Correction

Mathématiques Appliquées à la Biologie
Lundi 6 janvier 2020 – Durée conseillée : 1 heure

Instructions

Ce QCM sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous pourra être sanctionnée.

— Pour cocher une case, remplissez-la en noir (□ → ■) en utilisant un stylo noir ;
— Pour corriger, effacez avec du correcteur blanc (■ →) ;
— N'inscrivez rien dans l'en-tête ni dans les marges des pages ;
— Le symbole ♣ indique que le nombre de bonnes réponses proposées est indéterminé (0, 1, 2,. . .). Son absence signifie que la question a une unique bonne réponse.

Ce QCM est à espérance nulle : réponse juste = 1 point ; pas de réponse ou réponses incohérentes = 0 point ; réponse fausse à une question avec n propositions $= -\frac{1}{n-1}$ points. Pour la plupart, les questions sont indépendantes.

Nous vous rappellons que vous pouvez vous munir d'une feuille A4 recto-verso manuscrite originale dont le contenu est à votre convenance, ainsi que de tout type de calculatrice.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

....

Numéro d'étudiant :

....

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

1 Épidémie de grippe

On s'intéresse ici à une épidémie de grippe sur un campus universitaire de mille étudiants sur lequel arrive un étudiant porteur du virus de la grippe.
Soit $x(t)$ le nombre d'étudiants infectés au temps t.
On suppose que la vitesse à laquelle se répand le virus est proportionnelle au produit des nombres d'étudiants sains et infectés, et qu'aucun étudiant ne quitte le campus le temps de l'épidémie.
Ainsi, on suppose que l'épidémie se propage selon l'équation suivante :

$$(E) \quad \frac{dx(t)}{dt} = k \times x(t) \times (1000 - x(t)) \Leftrightarrow \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

avec $k > 0$.

Question 1 Que représente le coefficient k ?

□ Le taux de natalité □ Le taux de mortalité ■ Le taux de contamination

Question 2 De quel modèle s'agit-il ?

☐ Le modèle de Lotka-Volterra
■ Le modèle de Verhulst
☐ Le modèle de Malthus
☐ Le modèle de Gompertz

Question 3 Quels sont les points d'équilibre de l'équation (E) ?

■ $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 1000$
☐ $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 10^{-3}$
☐ $x_1^* = 0$
☐ $x_2^* = 1000$

Question 4 Que vaut $\frac{df}{dx}$? On rappelle que (E) est définie par $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

☐ $1000k - 2x$
☐ $k(1000 - x)$
☐ $1000 - 2kx$
■ $k(1000 - 2x)$

Question 5 Que vaut $\frac{df}{dx}$ pour $x = x_1^*$?

☐ $-1000k$
☐ $1000(k - 2)$
■ $1000k$
☐ 1000

Question 6 En déduire la nature de $x = x_1^*$?

■ Un point d'équilibre instable
☐ Un shunt positif
☐ Un point d'équilibre asymptotiquement stable
☐ Un shunt négatif

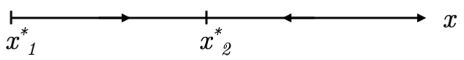
Question 7 Que vaut $\frac{df}{dx}$ pour $x = x_2^*$?

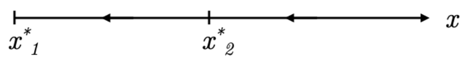
■ $-1000k$
☐ $1000k$
☐ 1000
☐ $1000(k - 1)$

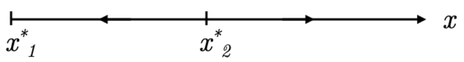
Question 8 En déduire la nature de $x = x_2^*$?

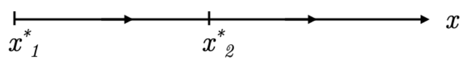
☐ Un shunt négatif
■ Un point d'équilibre asymptotiquement stable
☐ Un point d'équilibre instable
☐ Un shunt positif

Question 9 En déduire le portrait de phase de (E) ?

(A) 

(C) 

(B) 

(D) 

☐ (C) ■ (A) ☐ (D) ☐ (B)

Question 10 Que pouvez-vous conclure quant à la dynamique de cette épidémie de grippe ?

■ Au bout d'un moment tous les étudiants sont malades
☐ Au bout d'un moment tous les étudiants sont guéris
☐ Au bout d'un moment tous les étudiants sont morts

2 Espèces en interaction

Le modèle suivant est proposé pour modéliser une interaction écologique entre deux espèces dont on désigne par $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les biomasses respectives (exprimées en unités arbitraires).

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = r_1 \times x_1(t) \times (1 - x_1(t)) + \alpha \times x_1(t) \times x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = r_2 \times x_2(t) \times (1 - x_2(t)) + \beta \times x_1(t) \times x_2(t) \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, r_1, r_2 > 0$. On suppose par ailleurs que $r_1 > \alpha$ et $r_2 > \beta$.

Question 11 A quel type d'interaction peut-on apparenter la relation entre les deux espèces ?

☐ compétition
☐ prédation
☐ parasitisme
■ mutualisme

Question 12 ♣ Parmi les couples suivants, lesquels correspondent à des points d'équilibre de (S) ? **ATTENTION**, ici plusieurs réponses sont attendues.

■ $(1, 0)$
☐ $(1, -1)$
☐ $(1, 1)$
☐ $(1, 2)$
■ $(0, 0)$
■ $(0, 1)$

Question 13 Le système (S) possède un point d'équilibre non trivial (x_1^*, x_2^*). De quel système d'équation ce point d'équilibre est-il la solution ?

☐ $\left\{ \begin{array}{l} r_1(1-x_2^*) + \alpha x_1^* = 0 \\ r_2(1-x_1^*) + \beta x_2^* = 0 \end{array} \right.$

☐ $\left\{ \begin{array}{l} r_1 x_2^* + \alpha(1-x_1^*) = 0 \\ r_2 x_1^* + \beta(1-x_2^*) = 0 \end{array} \right.$

■ $\left\{ \begin{array}{l} r_1(1-x_1^*) + \alpha x_2^* = 0 \\ r_2(1-x_2^*) + \beta x_1^* = 0 \end{array} \right.$

☐ $\left\{ \begin{array}{l} r_1 x_1^* + \alpha(1-x_2^*) = 0 \\ r_2 x_2^* + \beta(1-x_1^*) = 0 \end{array} \right.$

Question 14 Donner la matrice jacobienne du système (S).

☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r_1(1-2x_1) + \alpha x_2 & \alpha x_1 \\ r_2(1-2x_2) + \beta x_1 & \beta x_2 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r_1(1-2x_1) + \alpha x_2 & \beta x_2 \\ \alpha x_1 & r_2(1-2x_2) + \beta x_1 \end{pmatrix}$

■ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r_1(1-2x_1) + \alpha x_2 & \alpha x_1 \\ \beta x_2 & r_2(1-2x_2) + \beta x_1 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r_2(1-2x_2) + \beta x_1 & \beta x_2 \\ r_1(1-2x_1) + \alpha x_2 & \alpha x_1 \end{pmatrix}$

Question 15 Donner la matrice jacobienne du système (S) au point d'équilibre $(0, 0)$.

■ $\mathbf{A}_{(\mathbf{0},\mathbf{0})} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{A}_{(\mathbf{0},\mathbf{0})} = \begin{pmatrix} r_1 & \alpha \\ \beta & r_2 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{A}_{(\mathbf{0},\mathbf{0})} = \begin{pmatrix} -r_1 & \alpha \\ \beta & -r_2 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{A}_{(\mathbf{0},\mathbf{0})} = \begin{pmatrix} 0 & r_1 \\ r_2 & 0 \end{pmatrix}$

Question 16 Quel est la nature du point d'équilibre $(0, 0)$.

☐ Noeud dégénéré instable
☐ Noeud asymptotiquement stable
■ Noeud instable
☐ Etoile asymptotiquement stable
☐ Point selle instable
☐ Foyer instable
☐ Foyer asymptotiquement stable

On donne ci-dessous la matrice jacobienne au point d'équilibre non trivial (x_1^*, x_2^*) :

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -r_1 x_1^* & \alpha x_1^* \\ \beta x_2^* & -r_2 x_2^* \end{pmatrix}$$

Question 17 Que vaut $\det(\mathbf{A}^*)$?

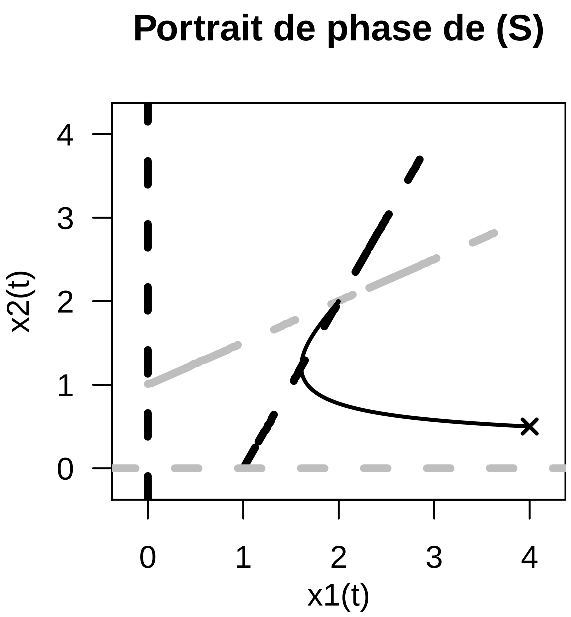
☐ $(\alpha r_2 - \beta r_1) x_1^* x_2^*$
■ $(r_1 r_2 - \alpha\beta) x_1^* x_2^*$
☐ $(\alpha\beta - r_1 r_2) x_1^* x_2^*$
☐ $(\beta r_1 - \alpha r_2) x_1^* x_2^*$

Question 18 Que vaut $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^*)$?

☐ $\alpha x_1^* - r_2 x_2^*$
☐ $\beta x_2^* - r_1 x_1^*$
☐ $r_1 x_1^* + r_2 x_2^*$
■ $-r_1 x_1^* - r_2 x_2^*$

Question 19 Que pouvez-vous dire du point d'équilibre (x_1^*, x_2^*) ?

- ☐ Il est instable
- ☐ C'est un point selle
- ☐ Il correspond à des centres
- ■ Il est asymptotiquement stable



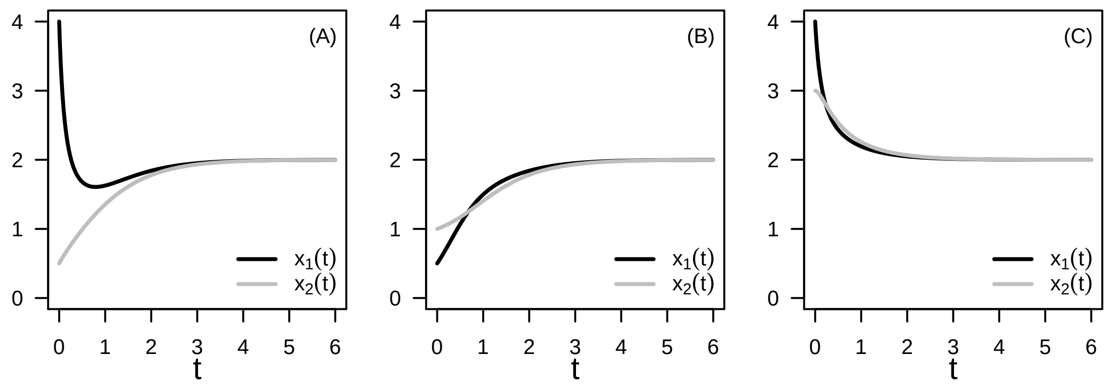
Question 20 Sur le graphe ci-dessus, de quelle couleur sont les isoclines verticales ?

- ■ noires
- ☐ grises

Question 21 Quelles sont les coordonnées du point d'équilibre non trivial ?

- ☐ $(1, 1)$
- ☐ $(0, 1)$
- ☐ $(1, 0)$
- ■ $(2, 2)$

Question 22 Quelles chroniques correspondent à la trajectoire dessinée sur le portrait de phase ?



- ■ (A)
- ☐ (B)
- ☐ (C)