Biologie Mathématique et Modélisation – 28 mai 2019
Durée : 120 minutes

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous sera sanctionnée par un retrait de points.

- Pour cocher une case, remplissez-la en noir (■) en utilisant un stylo bille noir.
- Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex®), sans la redessiner.
- N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
- Le symbole ♣ indique que le nombre de bonnes réponses proposées est indéterminé (2, 3, ...). Son absence signifie que la question a une unique bonne réponse.

Les questions à choix multiples sont à espérance nulle : pas de réponse ou réponse incohérente : 0 point ; réponse juste : 1 point ; réponse fausse lorsqu'il y a n propositions : $-\frac{1}{n-1}$ points.

Toutes les parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Nous vous rappellons que vous pouvez vous munir d'une feuille A4 recto-verso manuscrite originale dont le contenu est à votre convenance, ainsi que de tout type de calculatrice.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

....

Numéro d'étudiant :

....

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Partie 1 : questions de cours

Question 1 ♣ Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont sous forme de Jordan :

☐ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Question 2 ♣ Soit $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$ avec $\mathbf{A}$ une matrice de dimension 2 telle que $\det(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$. A quelle(s) condition(s) pourra-t-on dire que $\mathbf{X}^*$ est noeud asymptotiquement stable ?

☐ $\Delta > 0$
☐ $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) < \mathbf{0}$
☐ $\det(\mathbf{A}) > \mathbf{0}$
☐ $\det(\mathbf{A}) < \mathbf{0}$
☐ $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) > \mathbf{0}$
☐ $\Delta < 0$

Question 3 Si les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ commutent, alors :

☐ $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} + e^{\mathbf{B}}$
☐ $e^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} + e^{\mathbf{B}}$
☐ $e^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \times e^{\mathbf{B}}$
☐ $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \times e^{\mathbf{B}}$

Question 4 Soit $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Alors $e^{t\mathbf{J}}$ s'écrit :

☐ $e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sin\beta t & -\cos\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$
☐ $e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$
☐ $e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \cos\beta t & \sin\beta t \end{pmatrix}$
☐ $e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sin\beta t & -\cos\beta t \\ \cos\beta t & \sin\beta t \end{pmatrix}$

Question 5 Soit $(S) : \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$ et K une condition initiale pour (S). On suppose que $\det(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$. Alors, la solution $X(t)$ de (S) s'écrit :

☐ $e^{t\mathbf{A}}K$
☐ $Ke^{t\mathbf{A}}$
☐ $e^{K}e^{t\mathbf{A}}$
☐ $\mathbf{Ae^{tK}}$

Question 6 Quelle est la matrice canonique associée à un flux ?

☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On considère le système suivant :

$$(\mathrm{S}_1) \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = 2y(t) \end{cases}$$

Question 7 Laquelle des fonctions suivantes est une intégrale première pour (S_1) ?

☐ $H(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y$ ☐ $H(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y$ ☐ $H(x,y) = xy$

Dans les deux questions suivantes, on considère le système suivant :

$$(\mathrm{S}_2) \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -x(t) - 6x^2(t)y(t) \end{cases}$$

Question 8 Soit $V(x,y) = x^2 + y^2$. Alors (*cochez ce qui est vrai*) :

- ☐ V est une fonction de Lyapunov faible pour (S_2)
- ☐ V n'est pas une fonction définie positive
- ☐ V est une fonction de Lyapunov forte pour (S_2)

Question 9 Compte-tenu de la question précédente, comment montrer que le point d'équilibre $(0,0)$ de (S_2) est asymptotiquement stable ?

- ☐ Avec le théorème de Lyapunov pour fonctions fortes
- ☐ $(0,0)$ n'est pas asymptotiquement stable
- ☐ Avec le théorème de Barbashin-Krasovskii-La Salle
- ☐ Avec le théorème de Četaev

Dans les questions suivantes, on considère le système suivant :

$$(S_3) \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) - y(t) - \alpha x(t)\left(x^2(t) + y^2(t)\right) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) + \alpha y(t) - \alpha y(t)\left(x^2(t) + y^2(t)\right) \end{cases}$$

Question 10 ♣ Parmi les relations suivantes concernant les coordonnées polaires, lesquelles sont vraies ?

- ☐ $x = r\sin\theta$ et $y = r\cos\theta$
- ☐ $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$
- ☐ $r^2 = x^2 - y^2$
- ☐ $\tan\theta = \frac{y}{x}$
- ☐ $\tan\theta = \frac{x}{y}$
- ☐ $r^2 = x^2 + y^2$

Question 11 Si $\alpha = 0$, à quelle classe d'équivalence appartient le point d'équilibre $(0,0)$ de (S_3) ?

- ☐ Points selle
- ☐ Équilibre instable
- ☐ Flux
- ☐ Infinité de points d'équilibre
- ☐ Vallée
- ☐ Centres
- ☐ Crète
- ☐ Équilibre asymptotiquement stable

Question 12 Sachant que l'équivalent de (S_3) en coordonnées polaires s'écrit $\dot{r} = \alpha r(1 - r^2)$ et $\dot{\theta} = 1$, dans quel sens le cycle limite sera-t-il parcouru ?

- ☐ trigonométrique inverse
- ☐ trigonométrique direct

Partie 2 : problèmes d'interaction

Exercice 1

On s'intéresse ici à l'interaction entre deux populations de densités respectives $x_1(t)$ et $x_2(t)$ selon le modèle suivant :

$$(S_4) \begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = \mu x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \\ \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + \mu x_2(t) - x_2(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \end{cases}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}^*$.

Soit $(0,0)$ l'unique point d'équilibre de ce système.

Question 13 Démontrez que le passage en coordonnées polaires du système (S_4) conduit aux équations suivantes : $\dot{r} = r\left(\mu - r^2\right)$ et $\dot{\theta} = 1$. ☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.5 ☐2

Question 14 Pour $\mu < 0$, déterminez la stabilité du point d'équilibre origine. ☐0 ☐0.5

Question 15 Pour $\mu > 0$, déterminez la stabilité du cycle limite candidat. Précisez son rayon. ☐0 ☐0.5 ☐1

Soit $V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2+x_2^2}{2}$.

Question 16 Déterminez l'expression de $\dot{V}$ en fonction de r.

- ☐ $\dot{V} = r^2(\mu - r^2)$
- ☐ $\dot{V} = -\mu r^2(r^2 - 1)$
- ☐ $\dot{V} = \mu(1 - r^2)$
- ☐ $\dot{V} = \mu r^2(1 - r^2)$

On fixe désormais $\mu = 1$.

Question 17 Déterminez le signe de $\dot{V}$ pour $r = 2$.

- ☐ $\frac{dV}{dt} > 0$
- ☐ $\frac{dV}{dt} = 0$
- ☐ $\frac{dV}{dt} < 0$

Question 18 Déterminez le signe de $\dot{V}$ pour $r = 0.5$.

- ☐ $\frac{dV}{dt} < 0$
- ☐ $\frac{dV}{dt} = 0$
- ☐ $\frac{dV}{dt} > 0$

Question 19 Concluez quant à l'existence ou non d'un cycle limite pour (S_4). ☐0 ☐0.5 ☐1

Exercice 2

On s'intéresse maintenant à l'interaction entre deux populations de densités respectives $H(t)$ et $P(t)$ au temps t, décrite par le modèle suivant :

$$(\mathrm{S}_5)\begin{cases} \frac{dH(t)}{dt} = \alpha H(t)(k - H(t))(m - 2P(t)) \\ \frac{dP(t)}{dt} = -\beta P(t)(m - P(t))(k - 2H(t)) \end{cases}$$

où α et β sont des paramètres strictement positifs ; k et m sont les capacités limite des populations de densités $H(t)$ et $P(t)$, respectivement. On supposera que $H(t) < k$ et $P(t) < m$.

Question 20 De quel type d'interaction s'agit-il ? Justifiez. ☐0 ☐0.5

Question 21 Donnez l'expression des points d'équilibre dans le plan (H, P). On appellera A le point de coordonnées (H^*, P^*) avec $H^* \neq 0$ et $P^* \neq 0$ et B le point de coordonnées $(\frac{H^*}{2}, \frac{P^*}{2})$. Déterminez H^* et P^*. ☐0 ☐0.25 ☐0.5 ☐0.75 ☐1 ☐1.25

Question 22 Donnez la matrice jacobienne du système. ☐0 ☐0.25 ☐0.5 ☐0.75 ☐1

Question 23 Déterminez la nature et la stabilité des points d'équilibre.

☐0 ☐0.25 ☐0.5 ☐0.75 ☐1 ☐1.25 ☐1.25 ☐1.25 ☐2 ☐2.25 ☐2.5

Question 24 Montrez que la fonction $u(H,P) = \alpha \ln P + \alpha \ln(m-P) + \beta \ln H + \beta \ln(k-H)$ est une intégrale première pour le système (S_5).

☐0 ☐0.25 ☐0.5 ☐0.75 ☐1

Question 25 Par un développement en série de Taylor à l'ordre 2, montrez que la fonction $u(H, P)$ admet un extremum au point B. Déterminez la nature de cet extremum.

☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.25 ☐2 ☐2.5

Question 26 Que pouvez-vous en conclure ? ☐0 ☐0.5 ☐1

Question 27 Déterminez les isoclines verticales dans le plan (H, P). ☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.5

Question 28 Déterminez les isoclines horizontales dans le plan (H, P). ☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.5

Question 29 Construisez le portrait de phase dans le plan (H, P) : placez les points d'équilibre, les vecteurs vitesse (dont vous justifierez le sens) et tracez les trajectoires pour les conditions initiales suivantes :

— $H(0) = \frac{k}{4}$ et $P(0) = \frac{m}{4}$;

— $H(0) = \varepsilon$ et $P(0) = \varepsilon$ avec ε petit ;

— $H(0) = 0$ et $P(0) = \frac{m}{4}$;

— $H(0) = \frac{k}{4}$ et $P(0) = 0$.

☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.5 ☐2 ☐2.5 ☐3 ☐3.5

Question 30 Discutez dans chaque cas la dynamique à long terme des deux populations.

☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.5 ☐2