M1 BEE@Lyon - UE EEQ : Modélisation

(S. Charles, I. Amat et C. Lopes)

Session 1 – Durée conseillée : 60 minutes

Instructions

Ce QCM sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous pourra être sanctionnée.

- Pour cocher une case, remplissez-la en noir (■) en utilisant un stylo noir ;
- Pour corriger, effacez avec du correcteur blanc sans la redessiner ;
- N'inscrivez rien dans l'en-tête ni dans les marges des pages ;
- Pour chaque question, il n'y a qu'une seule bonne réponse.

Ce QCM est à espérance nulle : réponse juste = 1 point ; pas de réponse ou réponses incohérentes = 0 point ; réponse fausse à une question avec n propositions = $-\frac{1}{n-1}$ points. Pour la plupart, les questions sont indépendantes.

Vous êtes autorisés à utiliser une feuille A4 recto-verso manuscrite originale dont le contenu est à votre convenance.

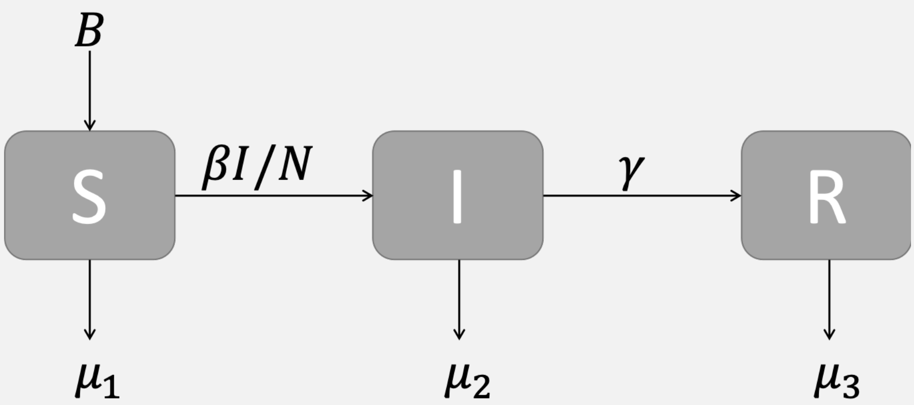
Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

On s'intéresse à la dynamique d'une épidémie dans une population subdivisée en classes d'individus sains, infectieux et guéris, dont les nombres au temps t sont notés $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$, respectivement. Soit $N = S(t) + I(t) + R(t)$ la taille totale de la population.
On suppose qu'il n'y a pas de transmission verticale, donc que tous les nouveaux-nés sont sains.
On suppose que la natalité (B pour '*birth*') compense les mortalités : $B = \mu_1 S(t) + \mu_2 I(t) + \mu_3 R(t)$, avec B une constante.
On suppose que l'incidence suit une loi **fréquence-dépendante**.
On a le graphe suivant :



Question 1 Quel système d'EDO régit la dynamique de l'épidémie ?

- ☐ $\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} \frac{dS}{dt} = B - \beta SI - \mu_1 S \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu_2 I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu_3 R \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} \frac{dS}{dt} = B - \beta \frac{SI}{N} - \mu_1 S \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \mu_2 I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu_3 R \end{cases}$

Dans le système précédent, la première équation peut se ré-écrire comme suit :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N} + \mu_2 I + \mu_3 R$$

Question 2 Comment s'écrit le système d'EDO en dimension 2 ?

- ☐ $\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI - \mu_1 S \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - \mu_2 I \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N} + \mu_2 I + \mu_3 (N - S - I) \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \mu_2 I - \gamma I \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N} - \mu_1 S \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I - \mu_2 I \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + \mu_2 I + \mu_3 (N - S - I) \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu_2 I - \gamma I \end{cases}$

Question 3 Que vaut $\frac{dN}{dt}$?

- ☐ Une constante non nulle
- ☐ $+\infty$
- ☐ Une fonction de t
- ☐ 0

On pose $p(t) = \frac{S}{N}$ et $q(t) = \frac{I}{N}$.

Question 4 Que représente $p(t)$ et $q(t)$?

- ☐ Les proportions d'individus sains et guéris
- ☐ Les nombres d'individus sains et infectieux
- ☐ Les proportions d'individus sains et infectieux
- ☐ Les proportions d'individus infectieux et guéris

Question 5 Quel est le domaine de variation des variables $p(t)$ et $q(t)$?

- ☐ $\Omega = \left\{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |0 \leqslant p \leqslant 1; 0 \leqslant q \leqslant 1\right\}$
- ☐ $\Omega = \left\{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \,|\, p \geqslant 0; q \geqslant 0; p + q \leqslant 1\right\}$
- ☐ $\Omega = \left\{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant p \leqslant +\infty; 0 \leqslant q \leqslant +\infty\right\}$
- ☐ $\Omega = \left\{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -\infty \leqslant p \leqslant +\infty; -\infty \leqslant q \leqslant +\infty\right\}$

En dimension 2 et en fonction des variables $p(t)$ et $q(t)$, le système d'EDO se réécrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\beta pq + \mu_2 q + \mu_3 (1 - p - q) \\ \frac{dq}{dt} = \beta pq - (\mu_2 + \gamma) q \end{cases}$$

Question 6 Le système admet-il un point d'équilibre sans maladie ?

- ☐ non
- ☐ oui

Question 7 Quelles sont les coordonnées de l'équilibre endémique ?

- ☐ $(p^*, q^*) = \left(\frac{\mu_3}{\mu_3+\gamma}, 1 - \frac{\mu_2+\gamma}{\beta}\right)$
- ☐ $(p^*, q^*) = \left(\frac{\mu_2+\gamma}{\beta}, \frac{\mu_3}{\mu_3+\gamma}\left(1 - \frac{\mu_2+\gamma}{\beta}\right)\right)$
- ☐ $(p^*, q^*) = \left(\frac{\beta}{\mu_2+\gamma}, \frac{\mu_3}{\mu_3+\gamma}\left(1 - \frac{\beta}{\mu_2+\gamma}\right)\right)$
- ☐ $(p^*, q^*) = \left(\frac{\mu_2+\gamma}{\beta}, \frac{\mu_3\beta}{(\mu_3+\gamma)(\mu_2+\gamma)}\right)$

Question 8 À quelle condition sur les paramètres l'équilibre endémique existe-t-il biologiquement ? On admettra que $p^* + q^* \leqslant 1$.

- ☐ $\frac{\mu_3}{\mu_3+\gamma} \geqslant 1$
- ☐ $\frac{\mu_2+\gamma}{\beta} \leqslant 1$
- ☐ $\frac{\mu_2+\gamma}{\beta} \geqslant 1$
- ☐ $\frac{\mu_3}{\mu_3+\gamma} \leqslant 1$

Question 9 En déduire la valeur du taux de reproduction intrinsèque R_0.

- ☐ $R_0 = \frac{\mu_3}{\mu_3+\gamma}$
- ☐ $R_0 = \frac{\beta}{\mu_2+\gamma}$
- ☐ $R_0 = \frac{\beta\mu_3}{(\mu_2+\gamma)(\mu_3+\gamma)}$

Question 10 Quelle est la signification de R_0 ?

- ☐ Nombre d'infections secondaires engendrées par un individu infecté dans une population d'individus sains
- ☐ Taux de reproduction des individus infectés
- ☐ Probabilité d'être infecté après contact avec un individu infecté

On donne ci-dessous le code R permettant de simuler la dynamique décrite par le système.

```
library(phaseR)

modele <- function(time,y,parameters){
  dy1 <- -parameters[1]*y[1]*y[2]+parameters[2]*y[2]+parameters[3]*(1-y[1]-y[2])
  dy2 <- parameters[1]*y[1]*y[2]-(parameters[2]+parameters[4])*y[2]
  list(c(dy1,dy2))
}

phasePlaneAnalysis(deriv=modele,
                   xlim=c(0,1), ylim=c(0,1),
                   tend=100,
                   parameters=c(0.12, 0.02, 0.16, 0.04))
```

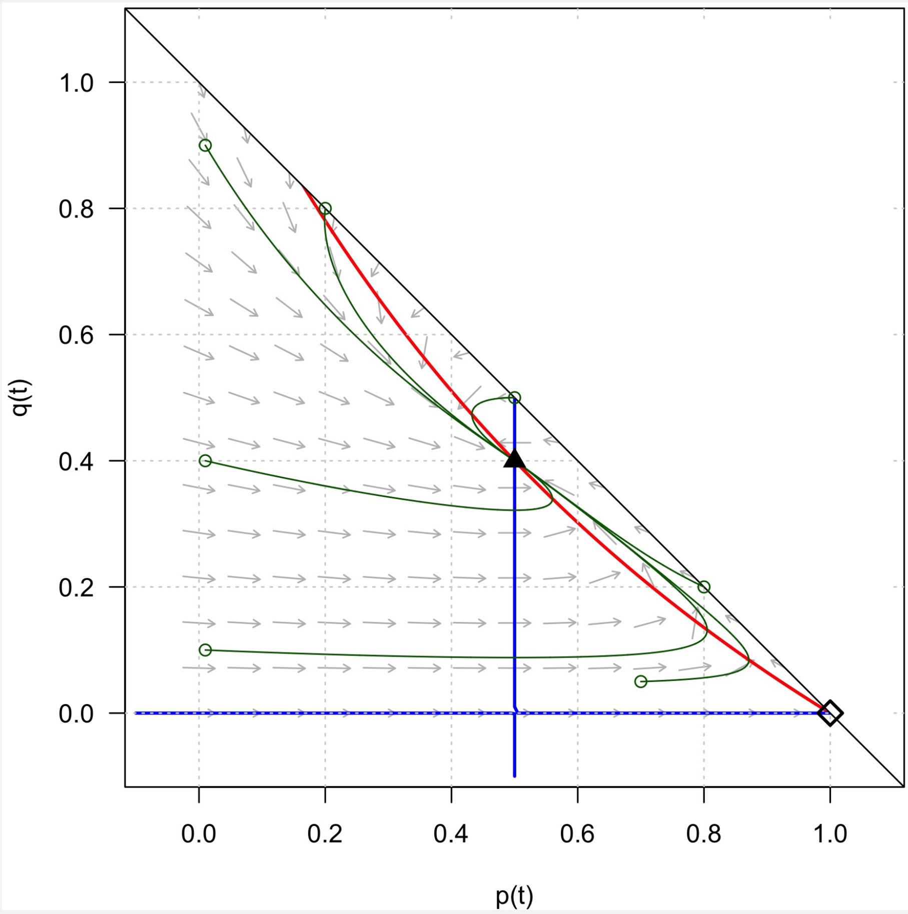
Question 11 Quelle est la valeur du paramètre β ?

- ☐ 0.16
- ☐ 0.02
- ☐ 0.12
- ☐ 0.04

Question 12 Quelle est la valeur du paramètre γ ?

- ☐ 0.12
- ☐ 0.02
- ☐ 0.16
- ☐ 0.04

Le portrait de phase issu du code R ci-dessus est le suivant :



Question 13 De quelle couleur sont les isoclines horizontales ?

- ☐ bleu
- ☐ rouge

Question 14 De quelle couleur sont les isoclines verticales ?

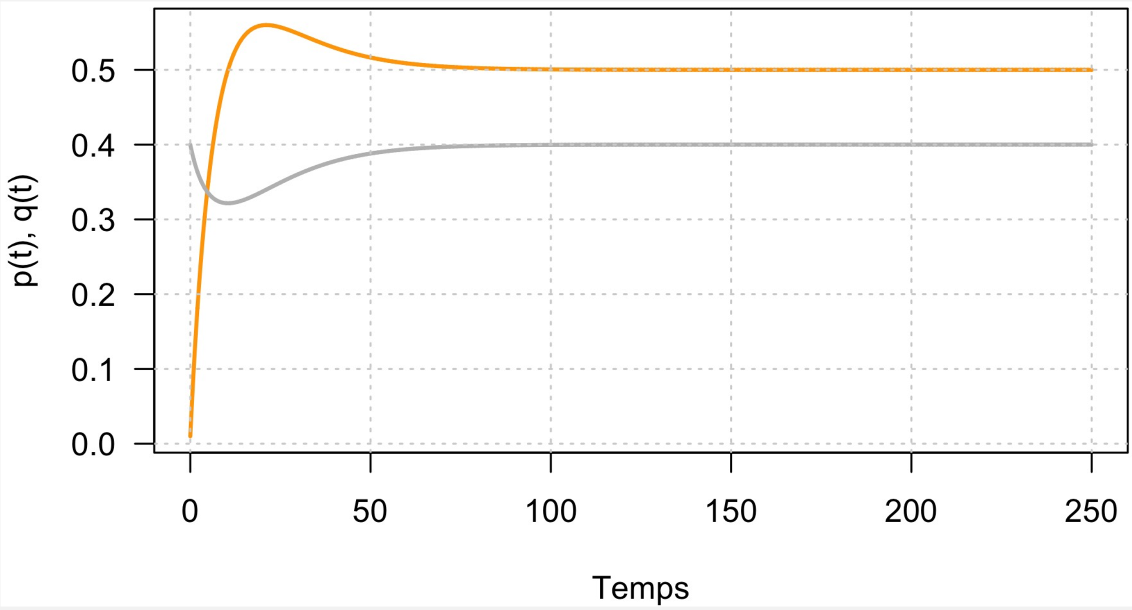
- ☐ bleu
- ☐ rouge

Question 15 Quelles sont les coordonnées de l'équilibre endémique ?

- ☐ $(0.4, 0.5)$
- ☐ $(0.01, 0.4)$
- ☐ $(1, 0)$
- ☐ $(0.5, 0.4)$

Question 16 Quel est le devenir à long terme de l'épidémie si $(p(0), q(0)) = (0.01, 0.4)$?

- ☐ Elle est éradiquée
- ☐ Elle perdure dans la population



Question 17 A quelle condition initiale correspond le graphe ci-dessus ?

☐ $(1, 0)$ ☐ $(0.4, 0.5)$ ☐ $(0.01, 0.4)$ ☐ $(0.5, 0.4)$

Question 18 Cette condition initiale correspond-elle à une trajectoire sur le portrait de phase ?

☐ oui ☐ non

Question 19 De quelle couleur est la courbe correspondant à la dynamique de $p(t)$?

☐ orange ☐ grise