

Master BEE@Lyon - M1 EEQ - Modélisation

4 mars 2021 - Durée conseillée : 30 minutes

NOM :

Prénom :

Numéro étudiant :

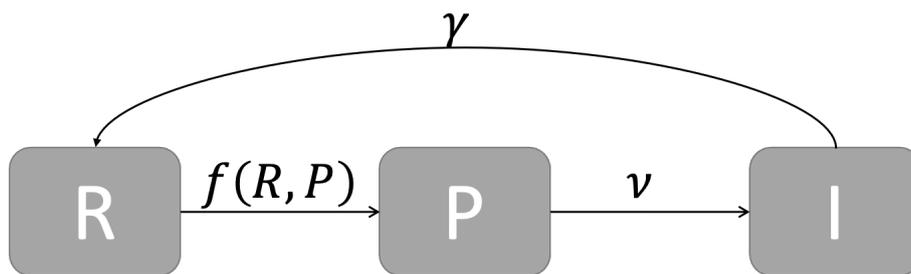
Modélisation d'une épidémie de méningite cérébro-spinale



Les méningite cérébro-spinales sont dues à méningocoques qui peuvent être issus de différents sérogroupe. La prévalence des sérogroupe de méningocoques varie en fonction du temps et du lieu géographique. On s'intéresse ici au groupe A qui sévit plus particulièrement dans les régions tropicales. Ces épidémies récurrentes sont dues à l'existence dans les populations d'une petite proportion de porteurs sains.

On distingue trois catégories principales d'individus : les **Réceptifs** (représentés par la variable $R(t)$), les **Porteurs de germes** (variable $P(t)$) et les **Immuns** (variable $I(t)$). La variable t représente l temps exprimé en jours.

Les populations à risque peuvent être schématisées de la façon suivante :



Le système complet d'équations différentielles ordinaires qui régit la dynamique des trois catégories d'individus est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} = -\beta R(t)P(t) + \gamma I(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = \beta R(t)P(t) - \nu P(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \nu P(t) - \gamma I(t) \end{cases}$$

On supposera que tous les paramètres sont strictement positifs.

1. De quel mode de transmission s'agit-il ?

2. Que représentent les paramètres β et ν , et en quelles unités s'expriment-ils ?
3. En supposant que le nombre total d'individus reste constant et égale à N au cours du temps, ré-écrire le système précédent en dimension 2 pour les variables $R(t)$ et $P(t)$.
4. Préciser la valeur de $\frac{dN}{dt}$.
5. Donner les coordonnées du point d'équilibre endémique, noté (R^*, P^*, I^*) , en fonction des paramètres du modèle.
6. Donner l'expression de R_0 . Que signifie cette grandeur ?

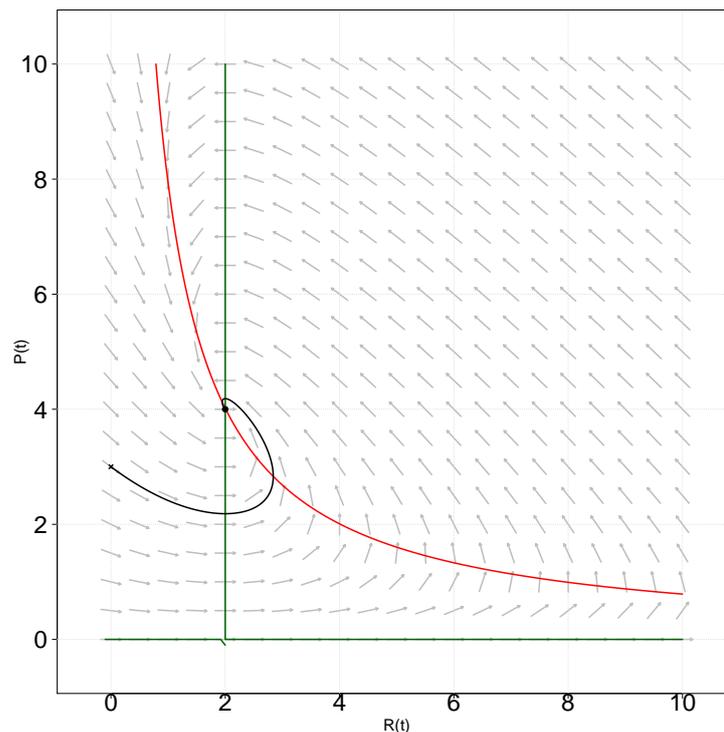
On pose $\beta = 0.3$, $\nu = 0.6$ et $\gamma = 0.01$.

7. Quelle est la durée de la période de contagiosité ?

Soit $N = 247$.

8. Quelle sera la composition de la population lorsque $t \rightarrow +\infty$ pour les trois catégories d'individus ?
9. On donne $R_0 = 123.5$. Qu'en pensez-vous, notamment en comparaison avec la valeur associée à la COVID-19 en mars 2020 ($R_0 \simeq 3$) ?

À l'aide du logiciel R on simule la dynamique décrite par le système d'EDO en dimension 2, pour obtenir la figure suivante :



10. De quelle couleur sont les isoclines verticales ?
11. Pour la trajectoire représentée sur le portrait de phase, dessiner l'allure de la chronique pour les individus réceptifs.