^{\mathbf{B}}$$

Question 4 Soit  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ . Alors  $e^{t\mathbf{J}}$  s'écrit :

$$\Box e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin \beta t & -\cos \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

$$\exists e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

$$\Box e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin \beta t & -\cos \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$
$$\Box e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \cos \beta t & \sin \beta t \end{pmatrix}$$

$$\Box e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$
$$\Box e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin \beta t & -\cos \beta t \\ \cos \beta t & \sin \beta t \end{pmatrix}$$

**Question 5** Soit (S):  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$  et K une condition initiale pour (S). On suppose que  $\det(\mathbf{A}) \neq \mathbf{A}$ **0**. Alors, la solution X(t) de (S) s'écrit :

$$\Box e^{t\mathbf{A}}K$$

$$\square Ke^{t\mathbf{A}}$$

$$\Box e^{K} e^{t\mathbf{A}}$$

$$\square$$
 Ae<sup>tK</sup>

Question 6 Quelle est la matrice canonique associée à un flux?

$$\Box \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Box \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Box \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Box \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\square \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\square \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Box \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

On considère le système suivant :

$$(S_1) \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = 2y(t) \end{cases}$$

Question 7 Laquelle des fonctions suivantes est une intégrale première pour  $(S_1)$ ?

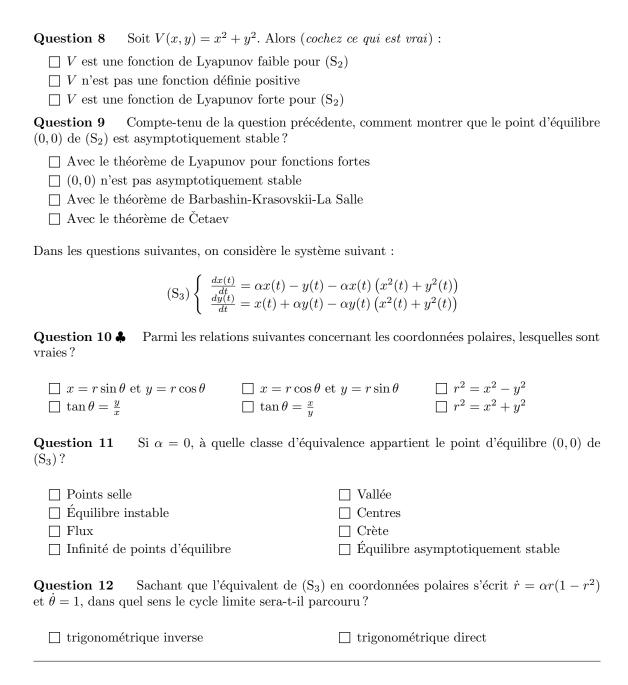
$$\square \ H(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y \qquad \qquad \square \ H(x,y) = \frac{1}{2}x^2y$$

$$\prod H(x,y) = \frac{1}{2}x^2y$$

$$\square H(x,y) = xy$$

Dans les deux questions suivantes, on considère le système suivant :

$$(S_2) \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -x(t) - 6x^2(t)y(t) \end{cases}$$



# Partie 2 : problèmes d'interaction

#### Exercice 1

On s'intéresse ici à l'interaction entre deux populations de densités respectives  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  selon le modèle suivant :

$$(S_4) \begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = \mu x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + \mu x_2(t) - x_2(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \end{cases}$$

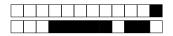
avec  $\mu \in \mathbb{R}^*$ .

Soit (0,0) l'unique point d'équilibre de ce système.

| Ι |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|
| Τ |  |  |  |  |  |

| <b>uestion 13</b> Démontrez que le passage en coordo uations suivantes : $\dot{r} = r(\mu - r^2)$ et $\dot{\theta} = 1$ . | $\Box 0.5$ |  |   |
|---|------------|--|---|
| , , ,   |            |  | _ |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |
|   |            |  |   |

|             |   | I   |
|-------------|---|---|
|             |   |   |
|             |   |   |
|             |   |   |
|             |   |   |
|             |   |   |
|             |   |   |
|             |   |   |
| Question 14 | Pour $\mu < 0$ , déterminez la stabilité du point d'équilibre origine.                              | 0 0.5                                       |
|             |   |   |
|             |   |   |
|             |   |   |
|             |   |   |
|             |   |   |
| Question 15 | Pour $\mu > 0$ , déterminez la stabilité du cycle limite candidat. Préc $\label{eq:pour} \square 0$ | isez son rayon. $0  \square 0.5  \square 1$ |
|             |   |   |
|             |   |   |
|             |   |   |
|             |   |   |
|             |   |   |



Soit 
$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$
.

**Question 16** Déterminez l'expression de  $\dot{V}$  en fonction de r.

$$\square \dot{V} = r^2(\mu - r^2)$$
$$\square \dot{V} = \mu(1 - r^2)$$

$$\square \dot{V} = \mu r^2 (1 - r^2)$$

On fixe désormais  $\mu = 1$ .

Déterminez le signe de  $\dot{V}$  pour r=2. Question 17

Question 18 Déterminez le signe de  $\dot{V}$  pour r = 0.5.

Question 19 Concluez quant à l'existence ou non d'un cycle limite pour  $(S_4)$ .

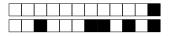
| $\square 0.5$ |  |
|---------------|--|
|               |  |

# Exercice 2

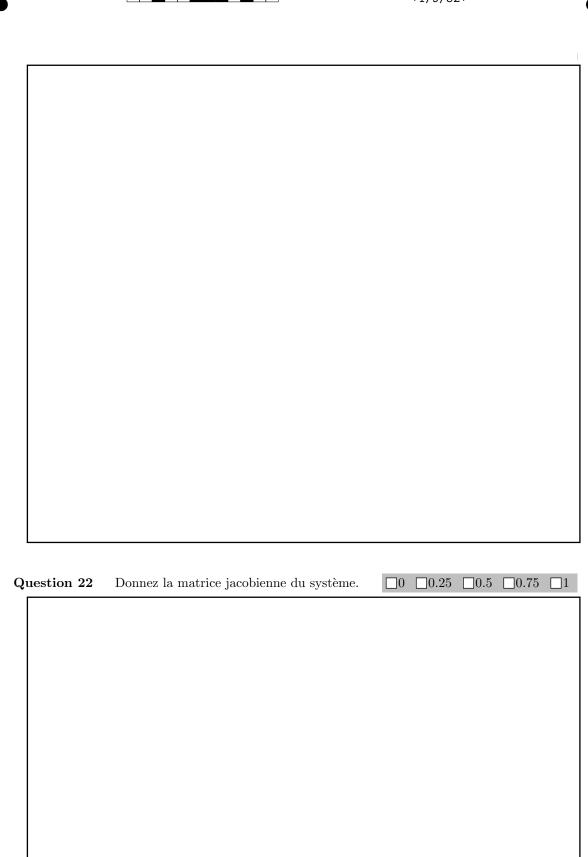
On s'intéresse maintenant à l'interaction entre deux populations de densités respectives H(t) et P(t) au temps t, décrite par le modèle suivant :

$$(S_5) \begin{cases} \frac{dH(t)}{dt} = \alpha H(t)(k - H(t))(m - 2P(t)) \\ \frac{dP(t)}{dt} = -\beta P(t)(m - P(t))(k - 2H(t)) \end{cases}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres strictement positifs ; k et m sont les capacités limite des populations de densités H(t) et P(t), respectivement. On supposera que H(t) < k et P(t) < m.



| estion 20               | De quel type d'      | interaction's agit-i                                 | I! Justinez.                                |   | $\square 0  \square 0.$             |
|-------------------------|----------------------|--|---|---|-------------------------------------|
|                         |                      |  |   |   |                                     |
|                         |                      |  |   |   |                                     |
|                         |                      |  |   |   |                                     |
|                         |                      |  |   |   |                                     |
|                         |                      |  |   |   |                                     |
|                         |                      |  |   |   |                                     |
|                         |                      |  |   |   |                                     |
|                         |                      |  |   |   |                                     |
|                         |                      |  |   |   |                                     |
|                         |                      |  |   |   |                                     |
|                         |                      |  |   |   |                                     |
|                         |                      |  |   |   |                                     |
| estion 21               | Donnez l'expres      | ssion des points d'                                  | équilibre dans le p                         | olan $(H, P)$ . C                           | n appeller                          |
| oint de coor            | données $(H^*, P^*)$ | ssion des points d' avec $H^* \neq 0$ et $I$         | $P^* \neq 0 \text{ et } B \text{ le point}$ | nt de coordon                               | nées $(\frac{H^*}{2}, \frac{H}{2})$ |
| oint de coor            | données $(H^*, P^*)$ | ssion des points d'avec $H^* \neq 0$ et $F$          | $P^* \neq 0 \text{ et } B \text{ le point}$ | plan $(H, P)$ . Cont de coordon $0.5  0.75$ | nées $(\frac{H^*}{2}, \frac{F}{2})$ |
| oint de coor            | données $(H^*, P^*)$ | ssion des points d'avec $H^* \neq 0$ et $I$          | $P^* \neq 0 \text{ et } B \text{ le point}$ | nt de coordon                               | nées $(\frac{H^*}{2}, \frac{H}{2})$ |
| oint de coor            | données $(H^*, P^*)$ | ssion des points d'avec $H^* \neq 0$ et $F$          | $P^* \neq 0 \text{ et } B \text{ le point}$ | nt de coordon                               | nées $(\frac{H^*}{2}, \frac{H}{2})$ |
| oint de coor            | données $(H^*, P^*)$ | ssion des points d'avec $H^* \neq 0$ et $H$          | $P^* \neq 0 \text{ et } B \text{ le point}$ | nt de coordon                               | nées $(\frac{H^*}{2}, \frac{F}{2})$ |
| oint de coor            | données $(H^*, P^*)$ | ssion des points d'avec $H^* \neq 0$ et $H^* \neq 0$ | $P^* \neq 0 \text{ et } B \text{ le point}$ | nt de coordon                               | nées $(\frac{H^*}{2}, \frac{H}{2})$ |
| oint de coor            | données $(H^*, P^*)$ | ssion des points d'avec $H^* \neq 0$ et $F$          | $P^* \neq 0 \text{ et } B \text{ le point}$ | nt de coordon                               | nées $(\frac{H^*}{2}, \frac{H}{2})$ |
| oint de coor            | données $(H^*, P^*)$ | ssion des points d'avec $H^* \neq 0$ et $H^* \neq 0$ | $P^* \neq 0 \text{ et } B \text{ le point}$ | nt de coordon                               | nées $(\frac{H^*}{2}, \frac{H}{2})$ |
| oint de coor            | données $(H^*, P^*)$ | ssion des points d'avec $H^* \neq 0$ et $I$          | $P^* \neq 0 \text{ et } B \text{ le point}$ | nt de coordon                               | nées $(\frac{H^*}{2}, \frac{H}{2})$ |
| oint de coor            | données $(H^*, P^*)$ | ssion des points d'avec $H^* \neq 0$ et $H^* \neq 0$ | $P^* \neq 0 \text{ et } B \text{ le point}$ | nt de coordon                               | nées $(\frac{H^*}{2}, \frac{F}{2})$ |
| oint de coor            | données $(H^*, P^*)$ | ssion des points d'avec $H^* \neq 0$ et $I$          | $P^* \neq 0 \text{ et } B \text{ le point}$ | nt de coordon                               | nées $(\frac{H^*}{2}, \frac{F}{2})$ |
| oint de coor            | données $(H^*, P^*)$ | ssion des points d'avec $H^* \neq 0$ et $F$          | $P^* \neq 0 \text{ et } B \text{ le point}$ | nt de coordon                               | nées $(\frac{H^*}{2}, \frac{F}{2})$ |
| estion 21 oint de coore | données $(H^*, P^*)$ | ssion des points d'avec $H^* \neq 0$ et $H^* \neq 0$ | $P^* \neq 0 \text{ et } B \text{ le point}$ | nt de coordon                               | nées $(\frac{H^*}{2}, \frac{F}{2})$ |



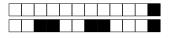


Question 23 Déterminez la nature et la stabilité des points d'équilibre.

|  | $\Box 0$ | $\square 0.25$ | $\square 0.5$ | $\square 0.75$ | $\square 1.25$ | $\square 1.25$ | $\square 1.25$ | $\square 2$ | $\square 2.25$ | $\square 2.5$ |
|--|----------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------|----------------|---------------|
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |
|  |          |                |               |                |                |                |                |             |                |               |



Montrez que la fonction  $u(H,P) = \alpha \ln P + \alpha \ln (m-P) + \beta \ln H + \beta \ln (k-H)$ Question 24 est une intégrale première pour le système  $(S_5)$ .  $\square 0 \quad \square 0.25 \quad \square 0.5 \quad \square 0.75 \quad \square 1$ 

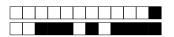


Question 25 Par un développement en série de Taylor à l'ordre 2, montrez que la fonction u(H,P) admet un extremum au point B. Déterminez la nature de cet extremum.

| $\Box 0$ | $\square 0.5$ | $\Box 1$ | $\square 1.25$ | $\square 2$ | $\square 2.5$ |
|----------|---------------|----------|----------------|-------------|---------------|
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |
|          |               |          |                |             |               |

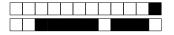
| Question 26 | Que pouvez-vous en conclure?                                | $\square 0  \square 0.5  \square 1$ |
|-------------|---|-------------------------------------|
|             |   |                                     |
|             |   |                                     |
|             |   |                                     |
|             |   |                                     |
|             |   |                                     |
|             |   |                                     |
|             |   |                                     |
| Question 27 | Déterminez les isoclines verticales dans le plan $(H, P)$ . | □0 □0.5 □1 □1.5                     |
|             |   |                                     |
|             |   |                                     |
|             |   |                                     |
|             |   |                                     |
|             |   |                                     |
|             |   |                                     |
| Question 28 | Déterminez les isoclines horizontales dans le plan $(H, P)$ | . 0 0.5 1 1.5                       |
|             |   |                                     |
|             |   |                                     |
|             |   |                                     |
|             |   |                                     |

Question 29 Construisez le portrait de phase dans le plan (H,P): placez les points d'équilibre, les vecteurs vitesse (dont vous justifierez le sens) et tracez les trajectoires pour les conditions initiales suivantes :



- $$\begin{split} & H(0) = \frac{k}{4} \text{ et } P(0) = \frac{m}{4} ; \\ & H(0) = \varepsilon \text{ et } P(0) = \varepsilon \text{ avec } \varepsilon \text{ petit } ; \\ & H(0) = 0 \text{ et } P(0) = \frac{m}{4} ; \\ & H(0) = \frac{k}{4} \text{ et } P(0) = 0. \end{split}$$

|  | $\square 0.5$ | <u></u> 1.5 | $\square 2$ | $\square 2.5$ | $\square 3.5$ |
|--|---------------|-------------|-------------|---------------|---------------|
|  |               |             |             |               | •             |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |
|  |               |             |             |               |               |



Question 30 Discutez dans chaque cas la dynamique à long terme des deux populations.

|  | $\square 0.5$ | <u>1</u> | $\square 1.5$ | $\square 2$ |
|--|---------------|----------|---------------|-------------|
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |
|  |               |          |               |             |