

M1 BEE@Lyon - UE EEQ : Modélisation

(S. Charles, I. Amat et C. Lopes)

Session 1 – Durée conseillée : 60 minutes

Instructions

Ce QCM sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous pourra être sanctionnée.

- Pour cocher une case, remplissez-la en noir (■) en utilisant un stylo noir ;
- Pour corriger, effacez avec du correcteur blanc sans la redessiner ;
- N'inscrivez rien dans l'en-tête ni dans les marges des pages ;
- Pour chaque question, il n'y a qu'une seule bonne réponse.

Ce QCM est à espérance nulle : réponse juste = 1 point ; pas de réponse ou réponses incohérentes = 0 point ; réponse fautive à une question avec n propositions = $-\frac{1}{n-1}$ points. Pour la plupart, les questions sont indépendantes.

Vous êtes autorisés à utiliser une feuille A4 recto-verso manuscrite originale dont le contenu est à votre convenance.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

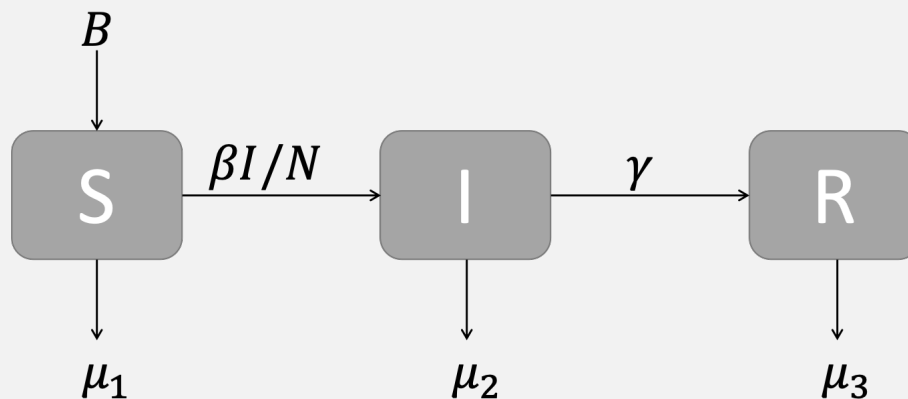
On s'intéresse à la dynamique d'une épidémie dans une population subdivisée en classes d'individus sains, infectieux et guéris, dont les nombres au temps t sont notés $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$, respectivement. Soit $N = S(t) + I(t) + R(t)$ la taille totale de la population.

On suppose qu'il n'y a pas de transmission verticale, donc que tous les nouveaux-nés sont sains.

On suppose que la natalité (B pour 'birth') compense les mortalités : $B = \mu_1 S(t) + \mu_2 I(t) + \mu_3 R(t)$, avec B une constante.

On suppose que l'incidence suit une loi **fréquence-dépendante**.

On a le graphe suivant :



Question 1 Quel système d'EDO régit la dynamique de l'épidémie ?

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = B - \beta SI - \mu_1 S \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu_2 I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu_3 R \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = B - \beta \frac{SI}{N} - \mu_1 S \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \mu_2 I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu_3 R \end{array} \right.$$

Dans le système précédent, la première équation peut se ré-écrire comme suit :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N} + \mu_2 I + \mu_3 R$$

Question 2 Comment s'écrit le système d'EDO en dimension 2 ?

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta SI - \mu_1 S \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - \mu_2 I \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N} + \mu_2 I + \mu_3 (N - S - I) \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \mu_2 I - \gamma I \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N} - \mu_1 S \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I - \mu_2 I \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + \mu_2 I + \mu_3 (N - S - I) \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu_2 I - \gamma I \end{array} \right.$$

Question 3 Que vaut $\frac{dN}{dt}$?

Une constante non nulle $+\infty$
 Une fonction de t 0

On pose $p(t) = \frac{S}{N}$ et $q(t) = \frac{I}{N}$.

Question 4 Que représente $p(t)$ et $q(t)$?

Les proportions d'individus sains et guéris
 Les nombres d'individus sains et infectieux
 Les proportions d'individus sains et infectieux
 Les proportions d'individus infectieux et guéris

Question 5 Quel est le domaine de variation des variables $p(t)$ et $q(t)$?

$$\Omega = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq p \leq 1; 0 \leq q \leq 1\}$$

$$\Omega = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid p \geq 0; q \geq 0; p + q \leq 1\}$$

$$\Omega = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq p \leq +\infty; 0 \leq q \leq +\infty\}$$

$$\Omega = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty \leq p \leq +\infty; -\infty \leq q \leq +\infty\}$$

En dimension 2 et en fonction des variables $p(t)$ et $q(t)$, le système d'EDO se réécrit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = -\beta pq + \mu_2 q + \mu_3 (1 - p - q) \\ \frac{dq}{dt} = \beta pq - (\mu_2 + \gamma) q \end{array} \right.$$

Question 6 Le système admet-il un point d'équilibre sans maladie ?

non oui

Question 7 Quelles sont les coordonnées de l'équilibre endémique ?

$$\begin{aligned} (p^*, q^*) &= \left(\frac{\mu_3}{\mu_3 + \gamma}, 1 - \frac{\mu_2 + \gamma}{\beta} \right) & (p^*, q^*) &= \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{\beta}, \frac{\mu_3}{\mu_3 + \gamma} \left(1 - \frac{\mu_2 + \gamma}{\beta} \right) \right) \\ (p^*, q^*) &= \left(\frac{\beta}{\mu_2 + \gamma}, \frac{\mu_3}{\mu_3 + \gamma} \left(1 - \frac{\beta}{\mu_2 + \gamma} \right) \right) & (p^*, q^*) &= \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{\beta}, \frac{\mu_3 \beta}{(\mu_3 + \gamma)(\mu_2 + \gamma)} \right) \end{aligned}$$

Question 8 À quelle condition sur les paramètres l'équilibre endémique existe-t-il biologiquement ? On admettra que $p^* + q^* \leq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\mu_3}{\mu_3 + \gamma} &\geq 1 & \frac{\mu_2 + \gamma}{\beta} &\leq 1 \\ \frac{\mu_2 + \gamma}{\beta} &\geq 1 & \frac{\mu_3}{\mu_3 + \gamma} &\leq 1 \end{aligned}$$

Question 9 En déduire la valeur du taux de reproduction intrinsèque R_0 .

$$R_0 = \frac{\mu_3}{\mu_3 + \gamma} \qquad R_0 = \frac{\beta}{\mu_2 + \gamma} \qquad R_0 = \frac{\beta \mu_3}{(\mu_2 + \gamma)(\mu_3 + \gamma)}$$

Question 10 Quelle est la signification de R_0 ?

Nombre d'infections secondaires engendrées par un individu infecté dans une population d'individus sains

Taux de reproduction des individus infectés

Probabilité d'être infecté après contact avec un individu infecté

On donne ci-dessous le code R permettant de simuler la dynamique décrite par le système.

```
library(phaseR)

modele <- fonction(time,y,parameters){
  dy1 <- -parameters[1]*y[1]*y[2]+parameters[2]*y[2]+parameters[3]*(1-y[1]-y[2])
  dy2 <- parameters[1]*y[1]*y[2]-(parameters[2]+parameters[4])*y[2]
  list(c(dy1,dy2))
}

phasePlaneAnalysis(deriv=modele,
  xlim=c(0,1), ylim=c(0,1),
  tend=100,
  parameters=c(0.12, 0.02, 0.16, 0.04))
```

Question 11 Quelle est la valeur du paramètre β ?

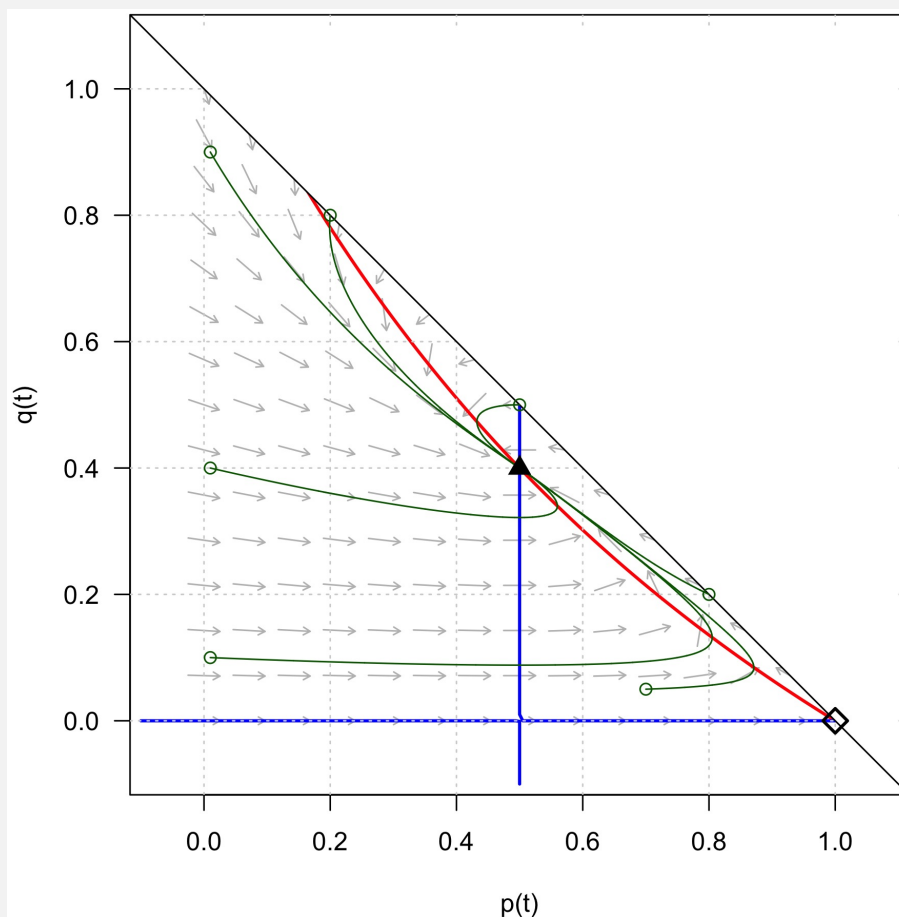
0.16 0.02 0.12 0.04

Question 12 Quelle est la valeur du paramètre γ ?

0.12 0.02 0.16 0.04

CORRECTION

Le portrait de phase issu du code R ci-dessus est le suivant :



Question 13 De quelle couleur sont les isoclines horizontales ?

bleu

rouge

Question 14 De quelle couleur sont les isoclines verticales ?

bleu

rouge

Question 15 Quelles sont les coordonnées de l'équilibre endémique ?

(0.4, 0.5)

(0.01, 0.4)

(1, 0)

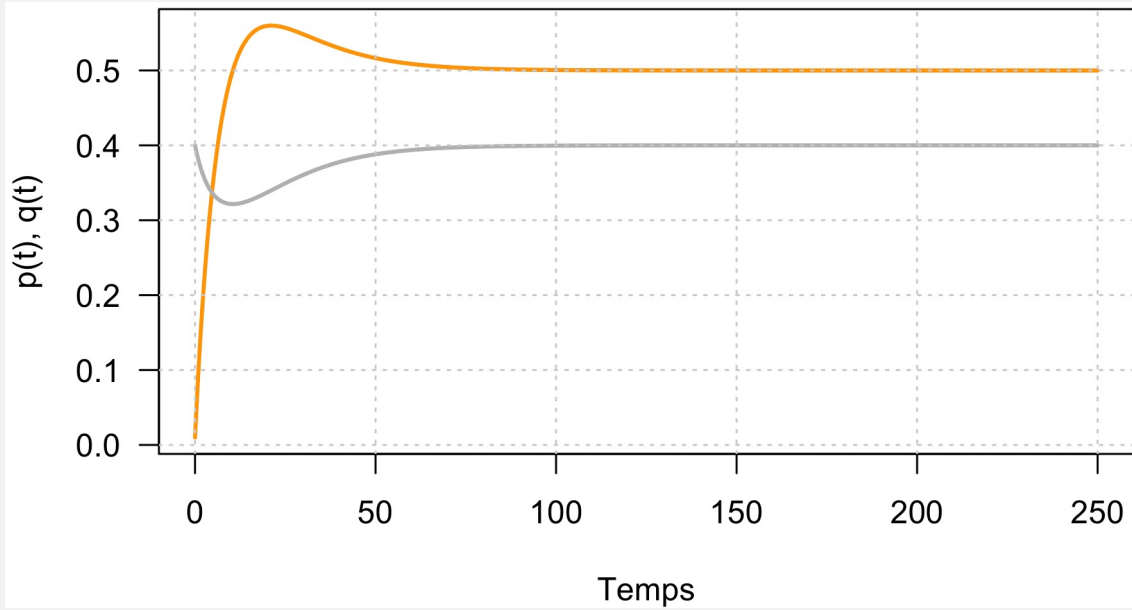
(0.5, 0.4)

Question 16 Quel est le devenir à long terme de l'épidémie si $(p(0), q(0)) = (0.01, 0.4)$?

Elle est éradiquée

Elle perdure dans la population

CORRECTION



Question 17 A quelle condition initiale correspond le graphe ci-dessus ?

(1, 0)

(0.4, 0.5)

(0.01, 0.4)

(0.5, 0.4)

Question 18 Cette condition initiale correspond-elle à une trajectoire sur le portrait de phase ?

oui

non

Question 19 De quelle couleur est la courbe correspondant à la dynamique de $p(t)$?

orange

grise

CORRECTION