Biologie Mathématique et Modélisation – 12 mai 2020
Durée : 120 minutes

Instructions

Ce QCM sera analysé par lecture optique, après que vous l'ayez déposé sur TOMUSS.

— Pour répondre, cochez une case ;
— Pour corriger, décochez la case ;
— N'inscrivez rien dans l'en-tête ni dans les marges des pages ;

Ce QCM est à espérance nulle : réponse juste = 1 point ; pas de réponse ou réponses incohérentes = 0 point ; réponse fausse à une question avec n propositions = $-\frac{1}{n-1}$ points. Pour la plupart, les questions sont indépendantes.

Référez-vous au tutoriel que vous avez reçu pour toute information complémentaire.

Identité

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Partie 1 : symbiose

La dynamique de deux espèces en symbiose, de densités respectives x et y au temps t, est décrite par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(\beta+1)x + x^2y + 2 \\ \frac{dy}{dt} = \beta x - x^2 y \end{cases} \tag{1}$$

où $\beta \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$.

Points d'équilibre et stabilité

Question 1 Déterminez le(s) point(s) d'équilibre de ce système dans le plan (x, y).

- ☐ $(\frac{\beta}{2}, 2)$ et $(0,0)$
- ☐ $(2, \frac{\beta}{2})$ et $(0,0)$
- ☐ $(\frac{\beta}{2}, 2)$
- ■ $(2, \frac{\beta}{2})$

Question 2 Déterminez la matrice jacobienne de ce système.

- ■ $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -(\beta+1)+2xy & x^2 \\ \beta - 2xy & -x^2 \end{pmatrix}$
- ☐ $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} (\beta+1)-2xy & -x^2 \\ \beta + 2xy & x^2 \end{pmatrix}$
- ☐ $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -(\beta+1)-xy & -x^2y \\ \beta + xy & x^2 \end{pmatrix}$

Question 3 Déterminez la matrice Jacobienne au point d'équilibre non trivial (x^*, y^*).

☐ $\mathbf{J}^* = \begin{pmatrix} \beta - 1 & -4 \\ -\beta & 4 \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{J}^* = \begin{pmatrix} 3\beta + 1 & 4 \\ \beta & -4 \end{pmatrix}$ ■ $\mathbf{J}^* = \begin{pmatrix} \beta - 1 & 4 \\ -\beta & -4 \end{pmatrix}$

Question 4 Calculez le déterminant de la jacobienne au point d'équilibre non trivial (x^*, y^*).

☐ $\det(\mathbf{J}^*) = \mathbf{8}\beta + \mathbf{4}$
■ $\det(\mathbf{J}^*) = \mathbf{4}$
☐ $\det(\mathbf{J}^*) = \mathbf{16}\beta + \mathbf{4}$

Question 5 Calculez la trace de la jacobienne au point d'équilibre non trivial (x^*, y^*) et déterminez la valeur β_0 prise par β de telle sorte que $\mathrm{tr}(\mathbf{J}^*) > \mathbf{0}$.

☐ $\mathrm{tr}(\mathbf{J}^*) > \mathbf{0}$ si $\beta < \beta_0$ avec $\beta_0 = 5$
■ $\mathrm{tr}(\mathbf{J}^*) > \mathbf{0}$ si $\beta > \beta_0$ avec $\beta_0 = 5$
☐ $\mathrm{tr}(\mathbf{J}^*) > \mathbf{0}$ si $\beta < \beta_0$ avec $\beta_0 = 1$
☐ $\mathrm{tr}(\mathbf{J}^*) > \mathbf{0}$ $\forall \beta > 0$

Question 6 En déduire la stabilité du point d'équilibre non trivial (x^*, y^*).

☐ (x^*, y^*) est asymptotiquement stable $\forall \beta > 0$
■ (x^*, y^*) est asymptotiquement stable si $\beta < \beta_0$
☐ (x^*, y^*) est asymptotiquement stable si $\beta > \beta_0$
☐ (x^*, y^*) est un point selle si $\beta < \beta_0$

Question 7 Quelle est la stabilité du point d'équilibre non trivial (x^*, y^*) pour $\beta = \beta_0$?

☐ (x^*, y^*) est instable
☐ (x^*, y^*) est un point selle
■ La linéarisation prévoit des centres autour de (x^*, y^*)
☐ Il y a des centres autour de (x^*, y^*)

Isoclines nulles dans le plan (x, y)

Question 8 Déterminez la(les) isocline(s) verticale(s).

■ $y = \frac{\beta+1}{x} - \frac{2}{x^2}$
☐ $y = \frac{\beta}{x}$ et $x = 0$
☐ $y = \frac{\beta+1}{x} - \frac{2}{x^2}$ et $y = 0$
☐ $y = -\frac{\beta+1}{x} + \frac{2}{x^2}$

Question 9 Déterminez la(les) isocline(s) horizontale(s).

☐ $y = \frac{\beta+1}{x} - \frac{2}{x^2}$ et $y = 0$
■ $y = \frac{\beta}{x}$ et $x = 0$
☐ $y = \frac{\beta+1}{x} - \frac{2}{x^2}$
☐ $y = -\frac{\beta+1}{x} + \frac{2}{x^2}$

Les isoclines (hors axes éventuels) sont représentées sur le portrait de phase de la Figure 1 ci-dessous.

Question 10 A quel type d'isocline correspond la courbe en rouge ?

■ Isocline verticale ☐ Isocline horizontale

Question 11 A quel abscisse x_1 se situe le sommet de la courbe en rouge ?

☐ $x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(\beta + 1)^2$ ■ $x_1 = \frac{4}{\beta+1}$ ☐ $x_1 = \frac{2}{\beta+1}$

Question 12 Vers quelle valeur tend la courbe noire quand x tend vers l'infini ?

☐ 2 ■ 0 ☐ β ☐ $\beta + 1$

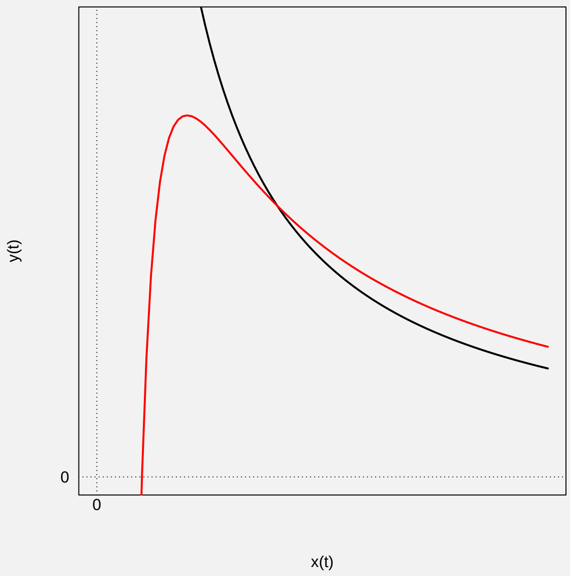


Figure 1 – Isoclines dans le plan (x, y).

Portraits de phase et chroniques

On simule le modèle pour $\beta = 3$ et $\beta = 7$ et pour deux conditions initiales différentes. Les portraits de phase sont représentés sur la Figure 2 ci-dessous.

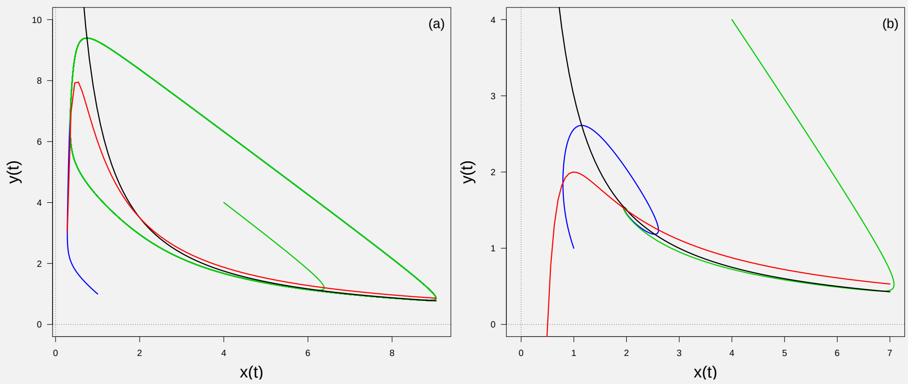


Figure 2 – Portraits de phase pour différentes valeurs de β et deux conditions initiales différentes (en bleu et vert).

Question 13 A quelle condition initiale conrrespond la trajectoire en bleu ?

☐ $x(0) = y(0) = 4$ ☐ $x(0) = 2$ et $y(0) = 1.5$ ■ $x(0) = y(0) = 1$

Question 14 A quel graphe de la Figure 2 correspond le portrait de phase pour $\beta = 3$?

■ (b) ☐ (a)

Question 15 Qu'observez-vous sur la Figure 2(a) ?

☐ Convergence vers un point d'équilibre asymptotiquement stable.
☐ Un centre
■ Un cycle limite asymptotiquement stable
☐ Un cycle limite instable

Question 16 Quel graphe de la Figure 2 montre une coexistence à long terme des deux populations à des densités fixes ?

☐ Figure 2(a) ■ Figure 2(b)

Les chroniques pour ces mêmes valeurs de β sont présentées sur la Figure 3 (pour une seule des deux conditions initiales).

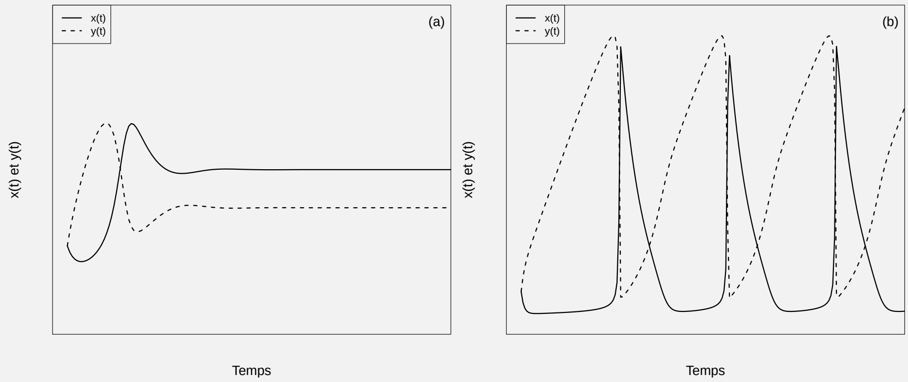


Figure 3 – Chroniques pour différentes valeurs de β.

Question 17 A quelle condition initiale de la Figure 2 correspondent les chroniques représentées sur le Figure 3 ?

☐ Celle en vert ■ Celle en bleu

Question 18 A quel graphe de la Figure 2 correspondent les chroniques de la Figure 3(b) ?

☐ Figure 2(b) ■ Figure 2(a)

Les chroniques pour $\beta = \beta_0$ sont représentées sur la Figure 4 ci-dessous.

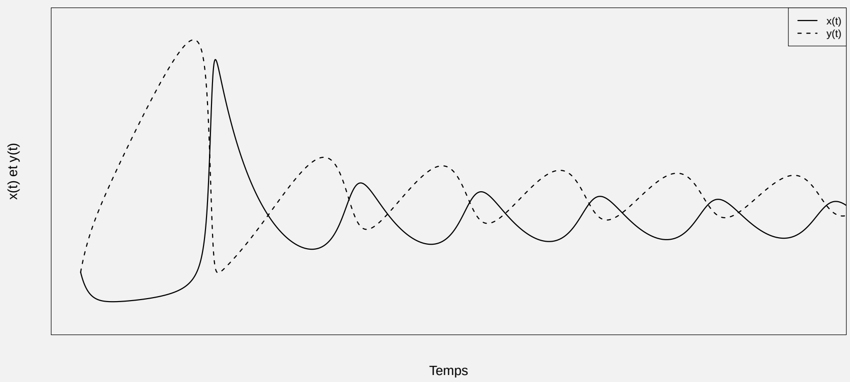


Figure 4 – Chroniques pour $\beta = \beta_0$.

Question 19 Qu'en concluez-vous quant au comportement du modèle pour $\beta = \beta_0$?

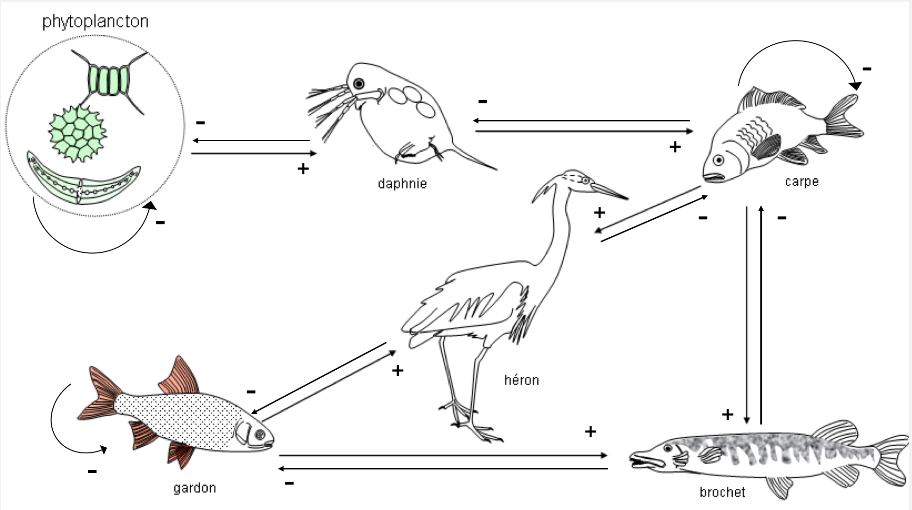
- ☐ Les centres prédits autour de (x^*, y^*) par le théorème de linéarisation sont conservés à l'échelle globale du portrait de phase.
- ■ Les centres prédits autour de (x^*, y^*) par le théorème de linéarisation ne sont pas conservés à l'échelle globale du portrait de phase.

Question 20 Que se passe-t-il si $\beta = 0$?

- ☐ Les deux espèces vont disparaître.
- ■ L'espèce de densité $y(t)$ va disparaître.
- ☐ Les deux espèces vont co-exister.

Partie 2 : Réseau trophique simplifié d'un étang

Le phytoplancton, brouté par les daphnies, est à la base du réseau trophique simplifié d'un étang selon le schéma ci-dessous.



`http://svt.ac-dijon.fr/schemassvt/IMG/gif/etang_reso.gif`

Question 21 Donnez la matrice de communauté correspondante, les colonnes étant ordonnées comme suit : 1. Phytoplancton ; 2. Daphnie ; 3. Carpe ; 4. Gardon ; 5. Héron ; 6. Brochet.

■ $\begin{pmatrix} - & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & - & 0 & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & + & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & + & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} - & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & + \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} - & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & - & 0 & + & + \\ 0 & 0 & 0 & - & + & + \\ 0 & 0 & - & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & - & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Question 22 Que pouvez-vous dire quant à la co-existence à long terme de toutes les espèces de ce réseau ?

- ☐ Toutes les espèces vont co-exister.
- ☐ Toutes les espèces ne vont pas co-exister.
- ■ On ne peut rien en dire.

Partie 3 : Questions diverses

Intégrale première

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax(1-x)(2y-1) \\ \\ \dot{y} = by(1-y)(2x-1) \end{cases} \tag{2}$$

La linéarisation prévoit des centres autour du point d'équilibre $E^* = (0.5, 0.5)$.

Question 23 Laquelle des fonctions suivantes est une intégrale première du système (2) ?

- ☐ $H(x,y) = a\ln(x(1-x)) + b\ln(y(1-y))$
- ☐ $H(x,y) = b\ln(1-x) + a\ln(1-y)$
- ■ $H(x,y) = b\ln(x(1-x)) + a\ln(y(1-y))$

Question 24 Quel type d'extrêmum admet cette intégrale première au point d'équilibre E^* ? On donne $\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x^2}|_{E^*} < 0$ et $\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial y^2}|_{E^*} < 0$.

- ☐ Un minimum
- ■ Un maximum

Question 25 Qu'en concluez-vous quant à la stabilité du point d'équilibre E^* du système (2) ?

- ■ On a bien des centres autour de E^*
- ☐ On ne peut pas conclure
- ☐ E^* est asymptotiquement stable

Dynamique d'une population d'oiseaux

On s'intéresse maintenant à la dynamique d'une population d'oiseaux sur une île au large de la côte atlantique française. Le modèle proposé pour décrire l'évolution au cours du temps de la densité $v(t)$ de cette population est le suivant :

$$\frac{dv}{dt} = (v-2)(1-\frac{v}{M}) + K \tag{3}$$

où $M > 2$ et $K > 2$.

Question 26 Que représente le paramètre K ?

- ☐ Proportion d'oiseaux arrivant sur l'île à chaque pas de temps, qui dépend du nombre d'oiseaux déjà présents.
- ■ Nombre d'oiseaux arrivant sur l'île à chaque pas de temps, qui ne dépend pas du nombre d'oiseaux déjà présents.
- ☐ Nombre d'oiseaux arrivant sur l'île à chaque pas de temps, qui dépend du nombre d'oiseaux déjà présents.
- ☐ Proportion d'oiseaux arrivant sur l'île à chaque pas de temps, qui ne dépend pas du nombre d'oiseaux déjà présents.

Question 27 Déterminez le(s) point(s) d'équilibre $v^* > 0$ de l'équation (3).

- ☐ $v_1^* = M$ et $v_2^* = 2$
- ☐ $v_1^* = 1 + \frac{M}{2} + \frac{M}{2}\sqrt{\Delta}$ et $v_2^* = 1 + \frac{M}{2} - \frac{M}{2}\sqrt{\Delta}$ avec $\Delta = \left(1 + \frac{2}{M}\right)^2 + \frac{4}{M}(K-2)$
- ☐ $v_1^* = 1 + \frac{M}{2} - \frac{M}{2}\sqrt{\Delta}$ avec $\Delta = \left(1 + \frac{2}{M}\right)^2 + \frac{4}{M}(K-2)$
- ■ $v_1^* = 1 + \frac{M}{2} + \frac{M}{2}\sqrt{\Delta}$ avec $\Delta = \left(1 + \frac{2}{M}\right)^2 + \frac{4}{M}(K-2)$

Question 28 Déterminez la stabilité du point d'équilibre v_1^*.

☐ v_1^* est instable.

☒ v_1^* est asymptotiquement stable.

La courbe représentative de $\frac{dv}{dt} = f(v)$ est représentée sur la Figure 5 ci-dessous.

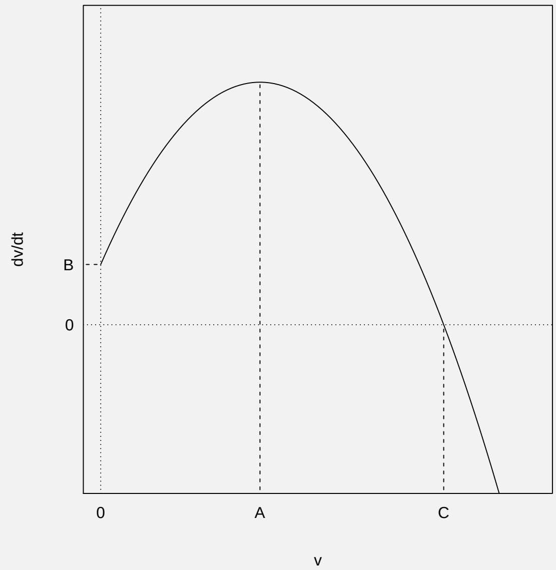


Figure 5 – Courbe représentative de $\frac{dv}{dt}$ en fonction de v.

Question 29 Déterminez l'abscisse A en fonction des paramètres M et/ou K.

☐ $A = K - 2$

☐ $A = \frac{M}{2} - 1$

☒ $A = \frac{M}{2} + 1$

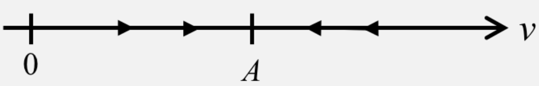
Question 30 Déterminez l'ordonnée B en fonction des paramètres M et/ou K.

☒ $B = K - 2$

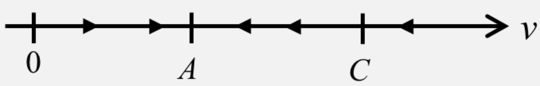
☐ $B = \frac{M}{2} + 1$

☐ $B = \frac{M}{2} - 1$

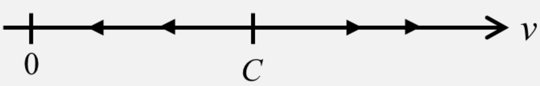
Question 31 Quel est le portrait de phase correspondant à l'équation (3) ?



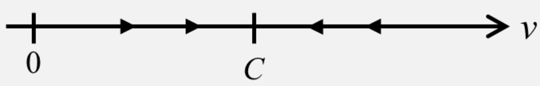
☐



☐



☐



☒