Mathématiques Appliquées à la Biologie
Lundi 7 janvier 2018 – Durée conseillée : 1 heure

Instructions

Ce QCM sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous pourra être sanctionnée.

— Pour cocher une case, remplissez-la en noir (☐ → ■) en utilisant un stylo noir ;
— Pour corriger, effacez avec du correcteur blanc (■ →) ;
— N'inscrivez rien dans l'en-tête ni dans les marges des pages ;
— Le symbole ♣ indique que le nombre de bonnes réponses proposées est indéterminé (0, 1, 2,. . .).
Son absence signifie que la question a une unique bonne réponse.

Ce QCM est à espérance nulle : réponse juste = 1 point ; pas de réponse ou réponses incohérentes = 0 point ; réponse fausse à une question avec n propositions = $-\frac{1}{n-1}$ points. Pour la plupart, les questions sont indépendantes.

Nous vous rappellons que vous pouvez vous munir d'une feuille A4 recto-verso manuscrite originale dont le contenu est à votre convenance, ainsi que de tout type de calculatrice.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

....

Numéro d'étudiant :

....

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

1 La chenille de l'épicéa

La chenille de l'épicéa (*Choristineura fumiferana*) est une espèce originaire des forêts d'Amérique du Nord où elle cause de très importants ravages par défoliation lors de ses pullulations. L'équation proposée par les premiers auteurs qui ont entrepris une modélisation de l'évolution de cette population, avec l'espoir de la contrôler, est la somme d'une équation logistique classique et d'un terme de prédation par les oiseaux [1]. Si on désigne par $n(t)$ le nombre de chenilles au temps t, alors la dynamique de la population est représentée par l'équation (1) :

$$\frac{dn(t)}{dt} = rn(t)\left(1 - \frac{n(t)}{K}\right) - \frac{(n(t))^2}{1 + (n(t))^2} = f\left(n(t)\right) \tag{1}$$

dans laquelle les deux paramètres r et K sont strictement positifs.

Question 1 Que représente la quantité $\frac{dn(t)}{dt}$?

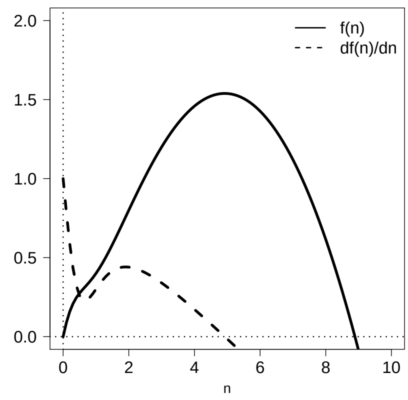
☐ La taille de la population de chenilles
☐ Le taux d'accroissement de la population de chenilles
■ La vitesse d'accroissement de la population de chenilles

Question 2 Quelle est la signification du paramètre r ?

☐ La taille de la population de chenilles

1. Ludwig D, Jones DD, Holling CS. 1978. Qualitative Analysis of Insect Outbreak Systems : The Spruce Budworm and Forest. *Journal of Animal Ecology*, 47 : 315–332.

☐ La vitesse d'accroissement de la population de chenilles
■ Le taux d'accroissement de la population de chenilles



Question 3 D'après le graphe ci-dessus, combien de points d'équilibre admet l'équation (1) ?

☐ 3 ☐ 0 ☐ 1 ■ 2

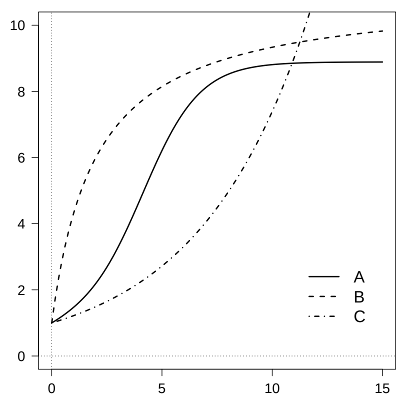
Question 4 D'après le graphe ci-dessus, quelle est la nature du point d'équilibre non trivial ?

☐ shunt négatif
☐ shunt positif
☐ instable
■ asymptotiquement stable

Question 5 D'après le graphe ci-dessus, les chroniques $n(t)$ admettent-elles un point d'inflexion ?

☐ non ■ oui

Question 6 Parmi les courbes ci-dessous, laquelle correspond à $n(t)$ lorsque $n(0) = 1$?



☐ B ☐ C ■ A

Question 7 La modélisation proposée répond-elle à l'objectif de contrôle de la population de chenilles ?

■ oui ☐ non

2 La dynamique de transmission de la malaria

La première tentative pour décrire de manière quantitative la dynamique de la transmission de la malaria est le modèle de Ross [2] qui est encore aujourd'hui à la base des études épidémiologiques sur la malaria. Ce modèle, qui traduit les interactions entre les proportions d'individus infectés dans la population hôte (les humains) et dans la population de vecteurs (les moustiques), est défini comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \alpha y(t)\,(1 - x(t)) - r x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \beta x(t)\,(1 - y(t)) - \mu y(t) \end{cases} \tag{2}$$

avec $x(t)$ la proportion d'individus infectés dans la population humaine, $y(t)$ la proportion de moustiques infectés, α un coefficient qui traduit l'infection par la malaria parmi les humains, r le taux de guérison des humains, β un coefficient qui traduit l'infection des moustiques et μ le taux de mortalité des moustiques. Tous les paramètres sont strictement positifs.

Question 8 Que représente la quantité $1 - x(t)$?

- ■ La proportion d'humains sains
- ☐ La proportion de moustiques sains
- ☐ La proportion d'humains infectés
- ☐ La proportion de moustiques infectés

Question 9 Que représente la quantité $\beta x(t)\,(1 - y(t))$?

- ■ La proportion de moustiques qui s'infectent en piquant un humain infecté par unité de temps
- ☐ La proportion d'humains qui guérissent par unité de temps
- ☐ La proportion d'humains qui s'infectent suite à la piqûre d'un moustique par unité de temps
- ☐ La proportion de moustiques qui meurent après avoir piquer un humain par unité de temps

Question 10 Parmi les propositions suivantes, laquelle correspond au point d'équilibre non trivial du système ? Cette question est indépendante des suivantes.

☐ $\left(x^* = \frac{\beta\alpha-\mu r}{\beta(\alpha+r)}, y^* = \frac{\alpha(\beta+\mu)}{\beta\alpha-\mu r}\right)$ ■ $\left(x^* = \frac{\beta\alpha-\mu r}{\beta(\alpha+r)}, y^* = \frac{\beta\alpha-\mu r}{\alpha(\beta+\mu)}\right)$

☐ $\left(x^* = \frac{\beta\alpha-\mu r}{\alpha(\beta+\mu)}, y^* = \frac{\beta\alpha-\mu r}{\beta(\alpha+r)}\right)$ ☐ $\left(x^* = \frac{\beta(\alpha+r)}{\beta\alpha-\mu r}, y^* = \frac{\beta\alpha-\mu r}{\alpha(\beta+\mu)}\right)$

Question 11 Quelle contrainte doit-on imposer aux paramètres pour que le point d'équilibre non trivial ait du sens biologiquement ? *On supposera dans toute la suite que cette contrainte est vérifiée.*

☐ $\mu/\beta > r/\alpha$ ■ $\mu/\alpha < \beta/r$ ☐ $\mu/\beta < r/\alpha$ ☐ $\mu/\alpha > \beta/r$

Question 12 Parmi les propositions suivantes, laquelle correspond à la matrice jacobienne du système ?

☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha y - r & \beta\,(1-y) \\ \alpha\,(1-x) & -\beta x - \mu \end{pmatrix}$ ■ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha y - r & \alpha\,(1-x) \\ \beta\,(1-y) & -\beta x - \mu \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\beta x - \mu & \alpha\,(1-x) \\ \beta\,(1-y) & -\alpha y - r \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\beta x - \mu & \beta\,(1-y) \\ \alpha\,(1-x) & -\alpha y - r \end{pmatrix}$

Question 13 Parmi les propositions suivantes, laquelle correspond à la matrice jacobienne du système calculée au point d'équilibre $(0, 0)$?

☐ $\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -\mu & \beta \\ \alpha & -r \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -r & \beta \\ \alpha & -\mu \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -\mu & \alpha \\ \beta & -r \end{pmatrix}$ ■ $\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -r & \alpha \\ \beta & -\mu \end{pmatrix}$

Question 14 Quelle est la nature point d'équilibre $(0, 0)$?

2. Ross R. 1915. Some a priori pathometric equations. *The British Medical Journal.* 1 :546–547.

- ☐ Foyer asymptotiquement stable
- ■ Point selle
- ☐ Etoile instable
- ☐ Nœud asymptotiquement stable
- ☐ Nœud instable
- ☐ Foyer instable

Question 15 On remarque que le point d'équilibre non trivial est solution des deux systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} \alpha \frac{y^*}{x^*} = \alpha y^* + r \\ \beta \frac{x^*}{y^*} = \beta x^* + \mu \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha\,(1 - x^*) = r \frac{x^*}{y^*} \\ \beta\,(1 - y^*) = \mu \frac{y^*}{x^*} \end{cases}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle correspond à la matrice jacobienne du système (2) calculée au point d'équilibre non trivial ?

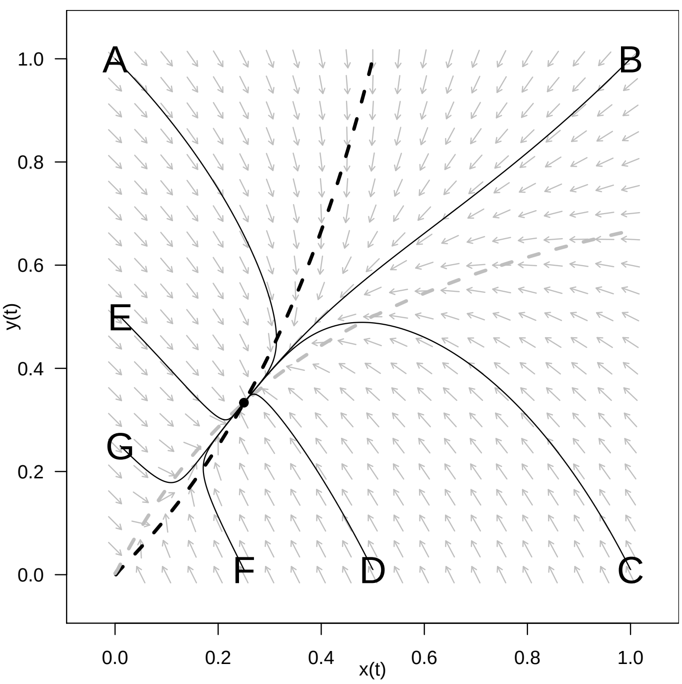
- ☐ $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -\alpha \frac{y^*}{x^*} & \mu \frac{y^*}{x^*} \\ r \frac{x^*}{y^*} & -\beta \frac{x^*}{y^*} \end{pmatrix}$
- ■ $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -\alpha \frac{y^*}{x^*} & r \frac{x^*}{y^*} \\ \mu \frac{y^*}{x^*} & -\beta \frac{x^*}{y^*} \end{pmatrix}$
- ☐ $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -\beta \frac{x^*}{y^*} & r \frac{x^*}{y^*} \\ \mu \frac{y^*}{x^*} & -\alpha \frac{y^*}{x^*} \end{pmatrix}$
- ☐ $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -\beta \frac{x^*}{y^*} & \mu \frac{y^*}{x^*} \\ r \frac{x^*}{y^*} & -\alpha \frac{y^*}{x^*} \end{pmatrix}$

Question 16 Que vaut $\det(\mathbf{A}^*)$?

- ☐ $\det(\mathbf{A}^*) = \mu r - \beta\alpha$
- ☐ $\det(\mathbf{A}^*) = \alpha r - \mu\beta$
- ■ $\det(\mathbf{A}^*) = \beta\alpha - \mu r$
- ☐ $\det(\mathbf{A}^*) = \beta r - \mu\alpha$

Question 17 Sachant que $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^*) = -\alpha \frac{y^*}{x^*} - \beta \frac{x^*}{y^*}$, quelle est la nature du point d'équilibre non trivial ?

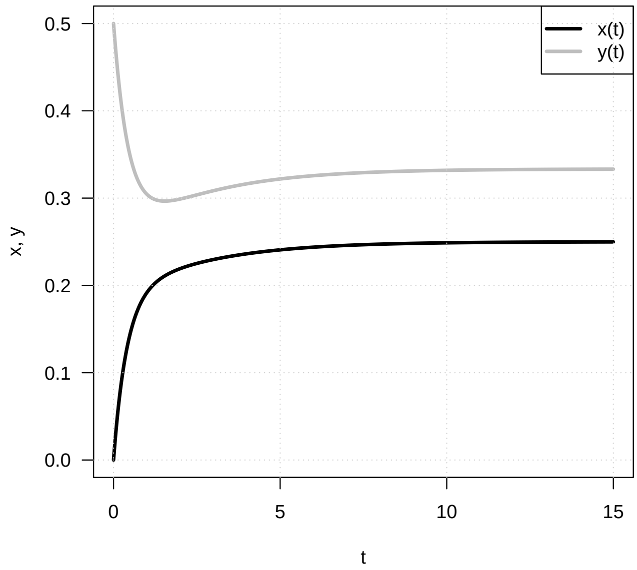
- ☐ étoile instable
- ☐ instable
- ☐ point selle
- ■ asymptotiquement stable



Question 18 D'après le graphe précédent, à quelle isocline la courbe en pointillés noirs correspond-elle ?

☐ isocline horizontale ■ isocline verticale

Question 19 D'après le graphe précédent, à quelle trajectoire correspond le graphe ci-dessous ?



☐ B ☐ A ■ E ☐ D ☐ G ☐ C ☐ F

Question 20 D'après le graphe ci-dessus, quelle est approximativement la proportion d'humains atteint de malaria à $t = 15$?

☐ 42% ■ 25% ☐ 58% ☐ 33%