

Biologie Mathématique et Modélisation (L3 - MIV)

Chapitre 2 : Systèmes dynamiques dans \mathbb{R}^2

Sandrine CHARLES et Christelle LOPES (16/05/2008)

scharles@biomserv.univ-lyon1.fr; lopes@biomserv.univ-lyon1.fr

1. Introduction	3
2. Étude des systèmes dynamiques linéaires	3
2.1. Formes de Jordan réelles dans \mathbb{R}^2	4
• Deux valeurs propres réelles distinctes ($\Delta > 0$).....	5
• Deux valeurs propres réelles identiques ($\Delta = 0$)	6
• Deux valeurs propres complexes conjuguées ($\Delta < 0$)	7
2.2. Typologie des solutions des systèmes linéaires planaires	8
• Deux valeurs propres réelles distinctes : λ_1 et λ_2	8
• Une valeur propre double : λ_0	10
• Deux valeurs complexes conjuguées : $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	12
2.3. Classes d'équivalence topologique (<i>à voir si le temps</i>).....	14
2.4. Notion de stabilité structurelle.....	17
2.5. Typologie des solutions des systèmes linéaires dans le plan (tr,det)	18
• Cas $\Delta = 0$	19
• Cas $\Delta > 0$	19
• Cas $\Delta < 0$	19
2.6. Résolution des systèmes linéaires d'EDO.....	20
2.6.1. Les exponentielles de matrices	20
2.6.2. Résolution pratique des systèmes d'EDO linéaires	22
3. Étude des systèmes dynamiques non linéaires	23
3.1. Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre.....	24
3.2. Théorème de linéarisation	26
3.3. Portrait de phase	29

4. Application en dynamique des populations.....	33
4.1. Le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra.....	34
• Recherche des points d'équilibre	35
• Étude de stabilité locale (linéarisation)	35
• Portrait de phase	38
• Allure des chroniques.....	39
4.2. Critique et modifications du modèle de Lotka-Volterra.....	40
• Recherche des points d'équilibre	41
• Étude de stabilité locale (linéarisation)	41
• Portraits de phase	42
• Allure des chroniques.....	43

1. Introduction

On considère le système d'équations différentielles ordinaires autonomes suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (\text{S})$$

où f et g sont des fonctions des variables x et y . On parle encore de système différentiel, ou de système dynamique.

En utilisant la notation matricielle, on peut aussi écrire :

$$\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$$

$\mathbf{X} = (x, y)$ est un vecteur de \mathbb{R}^2 et $\Phi(\mathbf{X}) = (f(x, y), g(x, y))$ une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

Une solution de ce système consiste en un couple de fonctions $(x(t), y(t))$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, qui satisfait le système (S).

Définitions :

Par analogie avec les EDO dans \mathbb{R} , on appelle **point d'équilibre** de (S) une solution constante $\mathbf{c} = (x^*, y^*)$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x^*, y^*) = 0 \\ \dot{y} = g(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

On appelle **plan de phase** le plan (x, y)

La représentation des trajectoires dans le plan de phase s'appelle le **portrait de phase**.

2. Étude des systèmes dynamiques linéaires

On considère ici le cas où f et g sont des fonctions linéaires de x et de y . Le système (S) se réécrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2.1. Formes de Jordan réelles dans \mathbb{R}^2

Proposition :

Soit \mathbf{A} une matrice réelle carrée de dimension 2. Alors il existe une matrice réelle inversible \mathbf{P} telle que $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ est de l'une des formes suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \lambda_1 \neq \lambda_2 & \text{(b)} \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} & \text{(d)} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \beta > 0 \end{array}$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta$ sont des réels, en relation directe avec les valeurs propres de la matrices \mathbf{A} .

On dit que \mathbf{J} est **semblable** à \mathbf{A} .

Remarque : Dans le cas (a) on pourra également trouver $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \lambda_1 \neq \lambda_2$ et dans le cas

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \beta > 0.$$

Les matrices \mathbf{J} sont les **formes de Jordan** associées à \mathbf{A} . Les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} (et de la matrice \mathbf{J}) sont les valeurs λ solutions de l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= 0 & \mathbf{I} : \text{matrice identité} \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) &= 0 & \text{équation caractéristique} \end{aligned}$$

où $\text{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}$ est la trace de \mathbf{A} , et $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ son déterminant.

Démonstration (à voir si le temps) :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} &= 0 \\ \Leftrightarrow a_{11}a_{22} - \lambda(a_{11} + a_{22}) + \lambda^2 - a_{12}a_{21} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$$

Le discriminant de l'équation caractéristique est $\Delta = (\text{tr}(\mathbf{A}))^2 - 4\det(\mathbf{A})$.

C'est la nature des valeurs propres qui détermine la forme de Jordan associée à \mathbf{A} :

- Réelles distinctes ($\Delta > 0$) ;
- Réelles égales ($\Delta = 0$) ; *une racine double*
- Complexes conjuguées ($\Delta < 0$).

Si λ_1 et λ_2 sont racines de l'équation caractéristique, alors :

$$\text{tr}\mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ et } \det\mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2$$

• *Deux valeurs propres réelles distinctes ($\Delta > 0$)*

Les valeurs propres sont de la forme :

$$\lambda_1 = \frac{\text{tr}(\mathbf{A}) + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\text{tr}(\mathbf{A}) - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Si on appelle $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ les vecteurs propres associés à λ_1, λ_2 :

Mettre des flèches sur les vecteurs à l'oral $\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2$

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i \quad i = 1, 2$$

Alors $\mathbf{P} = (\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2)$, et \mathbf{J} est de la forme (a) : $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Démonstration :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{P} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_{11} + a_{12}u_{12} & a_{11}u_{21} + a_{12}u_{22} \\ a_{21}u_{11} + a_{22}u_{12} & a_{21}u_{21} + a_{22}u_{22} \end{pmatrix} \\ &= \left[\mathbf{A} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} \mid \mathbf{A} \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} \right] = [\mathbf{A}\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{A}\mathbf{u}_2] = [\lambda_1\mathbf{u}_1 \mid \lambda_2\mathbf{u}_2] = [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{P}\mathbf{J} \end{aligned}$$

Exemple :

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. $\text{tr}(\mathbf{A}) = 1$ et $\det(\mathbf{A}) = -20$. L'équation caractéristique est donc

$\lambda^2 - \lambda - 20 = 0$ avec $\Delta = 81 = 9^2$. Les valeurs propres de \mathbf{A} sont alors : $\lambda_1 = -4$ et $\lambda_2 = 5$.

Le calcul des vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 conduit à $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a

alors : $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. On vérifie enfin que $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

• *Deux valeurs propres réelles identiques ($\Delta = 0$)*

On distingue deux cas.

(i) \mathbf{A} est déjà diagonale :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 \mathbf{I}$$

Le sous-espace propre associé à λ_0 est de dimension 2.

\mathbf{A} est donc directement sous la forme de Jordan (b). En effet, quelle que soit la matrice de passage \mathbf{P} , on a $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{A}$ (\mathbf{A} est semblable à elle-même) : $\mathbf{J} = \mathbf{A}$.

Car $\mathbf{A} = \lambda_0 \mathbf{I}$ et \mathbf{I} commute avec n'importe quelle matrice :

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\lambda_0\mathbf{I}\mathbf{P} = \lambda_0\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \lambda_0\mathbf{I} = \mathbf{A}$$

(ii) \mathbf{A} n'est pas diagonale :

Dans ce cas, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 = \frac{\text{tr}(\mathbf{A})}{2}$ et il n'y a pas deux vecteurs propres linéairement indépendants. Soit \mathbf{u}_0 un vecteur propre de \mathbf{A} . En choisissant un vecteur \mathbf{m}_2 linéairement indépendant de \mathbf{u}_0 , i.e. tel que $\det(\mathbf{u}_0, \mathbf{m}_2) \neq 0$, alors $\mathbf{P} = (\mathbf{u}_0 \mid \mathbf{m}_2)$ est une matrice inversible qui permet de triangulariser \mathbf{A} :

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & c \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

où c est un réel non nul et en général différent de 1.

Pour retrouver la forme de Jordan (c), on définit une nouvelle matrice de passage :

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \text{ avec } c^{-1} = 1/c$$

$$\text{Alors } \mathbf{J} = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Exemple :

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. $\text{tr}(\mathbf{A}) = -6$ et $\det(\mathbf{A}) = 9$. L'équation caractéristique est donc

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ avec $\Delta = 36 - 9 \times 4 = 0$. Les valeurs propres de \mathbf{A} sont alors : $\lambda_1 = \lambda_2 = -3 = \lambda_0$.

Un vecteur propre associé à λ_0 est par exemple $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En choisissant le vecteur

$\mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ indépendant de \mathbf{u}_0 , la matrice de passage s'écrit :

$$\mathbf{P} = (\mathbf{u}_0 \mid \mathbf{m}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le calcul de $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ conduit alors à la matrice $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ qui n'est pas sous la forme de

Jordan souhaitée, c'est-à-dire avec $c = -1$. Il faut donc choisir une autre matrice de

changement de base $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie alors que $\mathbf{J} = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

• *Deux valeurs propres complexes conjuguées* ($\Delta < 0$)

On peut écrire $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ avec $\alpha = \frac{\text{tr}(\mathbf{A})}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$.

Les vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 sont également complexes conjugués et s'écrivent $\mathbf{u}_{1,2} = \mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$ où \mathbf{a} et \mathbf{b} sont des vecteurs réels de \mathbb{R}^2 . Si on prend la matrice de passage $\mathbf{P} = (\mathbf{b} \mid \mathbf{a})$, alors \mathbf{A} se met sous la forme de Jordan (d) :

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Exemple :

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. $\text{tr}(\mathbf{A}) = 6$ et $\det(\mathbf{A}) = 10$.

L'équation caractéristique est donc $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ avec $\Delta = -4$. Les valeurs propres de \mathbf{A} sont alors : $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$.

Le calcul des vecteurs propres conjugués associés à λ_1 et λ_2 conduit à $\mathbf{u}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

d'où la matrice de passage

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & | & 1 \\ 1 & | & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie enfin que $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Compte tenu de ce qui précède, tout système différentiel du type $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, peut être transformé en un système différentiel **canonique** équivalent, $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{J}\mathbf{Y}$, où $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ est la forme de Jordan associée à \mathbf{A} et $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y}$.

2.2. Typologie des solutions des systèmes linéaires planaires

On se limite ici au cas où \mathbf{A} est inversible ($\det(\mathbf{A}) \neq 0$, pas de valeurs propres nulles puisque $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2$). L'unique solution de $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ est alors $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ et le système admet un seul point d'équilibre à l'origine du plan de phase.

- *Deux valeurs propres réelles distinctes* : λ_1 et λ_2

Dans ce cas, \mathbf{J} est sous la forme de Jordan (a). Le système $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ se transforme alors en son système canonique $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{J}\mathbf{Y}$ avec $\mathbf{Y} = (w, z)$:

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \dot{w} = \lambda_1 w \\ \dot{z} = \lambda_2 z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ z = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \text{ avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

→ Si λ_1 et λ_2 sont strictement positives, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = +\infty$, et le portrait de phase dans le plan (w, z) est le suivant :

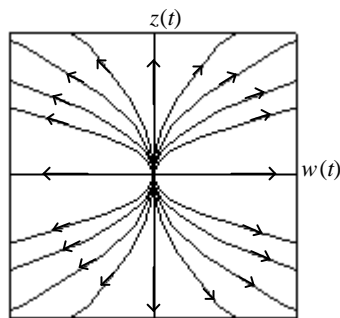


Figure 1 : Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, lorsque \mathbf{A} possède deux valeurs propres réelles distinctes strictement positives.

Le point d'équilibre à l'origine du portrait de phase est appelé un noeud ; Toutes les trajectoires partant du point d'équilibre s'en éloignent, on a un **noeud instable (NI)**.

RQ : pour obtenir la solution générale du système $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, on utilise la relation $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y}$.

→ Si λ_1 et λ_2 sont strictement négatives, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$, et le portrait de phase dans le plan (w, z) est le suivant :

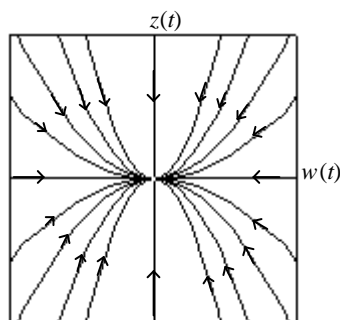


Figure 2 : Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, lorsque \mathbf{A} possède deux valeurs propres réelles distinctes strictement négatives.

Quelle que soit la condition initiale, les trajectoires convergent vers le point d'équilibre, on a un **nœud stable (NS)**.

→ Si λ_1 et λ_2 sont de signe opposé, par exemple $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$, et le portrait de phase dans le plan (w, z) est le suivant :

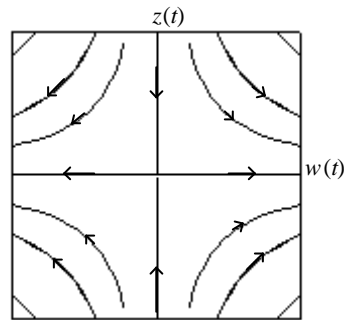


Figure 3 : Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, lorsque \mathbf{A} possède deux valeurs propres réelles distinctes de signe opposé : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$; ou $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$.

L'origine est ici un **point selle (PS)** ; les axes (Ow) et (Oz) sont appelés les **séparatrices** du point selle, car ces droites séparent le plan (w, z) en quatre « flots » de trajectoires différentes. CE sont les seules trajectoires qui passent par le point d'équilibre.

• **Une valeur propre double** : λ_0

(i) Dans le cas où \mathbf{A} est diagonale, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \neq 0$, le système canonique s'écrit :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \dot{w} = \lambda_0 w \\ \dot{z} = \lambda_0 z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w(t) = C_1 e^{\lambda_0 t} \\ z(t) = C_2 e^{\lambda_0 t} \end{cases}$$

→ Si $\lambda_0 > 0$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = +\infty$ et le portrait de phase dans le plan (w, z) est le suivant, et on a une **étoile instable** :

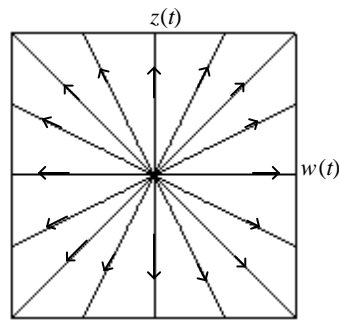


Figure 4 : Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, lorsque \mathbf{A} diagonale possède une valeur propre double strictement positive.

RQ : la courbure dans les figures 1 et 2 est liée au fait que les valeurs sont différentes

→ Si $\lambda_0 < 0$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ et le portrait de phase dans le plan (w, z) est le suivant, et on a une **étoile stable** :

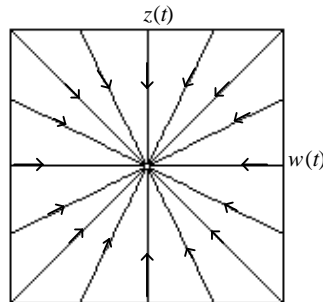


Figure 5 : Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, lorsque \mathbf{A} diagonale possède une valeur propre double strictement négative.

(ii) Si \mathbf{A} n'est pas diagonale, le système canonique devient :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \dot{w} = \lambda_0 w + z \\ \dot{z} = \lambda_0 z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w(t) = (C_1 + tC_2)e^{\lambda_0 t} \\ z(t) = C_2 e^{\lambda_0 t} \end{cases}$$

→ Si $\lambda_0 > 0$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = +\infty$ et le portrait de phase dans (w, z) est :

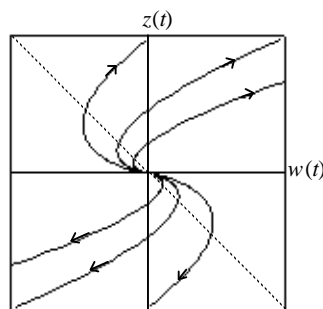


Figure 6 : Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, lorsque \mathbf{A} **non diagonale** possède une valeur propre double strictement positive. La droite en pointillé a pour équation $\dot{w} = 0$.

L'origine est dans ce cas un **noeud dégénéré instable**. La droite à partir de laquelle les trajectoires changent de direction est la droite le long de laquelle les vecteurs vitesse sont verticaux, i.e. que cette droite correspond à l'isocline nulle $\dot{w} = 0$, soit $z = -\lambda_0 w$ ($\lambda_0 > 0$).

→ Si $\lambda_0 < 0$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ et le portrait de phase dans (w, z) est le suivant, et l'origine est un **noeud dégénéré asymptotiquement stable** :

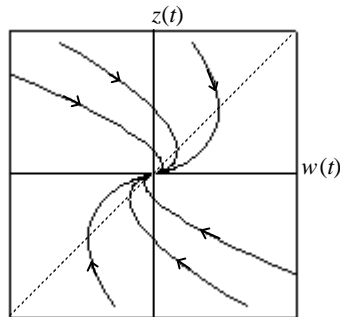


Figure 7 : Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, lorsque \mathbf{A} non diagonal possède une valeur propre double strictement négative. La droite en pointillé a pour équation $\dot{w} = 0$.

• *Deux valeurs complexes conjuguées* : $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

D'après l'expression de la forme de Jordan dans le cas de valeurs propres complexes conjuguées, le système canonique est :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \dot{w} = \alpha w - \beta z \\ \dot{z} = \beta w + \alpha z \end{cases}$$

Ce type de système se résout en utilisant les **coordonnées polaires** :

$$\begin{cases} w = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = w^2 + z^2 \\ \tan \theta = z/w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r\dot{r} = w\dot{w} + z\dot{z} \\ \dot{\theta} = \cos^2 \theta \left(-\frac{z}{w^2} \dot{w} + \frac{1}{w} \dot{z} \right) \end{cases}$$

Il vient finalement :

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\theta} = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \beta t + \theta_0 \end{cases}$$

Dans le plan (w, z) , les solutions correspondent donc à des spirales (sauf pour $\alpha = 0$), qui s'éloignent ou se rapprochent de $(0,0)$ en fonction du signe de α , et dont le sens de rotation est donné par le signe de β .

Les portraits de phase possibles sont les suivants :

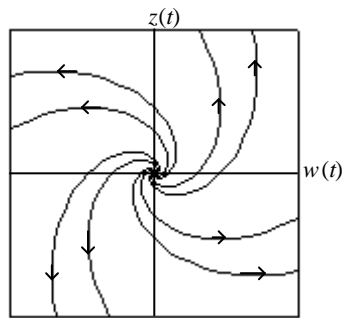


Figure 8 : Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, lorsque \mathbf{A} possède des valeurs propres complexes conjuguées. $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

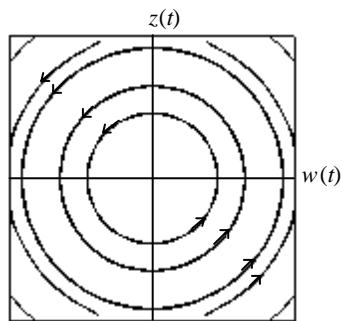


Figure 9 : Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, lorsque \mathbf{A} possède des valeurs propres complexes conjuguées. $\alpha = 0$ et $\beta > 0$.

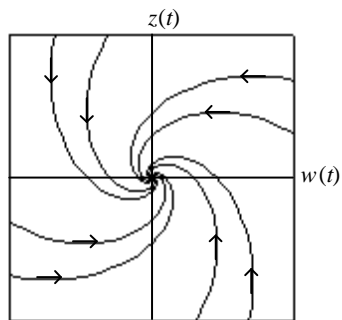


Figure 10 : (a) Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, lorsque \mathbf{A} possède des valeurs propres complexes conjuguées; (b) Chroniques associées. $\alpha < 0$ et $\beta > 0$.

Dans le cas de la Figure 8, l'origine est un **foyer instable (FI)** ou encore spirale répulsive ;

Dans le cas de la Figure 9, l'origine est un **centre** ;

Dans le cas de la Figure 10, l'origine est un **foyer stable (FS)** ou encore spirale attractante.

Dans le cas des centres, les trajectoires ne tendent jamais vers le point d'équilibre, mais restent dans son voisinage : on parle de **stabilité neutre**. Dans tous les autres cas de stabilité, il s'agit de **stabilité asymptotique**.

2.3. Classes d'équivalence topologique (à voir si le temps)

Le but de ce paragraphe est de classer les portraits de phase des systèmes planaires linéaires en familles à l'intérieur desquelles les dynamiques sont qualitativement équivalentes.

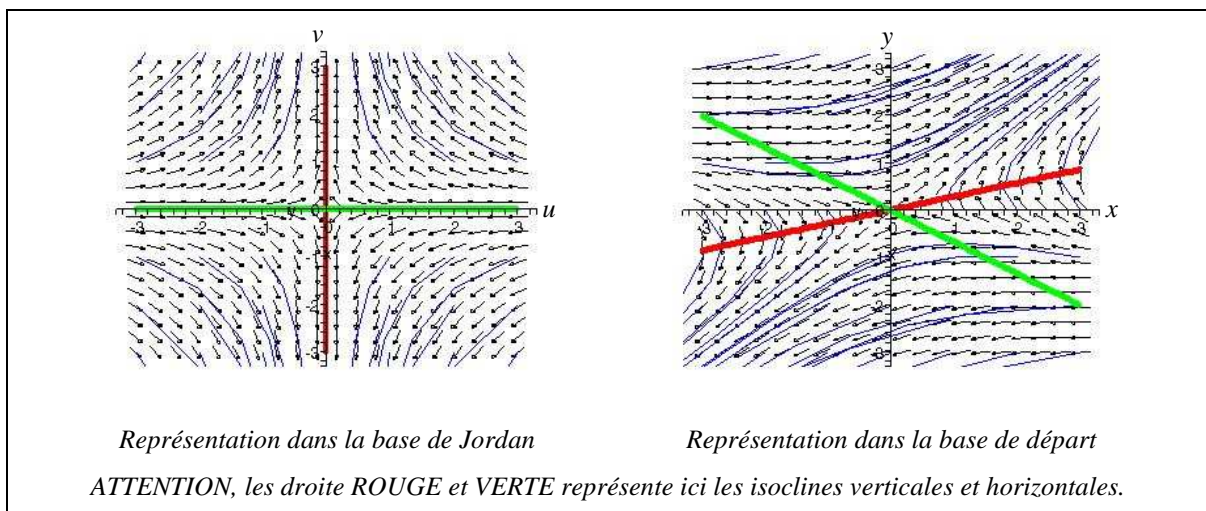
Définition 1 :

Deux systèmes planaires linéaires $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ et $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{B}\mathbf{X}$ sont dits **topologiquement** (on dit aussi qualitativement) **équivalents** s'il existe une fonction h de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 continue et possédant une fonction réciproque continue (*i.e.*, h homéomorphisme) qui transforme de manière bijective les trajectoires du système $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ en celles du système $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{B}\mathbf{X}$, tout en préservant le sens de variation du temps.

Autrement dit, si les deux systèmes $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ et $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{B}\mathbf{X}$ sont topologiquement équivalents, à une trajectoire du système $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ correspond une trajectoire du système $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{B}\mathbf{X}$.

Par exemple, tous les points selle sont topologiquement équivalents.

Exemple : Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.



Définition 2 :

Le point d'équilibre du système $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ est dit **hyperbolique** si les valeurs propres de \mathbf{A} ont toutes une partie réelle non nulle. Dans le cas contraire, le point d'équilibre est dit **non hyperbolique**.

Théorème 1 :

Supposons que les valeurs propres de \mathbf{A} et \mathbf{B} ont une partie réelle non nulle. Alors, les deux systèmes linéaires $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ et $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{B}\mathbf{X}$ sont topologiquement équivalents si et seulement si \mathbf{A} et \mathbf{B} ont le même nombre de valeurs propres avec des parties réelles de même signe.

En conséquence, on distingue trois classes d'équivalence topologique pour les systèmes linéaires planaires **hyperboliques** dont les représentants canoniques sont :

(i) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: deux valeurs propres négatives \rightarrow Noeuds, foyers et étoiles stables

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: deux valeurs propres positives \rightarrow Noeuds, foyers et étoiles instables

(iii) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: une valeur propre réelle positive et une négative \rightarrow Points selles

Théorème 2 :

Si la matrice \mathbf{A} possède des valeurs propres à partie réelle nulle, alors le système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ est topologiquement équivalent à l'un des cinq systèmes linéaires suivants dont les représentants sont par exemple:

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: la matrice nulle \rightarrow Infinité de points d'équilibre

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: une valeur propre nulle et l'autre réelle positive \rightarrow Crêtes

(iii) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: une valeur propre nulle et l'autre réelle négative \rightarrow Vallées

(iv) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: deux valeurs propres nulles avec un seul vecteur propre \rightarrow Flux

(v) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: deux valeurs propres imaginaires pures \rightarrow Centres

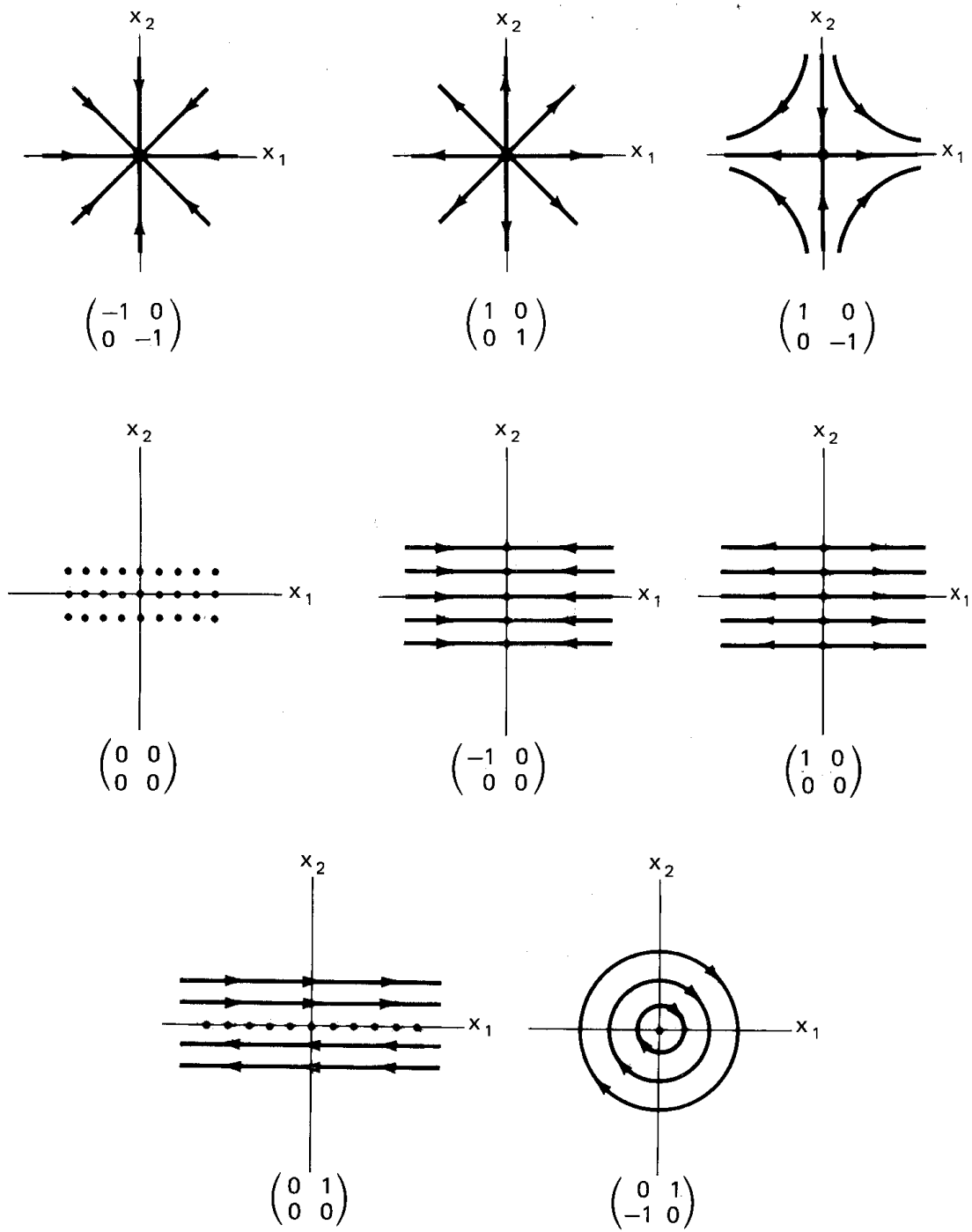


Figure 11 : Portraits de phase des représentants des différentes classes d'équivalence topologiques des systèmes linéaires planaires.

2.4. Notion de stabilité structurelle

Définition :

Soit le système **linéaire** $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ (1). Le système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{B}\mathbf{X}$ (2) est dit **voisin** du précédent si on peut écrire :

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon_i \ll 1$$

Théorème 1 :

Si le point d'équilibre $(0,0)$ est hyperbolique pour (1), alors les systèmes linéaires (1) et (2) restent topologiquement équivalents, à condition que les ε_i soient suffisamment petits. Dans ce cas, le point d'équilibre est aussi hyperbolique pour (2).

Théorème 2 :

Si le point d'équilibre $(0,0)$ n'est pas hyperbolique pour (1), alors les systèmes linéaires (1) et (2) ne sont pas topologiquement équivalents et le point d'équilibre est hyperbolique pour (2).

L'hyperbolicité se conserve pour des petites perturbations. On dit que les points d'équilibre hyperboliques sont **structurellement stables**, à l'inverse des points d'équilibre non hyperboliques ; par exemple, les centres ne sont pas **structurellement stables**.

Remarque : il ne faut pas confondre stabilité structurelle d'un système dynamique et stabilité neutre d'un point d'équilibre.

Exemple :

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ correspondant à la classe d'équivalence topologique des centres. Dans ce cas, le point d'équilibre $(0,0)$ n'est pas hyperbolique.

$$\text{Soit } \mathbf{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Centres}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}}_{\varepsilon \neq 0} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}}_{\text{Foyer}}.$$

Quel que soit ε , aussi petit soit-il, le point d'équilibre $(0,0)$ associé à la matrice \mathbf{B} est hyperbolique et correspond à un foyer ($\lambda_{1,2} = \varepsilon \pm i$), stable si $\varepsilon < 0$, instable si $\varepsilon > 0$.

2.5. Typologie des solutions des systèmes linéaires dans le plan (tr, det)

La typologie des solutions des systèmes linéaires planaires que nous avons établie à partir de la nature des valeurs propres de la matrice du système peut également se résumer dans un plan (tr, det).

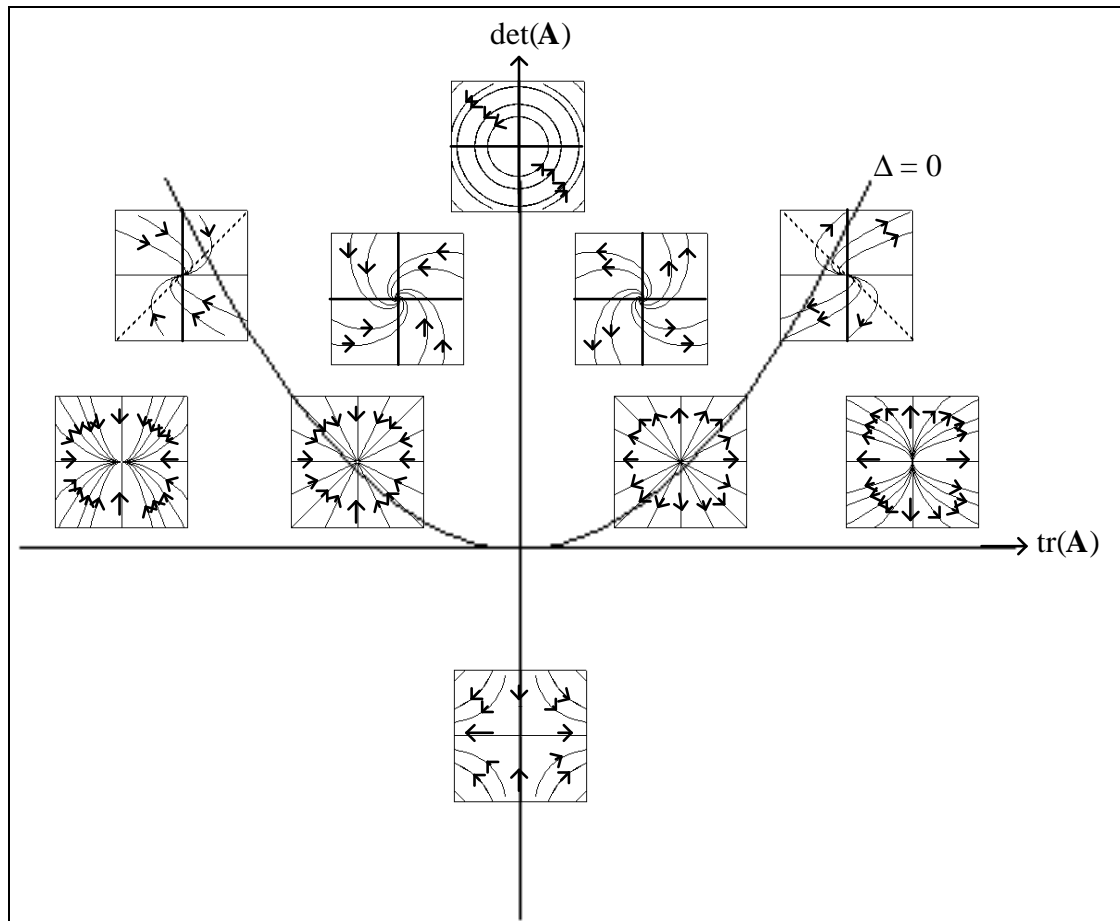


Figure 12 : Résumé des différents portraits de phase possibles du système $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, en fonction du signe de la trace et du déterminant de la matrice \mathbf{A} .

Les valeurs propres de \mathbf{A} sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \text{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

La nature des valeurs propres dépend du signe du discriminant $\Delta = (\text{tr}(\mathbf{A}))^2 - 4\det(\mathbf{A})$.

Dans le plan (tr, \det) , l'équation $\Delta = 0$ est celle d'une parabole passant par l'origine :

$$\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{4} (\text{tr}(\mathbf{A}))^2$$

Cette parabole divise le plan en deux grandes régions : au-dessus de la parabole ($\Delta < 0$), on trouve les portraits de phase des foyers et des centres ; en-dessous ($\Delta > 0$), on trouve les noeuds et les points selle.

• **Cas** $\Delta = 0$

On a alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, c'est-à-dire $\det(\mathbf{A}) = \lambda_0^2 > 0$ et $\text{tr}(\mathbf{A}) = 2\lambda_0$. Par conséquent, si la trace est positive ($\lambda_0 > 0$), on a une étoile ou un noeud dégénéré instable ; si la trace est négative ($\lambda_0 < 0$), on a une étoile ou un noeud dégénéré stable.

• **Cas** $\Delta > 0$

On a alors deux valeurs propres réelles distinctes. On est dans la région sous la parabole qui peut encore est partagée en trois zones :

- $\det(\mathbf{A}) < 0$: λ_1 et λ_2 sont de signe opposé, l'origine est un point selle ;
- $\det(\mathbf{A}) > 0$ et $\text{tr}(\mathbf{A}) > 0$: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, l'origine est un noeud instable ;
- $\det(\mathbf{A}) > 0$ et $\text{tr}(\mathbf{A}) < 0$: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, l'origine est un noeud stable.

• **Cas** $\Delta < 0$

On a alors deux valeurs propres complexes conjuguées, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, c'est-à-dire $\det(\mathbf{A}) = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ et $\text{tr}(\mathbf{A}) = 2\alpha$. On est dans la région au-dessus de la parabole, qui se partage là encore en trois zones distinctes :

- $\text{tr}(\mathbf{A}) < 0$: La partie réelle des valeurs propres est négative, l'origine est un foyer stable ;
- $\text{tr}(\mathbf{A}) > 0$: La partie réelle des valeurs propres est positive, l'origine est un foyer instable ;
- $\text{tr}(\mathbf{A}) = 0$: La partie réelle des valeurs propres est nulle, l'origine est un centre.

⇒ En résumé, la zone où le point d'équilibre est asymptotiquement stable est celle correspondant à :

$$\begin{cases} \det(\mathbf{A}) > 0 \\ \text{tr}(\mathbf{A}) < 0 \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $\begin{cases} \det(\mathbf{A}) > 0 \\ \text{tr}(\mathbf{A}) = 0 \end{cases}$, l'origine est un centre.

Remarque :

Nous n'avons pas traité le cas où la matrice \mathbf{A} du système $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ n'est pas inversible, *i.e.*, $\det(\mathbf{A}) = 0$. Dans ce cas particulier, il faut regarder directement le portrait de phase pour reconnaître la nature de l'origine.

2.6. Résolution des systèmes linéaires d'EDO

2.6.1. Les exponentielles de matrices

Définition :

Pour toute matrice $\mathbf{A}(n, n)$, l'exponentielle de matrice associée, notée $e^{\mathbf{A}}$, est définie par :

$$e^{\mathbf{A}} = \exp(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$$

avec $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$ la matrice identité (n, n) .

Quelques propriétés des exponentielles de matrices :

- (i) Si \mathbf{A} et \mathbf{B} commutent ($\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$), alors $e^{\mathbf{A+B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$.
- (ii) Si $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$, alors, comme \mathbf{A} et $-\mathbf{A}$ commutent, il vient $e^{\mathbf{A+B}} = e^{\mathbf{A-A}} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$.
Ainsi, $e^{\mathbf{A}} e^{-\mathbf{A}} = \mathbf{I}$ d'où $e^{-\mathbf{A}} = (e^{\mathbf{A}})^{-1}$
- (iii) Si \mathbf{B} est semblable à \mathbf{A} ($\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$), alors $e^{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1} e^{\mathbf{A}} \mathbf{P}$
- (iv) Si $\mathbf{B} = t\mathbf{A}$, alors $\frac{d}{dt}(e^{t\mathbf{A}}) = \mathbf{A} e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{A}} \mathbf{A}$

Démonstration du (iv) :

$$\frac{d}{dt}(e^{t\mathbf{A}}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)\mathbf{A}} - e^{t\mathbf{A}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(h+t)\mathbf{A}} - e^{t\mathbf{A}}}{h}$$

$t\mathbf{A}$ et $h\mathbf{A}$ commutent donc $e^{(t+h)\mathbf{A}} = e^{h\mathbf{A}} e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{A}} e^{h\mathbf{A}} = e^{(h+t)\mathbf{A}}$

$$\text{Donc } \frac{d}{dt}(e^{t\mathbf{A}}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{h\mathbf{A}} - \mathbf{I}) e^{t\mathbf{A}}}{h}.$$

$$\text{Or } e^{h\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(h\mathbf{A})^k}{k!} = \mathbf{I} + h\mathbf{A} + \frac{(h\mathbf{A})^2}{2!} + \dots$$

$$\text{D'où } \frac{e^{h\mathbf{A}} - \mathbf{I}}{h} = \mathbf{A} + \frac{h\mathbf{A}^2}{2!} + \dots \text{ d'où finalement } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{h\mathbf{A}} - \mathbf{I}) e^{t\mathbf{A}}}{h} = \mathbf{A} \quad \square$$

Calcul dans le cas des matrices de Jordan :

$$(i) \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix} = e^{\lambda_0 t} \mathbf{I}_2$$

$$(iii) \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & t e^{\lambda_0 t} \\ 0 & e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix} = e^{\lambda_0 t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(iv) \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{J}t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

On pourrait faire les démonstrations mais on n'a pas vraiment le temps... !

2.6.2. Résolution pratique des systèmes d'EDO linéaires

Nous allons maintenant rechercher les solutions explicites du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ avec $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ pour une condition initiale donnée

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

On peut démontrer que la forme générale de cette solution est :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{K} \text{ avec } e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1}$$

où \mathbf{P} est la matrice de passage permettant de transformer \mathbf{A} en sa forme de Jordan \mathbf{J} associée.

Démonstration :

On a vu plus haut que $\frac{d}{dt}(e^{t\mathbf{A}}) = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}$. Si $\mathbf{X} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{K}$, alors :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \frac{d}{dt}(e^{t\mathbf{A}}\mathbf{K}) = \frac{d}{dt}(e^{t\mathbf{A}})\mathbf{K} = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

Exemple :

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. $\det(\mathbf{A}) = 10$, $\text{tr}(\mathbf{A}) = 6$ et $\Delta = -4$.

Les valeurs propres sont donc $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$. En prenant $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, avec $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on

obtient :

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $e^{\mathbf{J}t} = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

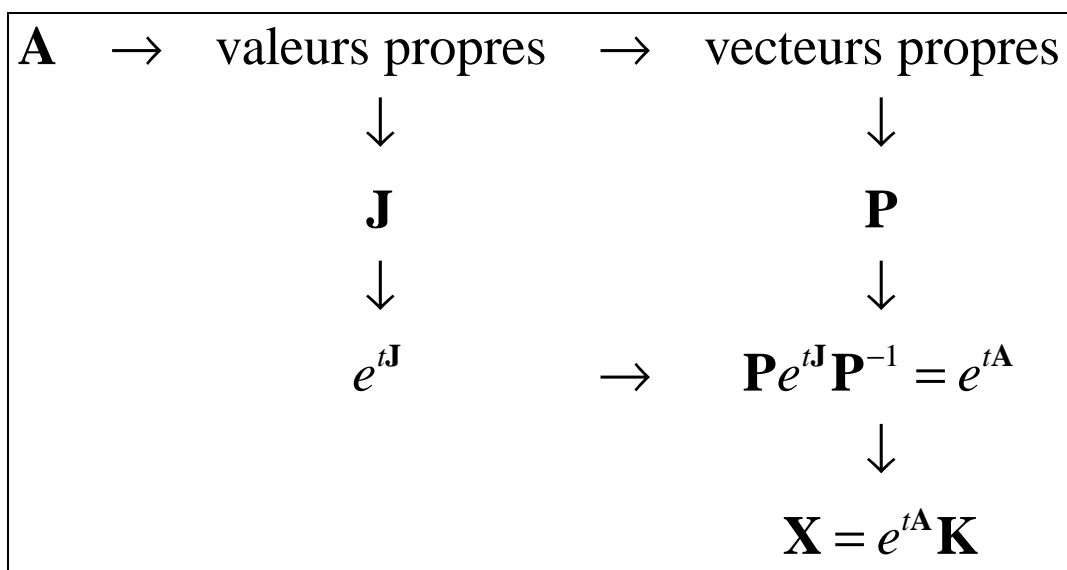
On a également :

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{3t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t & \cos t \\ -\sin t + \cos t & \sin t \end{pmatrix} \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solution est donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} x_0 (\cos t - \sin t) + y_0 \sin t \\ -2x_0 \sin t + y_0 (\cos t + \sin t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En résumé :



3. Étude des systèmes dynamiques non linéaires

Dans ce chapitre, on considère des systèmes d'EDO couplées non linéaires :

$$\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X}), \quad X \in S \subseteq \mathbb{R}^2$$

où Φ est une fonction non linéaire continûment différentiable de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

Par rapport à ce que nous avons vu pour les systèmes linéaires, il va falloir raisonner de manière locale au voisinage des points d'équilibre (méthode de linéarisation), et nous verrons que le portrait de phase **global** n'est pas toujours une réplique exacte du portrait de phase **local** au voisinage des points d'équilibre.

Définition 1 :

Un **voisinage** V d'un point $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^2$ est une partie de \mathbb{R}^2 contenant un disque défini par $\{\mathbf{X} / |\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| < r\}$ pour $r > 0$.

Définition 2 :

Le **portrait de phase local** de \mathbf{X}_0 est la réduction du portrait de phase global au voisinage de \mathbf{X}_0 .

3.1. Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre

Considérons un système dynamique général écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

et admettant un point d'équilibre (x^*, y^*) solution de :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x^*, y^*) = 0 \\ \dot{y} = g(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

On introduit, comme dans \mathbb{R} , les **coordonnées locales** (ou **variables locales**) :

$$\begin{cases} u(t) = x(t) - x^* \\ v(t) = y(t) - y^* \end{cases}$$

On se place dans un voisinage de (x^*, y^*) et on procède à un développement en série de Taylor au premier ordre des fonctions f et g :

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{x} = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) \\ \dot{v} = \dot{y} = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) \end{cases}$$

Chacune des fonctions f et g est cette fois approchée par l'équation d'un plan.

Or $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$, d'où :

$$\begin{cases} \dot{u} = a_{11}u + a_{12}v \\ \dot{v} = a_{21}u + a_{22}v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^* \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{A}^* = [a_{ij}]$ est la **matrice Jacobienne** calculée au point d'équilibre avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} & \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} & \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} \end{pmatrix}$$

Le système $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}^* \mathbf{U}$ est un système linéaire qui approxime le système de départ au voisinage du point d'équilibre (x^*, y^*) . Ainsi, si un système possède plusieurs points d'équilibre, il y a aura autant de systèmes linéaires que de points d'équilibre.

Exemple 1 :

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = \cos x \end{cases} \quad (S)$$

Ce système admet une infinité de points d'équilibre sur la droite $y = x$:

$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. La matrice Jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix}$$

- Si k est pair, $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = -1 < 0 \Rightarrow (0,0)$ Point Selle pour le système linéaire qui approche le système (S) au voisinage des points d'équilibre pour k pair :

$$\begin{cases} \dot{u} = u - v \\ \dot{v} = -u \end{cases}$$

- Si k est impair $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{tr} = 1 > 0 \\ \det = 1 > 0 \\ \text{disc} = -3 < 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ Foyer Instable pour le système linéaire qui approche le système (S) au voisinage des points d'équilibre pour k impair.

On peut s'attendre alors à ce que le portrait de phase local lorsque k est pair soit celui d'un point selle, lorsque k est impair celui d'un foyer instable.

3.2. Théorème de linéarisation

Théorème :

Soit le système non-linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ admettant un point d'équilibre (x^*, y^*) et tel que $\det \mathbf{A}^* \neq 0$, où \mathbf{A}^* est la matrice Jacobienne associée au système au point (x^*, y^*) . Alors, dans un voisinage du point d'équilibre, les portraits de phase du système $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ et de sa forme linéarisée $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}\mathbf{U}$ sont qualitativement équivalents, sous réserve que le système linéarisé ne corresponde pas à des centres.

Exemple 2 :

Considérons les deux systèmes dynamiques suivants :

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad \text{et} \quad (2) \begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Les deux systèmes admettent l'origine comme point d'équilibre. Les matrices Jacobiennes s'écrivent :

$$\mathbf{A}_{(1)} = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & -1 + 2xy \\ 1 + 2xy & x^2 + 3y^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{(2)} = \begin{pmatrix} -3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & -x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

Le calcul à l'origine donne $\mathbf{A}_{(1)} = \mathbf{A}_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par conséquent, les deux systèmes (1) et (2) ont même partie linéaire au voisinage de $(0,0)$. On obtient $\text{tr}\mathbf{A} = 0$ et $\det \mathbf{A} = 1$, c'est-à-dire que les systèmes linéarisés correspondent à des centres.

Si on passe en coordonnées polaires, les systèmes (1) et (2) deviennent :

$$(1) \begin{cases} \dot{r} = r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (2) \begin{cases} \dot{r} = -r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

On rappelle que $r^2 = x^2 + y^2$ et que $\tan \theta = y/x$. Passer un système dynamique en coordonnées polaires, cela revient à passer d'un système en (\dot{x}, \dot{y}) à un système en $(\dot{r}, \dot{\theta})$:

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y}$$

$$r\dot{r} = x[-y + x(x^2 + y^2)] + y[x + y(x^2 + y^2)] \quad \text{Cas(1)}$$

$$r\dot{r} = -xy + x^2(x^2 + y^2) + yx + y^2(x^2 + y^2)$$

$$r\dot{r} = (x^2 + y^2)^2 = r^4 \Rightarrow \boxed{\dot{r} = r^3}$$

$$\tan \theta = y/x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{x^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{[x + y(x^2 + y^2)]x - y[-y + x(x^2 + y^2)]}{x^2} \quad \text{Cas(1)}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{r^2}{r^2 \cos^2 \theta} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = 1}$$

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} \Rightarrow r\dot{r} = x[-y - x(x^2 + y^2)] + y[x - y(x^2 + y^2)] \quad \text{Cas(2)}$$

$$r\dot{r} = -xy - x^2(x^2 + y^2) + xy - y^2(x^2 + y^2)$$

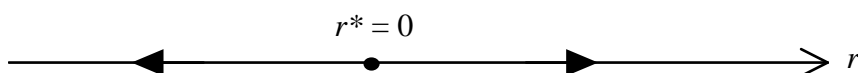
$$r\dot{r} = -(x^2 + y^2)^2 = -r^4 \Rightarrow \boxed{\dot{r} = -r^3}$$

$$\tan \theta = y/x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{x^2}$$

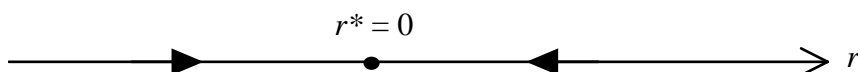
$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{[x - y(x^2 + y^2)]x - y[-y - x(x^2 + y^2)]}{x^2} \quad \text{Cas (2)}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{r^2}{r^2 \cos^2 \theta} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = 1}$$

Dans le cas (1), quelles que soient les conditions initiales, les trajectoires spiralent en s'éloignant de l'origine qui est instable :



Dans le cas (2), quelles que soient les conditions initiales, les trajectoires spiralent vers l'origine qui est asymptotiquement stable :



⇒ Cet exemple met en évidence le fait que, dans le cas des centres, le portrait de phase local du système non linéaire ne correspond pas toujours à celui du système linéarisé.

D'une manière générale, un système dynamique non linéaire peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{\mathbf{X}} = \underbrace{\text{partie linéaire}}_{(P.L.)} + \underbrace{\text{partie non linéaire}}_{(P.N.L.)} \quad (\text{S})$$

Ainsi dans l'exemple 2, les systèmes (1) et (2) s'écrivent avec la même partie linéaire :

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}}_{P.L.} + \underbrace{\begin{bmatrix} x(x^2 + y^2) \\ y(x^2 + y^2) \end{bmatrix}}_{P.N.L.} \end{cases} \quad \text{et} \quad (2) \begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}}_{P.L.} - \underbrace{\begin{bmatrix} x(x^2 + y^2) \\ y(x^2 + y^2) \end{bmatrix}}_{P.N.L.} \end{cases}$$

Dans un voisinage du point d'équilibre, on dit que la partie linéaire de (S) est **perturbée** par la partie non linéaire.

Dans le cas des Nœuds, Foyers et Points selle, la partie linéaire est conservée par de petites perturbations, on dit que les Nœuds, Foyers et Points selle sont **structurellement stables** ; le point d'équilibre est **hyperbolique**.

Par contre, les centres peuvent être « détruits » par de petites perturbations et sont dits **neutralement stables** ; le point d'équilibre est **non hyperbolique**.

Ainsi, dans l'exemple 1, les conditions d'application du théorème de linéarisation sont vérifiées parce que les systèmes linéarisés ne sont pas des centres.

Donc pour k pair, le portrait de phase local correspond à celui du système linéarisé ;

$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ est bien un point selle.

Pour k impair le portrait de phase local correspond bien à celui d'un foyer instable.

3.3. Portrait de phase

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

En tout point du portrait de phase $(x, y) \neq (x^*, y^*)$, il ne passe qu'une seule trajectoire.

Lorsque t varie, $x(t)$ et $y(t)$ varient également, donc un point $\mathbf{M}(x(t), y(t))$ se déplace dans le plan (x, y) selon une certaine trajectoire définie à partir de $\mathbf{M}_0(x(t=0), y(t=0))$.

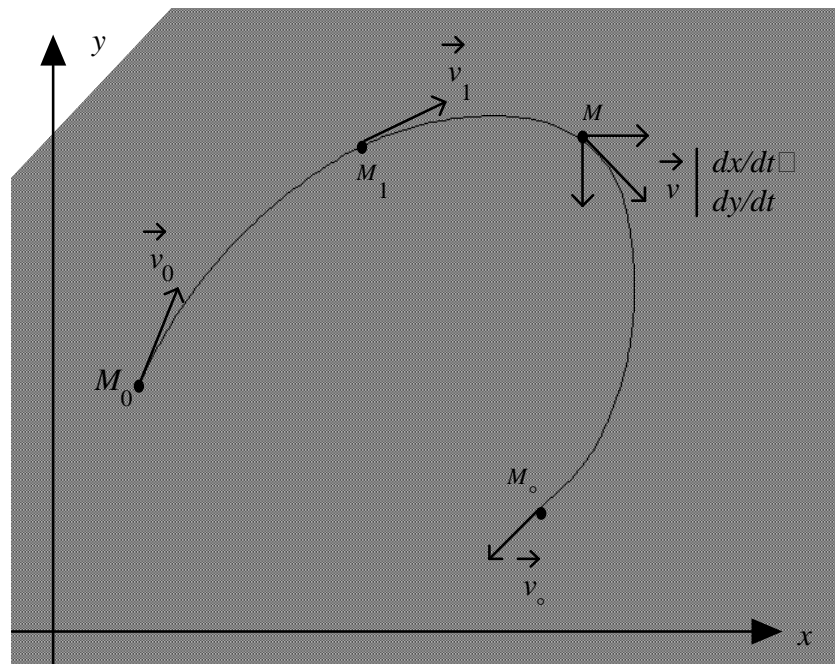


Figure 13 : Représentation fictive d'une trajectoire pour un système dynamique donné ;

M_0 a pour coordonnées $(x(t=0), y(t=0))$;

M a pour coordonnées $(x(t), y(t))$ pour un t quelconque ;

M_∞ a pour coordonnées $(x(t \rightarrow \infty), y(t \rightarrow \infty))$;

On peut définir en chaque point de la trajectoire un **vecteur vitesse** \vec{v} de coordonnées (\dot{x}, \dot{y}) qui est tangent à la trajectoire et orienté dans le sens de parcours de celle-ci.

Les points d'équilibre sont tels que $\vec{v} = \vec{0}$.

- On définit les **isoclines nulles verticales** comme le lieu des points du portrait de phase tel que la direction de \vec{v} soit strictement verticale, *i.e.*, tel que la composante horizontale du vecteur vitesse soit nulle : $\vec{v}(0, \dot{y})$. Ainsi, les isoclines nulles verticales sont les courbes solutions de l'équation $\dot{x} = 0$.

- On définit les **isoclines nulles horizontales** comme le lieu des points du portrait de phase tel que la direction de \vec{v} soit strictement horizontale, *i.e.*, tel que la composante verticale du vecteur vitesse soit nulle : $\vec{v}(\dot{x}, 0)$. Ainsi, les isoclines nulles horizontales sont les courbes solutions de l'équation $\dot{y} = 0$.

- Par définition, aux points d'équilibre, le vecteur vitesse est nul. Par conséquent, un point d'équilibre se trouve à l'intersection des isoclines nulles de nature différente (verticale et horizontale).

Exemple 1 (suite) :

Reprenons le système de l'exemple 1 :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = \cos x \end{cases}$$

On rappelle que les points d'équilibre sont $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Pour k pair, ce sont des points selle et pour k impair des foyers instables.

L'isocline nulle verticale ($\dot{x} = 0$) est la droite $y = x$.

Les isoclines nulles horizontales ($\dot{y} = 0$) sont les droites verticales d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

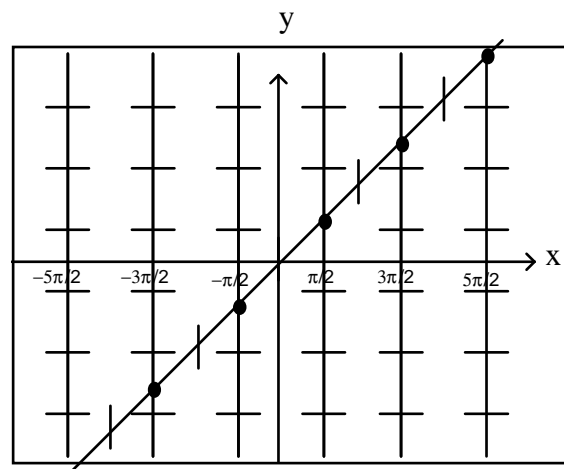


Figure 14 : Isoclines nulles horizontales et verticales pour le système dynamique $\dot{x} = x - y$; $\dot{y} = \cos x$, dans le plan de phase (x, y) . On représente la direction horizontale ou verticale du vecteur vitesse sur les isoclines par des segments $|$ ou $_$.

Pour construire le portrait de phase, il faut aussi déterminer le sens des vecteurs vitesse, en particulier sur les isoclines :

- Sur les isoclines verticales, $\vec{v} \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{y} \end{vmatrix}$; le sens de \vec{v} est donc donné par le signe de \dot{y} .
- Sur les isoclines horizontales, $\vec{v} \begin{vmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$; le sens de \vec{v} est donc donné par le signe de \dot{x} .

Pour étudier le signe de \dot{x} ou de \dot{y} , il est parfois commode de se placer sur les axes du portrait de phase, et d'utiliser la propriété selon laquelle le sens du vecteur vitesse change de sens à la traversée d'une isocline de nature différente.

Dans le cadre de l'exemple 1 :

- $\dot{y} = \cos x$, donc $\dot{y} > 0$ dans les bandes du plan délimitée par $x \in \left] -\frac{3\pi}{2} ; -\frac{5\pi}{2} \right[$,
 $x \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$, $x \in \left] \frac{3\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2} \right[$, ... Dans les bandes intermédiaires, $\dot{y} < 0$.
- $\dot{x} = x - y$, donc $\dot{x} > 0$ pour $y < x$ c'est-à-dire en dessous de la 1^{ère} bissectrice.

On peut désormais compléter la Figure 14 :

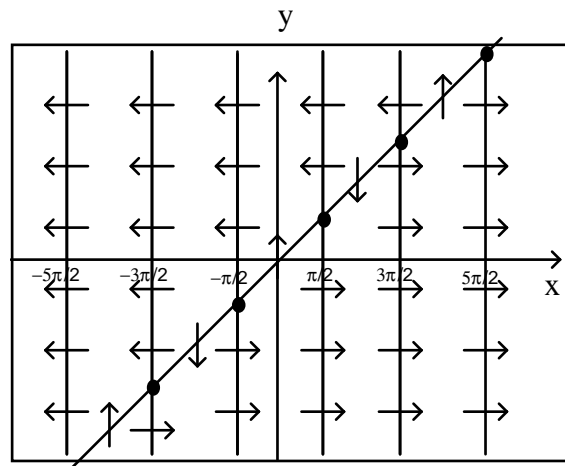


Figure 15 : Sens des vecteurs vitesse pour le système dynamique $\dot{x} = x - y$; $\dot{y} = \cos x$, dans le plan de phase (x, y) .

Remarques :

La composante horizontale du vecteur vitesse change de sens lorsque l'on traverse la droite $y = x$. De même, La composante verticale du vecteur vitesse change de sens lorsque

l'on traverse les droites $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

On peut maintenant construire les trajectoires dans le portrait de phase, en respectant le sens des vecteurs vitesse :

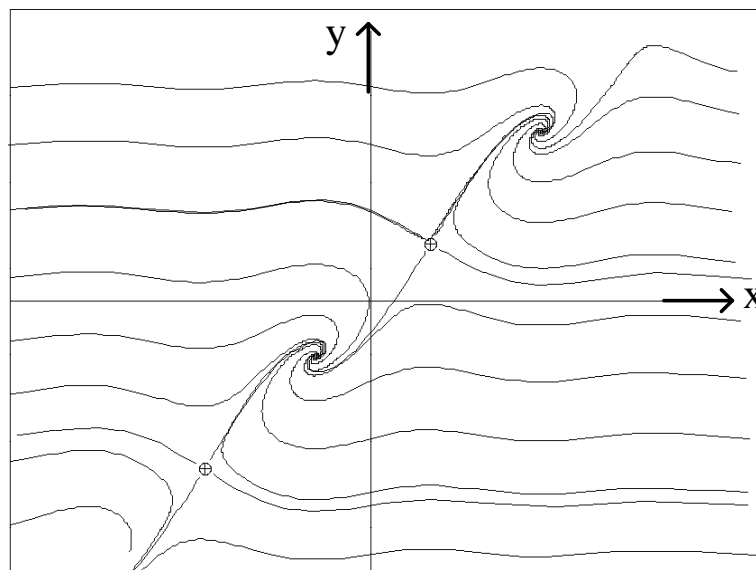


Figure 16 : Trajectoires associées au système dynamique $\dot{x} = x - y$; $\dot{y} = \cos x$.

4. Application en dynamique des populations

Quand différentes espèces interagissent, la dynamique de la population de chaque espèce est affectée par les effectifs des autres populations. En général, il y a une chaîne d'espèces en interaction, appelée **chaîne trophique**, qui constitue une communauté pouvant être structurellement complexe. Par mesure de simplicité des modèles sous-jacents, nous ne considérerons ici que des systèmes impliquant deux espèces.

L'exemple le plus classique en dynamique des populations est le modèle de Lotka-Volterra. Il fut proposé par **Vito VOLTERRA**¹ en 1926 pour des systèmes prédateurs-proies, et parallèlement par **Alfred James LOTKA**², afin d'expliquer l'évolution par oscillations du niveau des pêches dans la mer Adriatique.

Le modèle de Lotka-Volterra s'écrit, dans sa version la plus générale, comme suit :

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = a_1 n_1 + c_1 n_1 n_2 \\ \dot{n}_2 = a_2 n_2 + c_2 n_1 n_2 \end{cases}$$

où $n_1(t)$ et $n_2(t)$ représentent les effectifs des populations 1 et 2 respectivement.

Les différents paramètres ont une interprétation biologique :

- En l'absence de la population 2, la population 1 se développe selon une croissance de type exponentielle avec un taux de croissance malthusien égal à a_1 si $a_1 > 0$. Si $a_1 < 0$, alors la population 1, en l'absence de la population 2, décroît exponentiellement ;
- La population 2, en l'absence de la population 1, réagit de la même façon que la population 1, avec un taux de croissance malthusien égal à a_2 . En fonction du signe de a_2 , la population 2 va croître ($a_2 > 0$) ou décroître ($a_2 < 0$) de manière exponentielle.
- L'action d'une des deux populations sur l'autre est proportionnelle au produit $n_1 n_2$, *i.e.*, à la probabilité de rencontre entre individus des deux populations. Le type d'interaction qui est modéliser est fonction des signes respectifs de c_1 et de c_2 .

¹ <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Volterra.html>

² <http://users.pandora.be/ronald.rousseau/html/lotka.html>

	$c_1 < 0$	$c_1 > 0$
$c_2 < 0$	Compétition	Population 1 = Prédateurs Population 2 = Proies
$c_2 > 0$	Population 1 = Proies Population 2 = Prédateurs	Symbiose Ou Mutualisme

4.1. Le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

On se place ici dans le cas où $c_1 < 0$ et $c_2 > 0$.

On note plus classiquement $N(t)$ l'effectif (ou la densité, ou la biomasse) de la population de proies et $P(t)$ celui de la population de prédateurs au temps t . La formulation classique du modèle de Lotka-Volterra est alors :

$$\begin{cases} \dot{N} = aN - bNP \\ \dot{P} = -dP + cNP \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{N} = N(a - bP) \\ \dot{P} = P(cN - d) \end{cases}$$

où a, b, c, d sont des constantes strictement positives. On travaille avec des densités ou des biomasses donc $N, P > 0$.

Les paramètres peuvent s'interpréter de la manière suivante :

- a est le taux de croissance malthusien des proies en l'absence de prédateurs ;
- b correspond à la quantité de proies qui disparaît par prédateur et par unité de temps ; le produit NP peut être interprété comme la probabilité de rencontre entre proies et prédateurs ; la fonction bN représente le nombre de proies mangées par un prédateur en une unité de temps, encore appelée réponse fonctionnelle de Holling Type I.
- c correspond à la quantité de prédateur qui « apparaît » par proies ; en général, $c = e \times b$, où e est le taux de conversion de la biomasse de proie en biomasse de prédateur.
- d est le taux de décroissance malthusien des prédateurs en l'absence de proies.

- *Recherche des points d'équilibre*

Les deux points d'équilibre sont $(0,0)$ et $(N^*, P^*) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$.

- *Étude de stabilité locale (linéarisation)*

La matrice Jacobienne est : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a - bP & -bN \\ cP & -d + cN \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} \Rightarrow \det = -ad < 0 \Rightarrow \text{Point selle}$$

$$\mathbf{A}_{(N^*, P^*)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} tr = 0 \\ \det = ac > 0 \end{cases} \Rightarrow (N^*, P^*) \text{ est non hyperbolique}$$

La linéarisation prévoit des centres autour de (N^*, P^*) . Comme nous l'avons vu au § 3.2 du chapitre 3, le théorème de linéarisation ne nous assure pas de la conservation de ces centres.

Pour confirmer l'existence de centres, on utilise des outils globaux, comme l'existence d'une intégrale première dont la définition est la suivante.

Définition 1 :

Une fonction $g : D(\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable est dite **intégrale première** du système $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in S \subseteq \mathbb{R}^2$, dans la région $D \subseteq S$ si $g(\mathbf{X}(t))$ reste constante pour toute solution $\mathbf{X}(t)$ du système.

Autrement dit :

$$\forall \mathbf{X}(t) \text{ avec } \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0, \text{ alors } g(\mathbf{X}(t)) = g(\mathbf{X}_0) \forall t.$$

Quant une intégrale première existe, elle n'est pas unique. En effet, si $g(\mathbf{X})$ est une intégrale première, alors $g(\mathbf{X}) + C$ ou $Cg(\mathbf{X})$, $C \in \mathbb{R}$, le sont aussi. La constante C est en général choisie pour obtenir une valeur simple de g en $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

Le fait que $g(\mathbf{X})$ soit une intégrale première pour le système $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ peut aussi s'exprimer à partir des dérivées partielles de g , $\partial g/\partial x$ et $\partial g/\partial y$.

Supposons que $\mathbf{X} = (x, y)$, et que l'on considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X}) \text{ avec } \Phi(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(\mathbf{X}(t)) &= 0 = \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y} \\ \dot{g} &= \frac{\partial g}{\partial x} f_1(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y} f_2(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} f_1 = -\frac{\partial g}{\partial y} f_2 \\ \dot{g} &= \nabla g \bullet \Phi(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

En pratique, une intégrale première sera solution de :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} \quad (x, y) \in D' \subseteq S$$

~~**RQ** : le signe moins n'a pas d'importance du fait que si g est une I.P., alors Cg aussi ; il suffit donc de prendre $C = -1$.~~

En effet, si les solutions de cette équation satisfont :

$$g(x, y) = K \text{ avec } K \in \mathbb{R} \text{ et } g : D' \rightarrow \mathbb{R}$$

alors g est intégrale première de $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ sur D' .

Si on différencie g , il vient :

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \text{ car } g = \text{cste}$$

En substituant $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}$ et en multipliant par $f_1(x, y)$, on obtient à nouveau :

$$\frac{\partial g}{\partial x} f_1 + \frac{\partial g}{\partial y} f_2 = 0$$

$f_1(x, y)$ ne doit pas s'annuler sur D' sinon dy/dx n'est pas défini.

Pour conclure, on peut dire que si $g(\mathbf{X})$ est continûment différentiable sur $D \supset D'$, et si la relation $\frac{\partial g}{\partial x} f_1 + \frac{\partial g}{\partial y} f_2 = 0$ est satisfaite, alors $g(\mathbf{X})$ est intégrale première sur D .

Définition 2 :

Un système qui possède une intégrale première définie sur tout le plan (*i.e.*, $D = \mathbb{R}^2$) est un système **conservatif**.

Dans le cas du modèle de Lotka-Volterra, on calcule l'intégrale première de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dP} &= \frac{N(a-bP)}{P(-d+cN)} \\ \Leftrightarrow \frac{dN}{N}(-d+cN) &= \frac{dP}{P}(a-bP) \\ \Leftrightarrow -d \frac{dN}{N} + c dN &= a \frac{dP}{P} - b dP \\ \Leftrightarrow -d \ln N + cN &= a \ln P - bP + K \\ \Leftrightarrow a \ln P + d \ln N - bP - cN &= K' \quad (K' = -K) \end{aligned}$$

Posons $g(N, P) = d \ln N + a \ln P - cN - bP$.

Alors $\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial N} \dot{N} + \frac{\partial g}{\partial P} \dot{P}$ avec $\frac{\partial g}{\partial N} = \frac{d}{N} - c$ et $\frac{\partial g}{\partial P} = \frac{a}{P} - b$.

Il vient que :

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \left(\frac{d}{N} - c \right) N(a-bP) + \left(\frac{a}{P} - b \right) P(cN-d) \\ &= (d-cN)(a-bP) + (a-bP)(cN-d) = 0 \end{aligned}$$

Les trajectoires du système de Lotka-Volterra sont donc données par les courbes de niveaux $g(N, P) = d \ln N + a \ln P - cN - bP$.

Pour montrer que les centres se conservent autour de (N^*, P^*) , il faut montrer que les trajectoires $g(N, P) = K$ se referment autour du point d'équilibre, c'est-à-dire que la fonction $g(N, P)$ présente un extremum en (N^*, P^*) .

Par un développement en série de Taylor au voisinage de (N^*, P^*) , on obtient :

$$\begin{aligned}
 g(N, P) &= g(N^*, P^*) + \frac{\partial g}{\partial N} \Big|_{(N^*, P^*)} (N - N^*) + \frac{\partial g}{\partial P} \Big|_{(N^*, P^*)} (P - P^*) \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial N^2} \Big|_{(N^*, P^*)} (N - N^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial P^2} \Big|_{(N^*, P^*)} (P - P^*)^2 \\
 &+ \frac{\partial^2 g}{\partial N \partial P} \Big|_{(N^*, P^*)} (N - N^*)(P - P^*)
 \end{aligned}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial N} \Big|_{(N^*, P^*)} = \frac{d}{N^*} - c = \frac{d}{d/c} - c = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial P} \Big|_{(N^*, P^*)} = \frac{a}{P^*} - b = \frac{a}{a/b} - b = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial N^2} \Big|_{(N^*, P^*)} = -\frac{d}{N^2} = -\frac{c^2}{d} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial P^2} \Big|_{(N^*, P^*)} = -\frac{a}{P^2} = -\frac{b^2}{a} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial N \partial P} \Big|_{(N^*, P^*)} = 0 \end{cases} .$$

Donc finalement :

$$g(N, P) - g(N^*, P^*) = -\frac{d^2}{2c} (N - N^*)^2 - \frac{b^2}{2a} (P - P^*)^2$$

Nous concluons que dans un voisinage de (N^*, P^*) , $g(N, P) - g(N^*, P^*)$ est de signe constant et < 0 , c'est-à-dire que la fonction $g(N, P)$ présente un maximum local en (N^*, P^*) . Par conséquent, les courbes de niveaux de $g(N, P)$ se referment, et les trajectoires du système de Lotka-Volterra autour de (N^*, P^*) sont bien des centres.

• Portrait de phase

Isoclines nulles :

$$\text{- Isocline verticale : } \dot{N} = N(a - bP) = 0 \Leftrightarrow N = 0 \text{ ou } P = \frac{a}{b}$$

$$\text{- Isocline horizontale : } \dot{P} = P(cN - d) = 0 \Leftrightarrow P = 0 \text{ ou } N = \frac{d}{c}$$

Sens des flèches :

$$\text{- Si } N = 0, \text{ alors } \dot{N} = 0 \text{ et } \dot{P} = -dP < 0$$

Sur l'autre isocline $P = a/b$, on déduit le sens des flèches par continuité à partir du point d'intersection des deux isoclines verticales.

- Si $P = 0$, alors $\dot{P} = 0$ et $\dot{N} = aN > 0$

Comme précédemment, le sens des flèches sur l'isocline $N = d/c$ se déduit par continuité.

• *Portrait de phase*

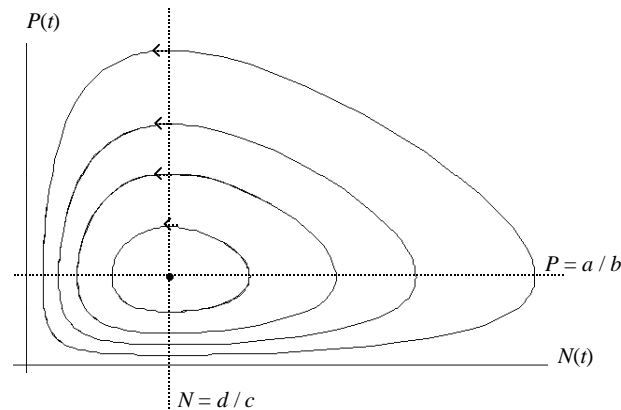


Figure 19 : Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra.

• *Allure des chroniques*

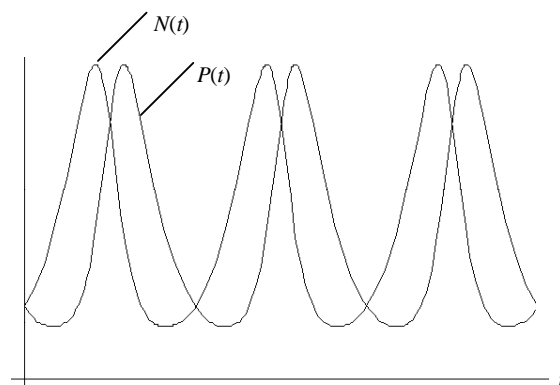


Figure 20 : Chronique du modèle de Lotka-Volterra pour $N(0) = P(0)$.

On observe un pic de proies suivi d'un pic de prédateurs. Des données concernant les captures de lynx et de lièvres, collectées au Canada sur une période de 90 ans, mettent en évidence des variations cycliques de ces populations (Edelstein-Keshet, 1988).

Ci-dessous, des données issues d'Internet :

http://people.westminstercollege.edu/departments/science/The_Natural_World/Lesson_Schedule/Assignments/Hare_Lynx.htm.

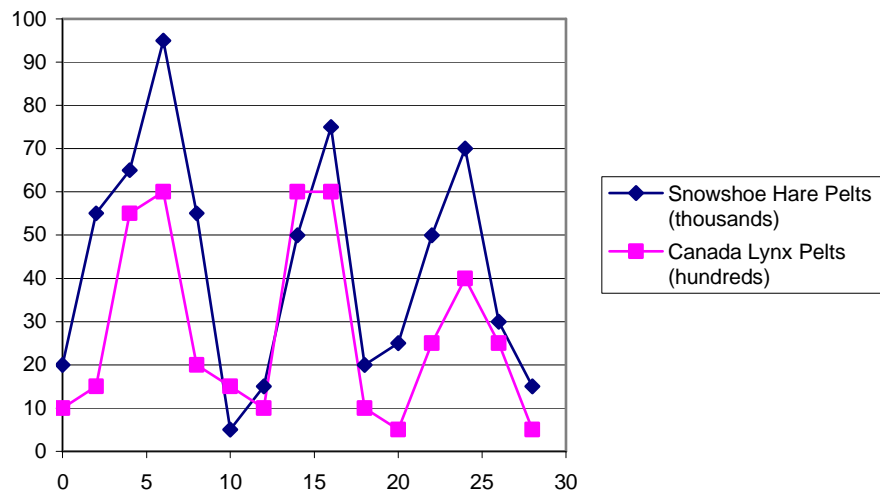


Figure 20bis : Data from an interesting study from the 1930's. They represent the number of pelts brought into the Hudson Bay Trading Company over a 28 year period.

4.2. Critique et modifications du modèle de Lotka-Volterra

Le modèle classique de Lotka-Volterra n'est pas satisfaisant du point de vue biologique car la croissance des proies est supposée exponentielle en l'absence de prédateurs. Un modèle plus réaliste doit au moins prendre en compte une auto-régulation de la croissance des proies par une fonction logistique par exemple.

Une version modifiée du modèle de Lotka-Volterra est donc :

$$\begin{cases} \dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - bNP \\ \dot{P} = P(cN - d) \end{cases}$$

où K représente le nombre maximum d'individus que le milieu peut supporter, encore appelé capacité limite ou capacité de charge. Une telle croissance logistique limite la croissance des proies et reflète donc une compétition intra-spécifique (pour l'accès aux ressources par exemple).

• *Recherche des points d'équilibre*

Les trois points d'équilibre sont $(0,0)$, $(K,0)$ et $(N^*, P^*) = \left(\frac{d}{c}, \frac{r}{b} \left(1 - \frac{d}{Kc}\right)\right)$.

Le dernier point d'équilibre a un intérêt biologique si $K > \frac{d}{c}$

• *Étude de stabilité locale (linéarisation)*

La matrice Jacobienne est : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{2N}{K}\right) - bP & -bN \\ cP & -d + cN \end{pmatrix}$

$\mathbf{A}_{(0,0)}^* = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$ On a deux valeurs propres r et $-d$ de signe contraire.

Donc $(0,0)$ est un Point Selle

$\mathbf{A}_{(K,0)}^* = \begin{pmatrix} -r & -bK \\ 0 & -d + cK \end{pmatrix}$ $\det(\mathbf{A}_{(K,0)}^*) = -r(-d + cK)$
 $\text{tr}(\mathbf{A}_{(K,0)}^*) = -r - d + cK$

Si $K > \frac{d}{c}$, $\det(\mathbf{A}_{(K,0)}^*) < 0$ donc $(K,0)$ est un Point selle

Si $K < \frac{d}{c}$, $\det(\mathbf{A}_{(K,0)}^*) > 0$ et $\text{tr}(\mathbf{A}_{(K,0)}^*) < 0$ donc $(K,0)$ est stable (noeud stable)

$\mathbf{A}_{(N^*, P^*)}^* = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{2N^*}{K}\right) - bP^* & -bN^* \\ cP^* & -d + cN^* \end{pmatrix}$

Or, (N^*, P^*) vérifie $\begin{cases} \dot{N} = r \left(1 - \frac{N^*}{K}\right) - bP^* = 0 \\ \dot{P} = cN^* - d = 0 \end{cases}$ donc la jacobienne se simplifie :

$\mathbf{A}_{(N^*, P^*)}^* = \begin{pmatrix} -\frac{rN^*}{K} & -bN^* \\ cP^* & 0 \end{pmatrix}$ $\det(\mathbf{A}_{(N^*, P^*)}^*) = bcP^*N^* > 0$
 $\text{tr}(\mathbf{A}_{(N^*, P^*)}^*) = -\frac{rN^*}{K} < 0$

Donc quand il existe ($N^* > 0$ et $P^* > 0$), le point d'équilibre non trivial est stable (foyer stable).

• *Portraits de phase*

Isoclines nulles dans le plan (N,P) :

$$\text{- Isoclines verticales : } \dot{N} = N \left(r \left(1 - \frac{N}{K} \right) - bP \right) = 0 \Leftrightarrow N = 0 \text{ ou } P = \frac{r}{b} \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$

$$\text{- Isoclines horizontales : } \dot{P} = P(cN - d) = 0 \Leftrightarrow P = 0 \text{ ou } N = \frac{d}{c}$$

Sens des flèches :

$$-\dot{N} > 0 \Leftrightarrow \left(r \left(1 - \frac{N}{K} \right) - bP \right) > 0 \Leftrightarrow P < \frac{r}{b} \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$

Donc en dessous de la droite d'équation $P = \frac{r}{b} \left(1 - \frac{N}{K} \right)$, la population de proies augmente (\Rightarrow), et inversement, au-dessus de cette droite, elle diminue (\Leftarrow).

$$-\dot{P} > 0 \Leftrightarrow N > \frac{d}{c}$$

Donc à droite de la droite d'équation $N = \frac{d}{c}$, la population de prédateurs augmente (\Uparrow), et inversement, à gauche de cette droite, elle diminue (\Downarrow).

Il y a donc deux portraits de phase possibles :

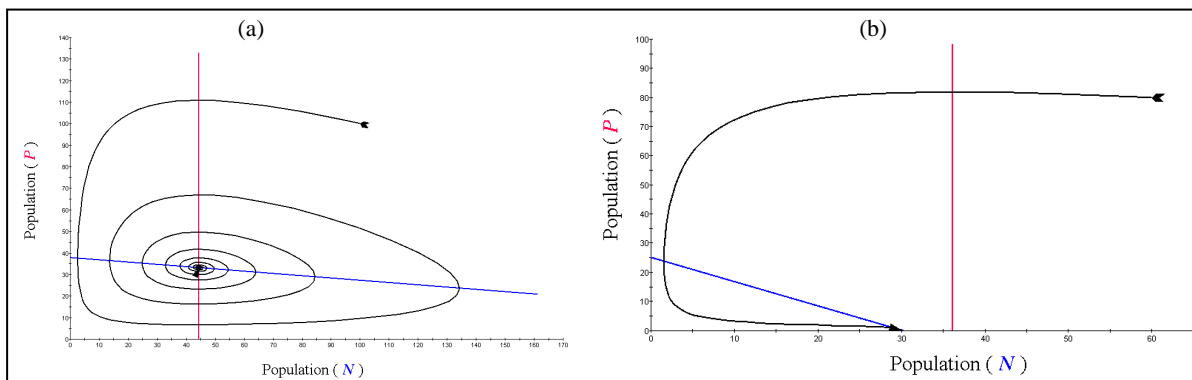


Figure 21 : Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra modifié (a) pour $K > d/c$ et (b) pour $K < d/c$.

Si la capacité limite des proies est suffisamment forte (supérieure à d/c), les trajectoires convergent vers le point d'équilibre non trivial : on a coexistence des proies et des prédateurs (Fig. 21 (a)).

Par contre, si la capacité limite K diminue, la population de prédateurs s'éteint et la population de proies se stabilise à sa capacité limite (Fig. 21 (b)).

• *Allure des chroniques*

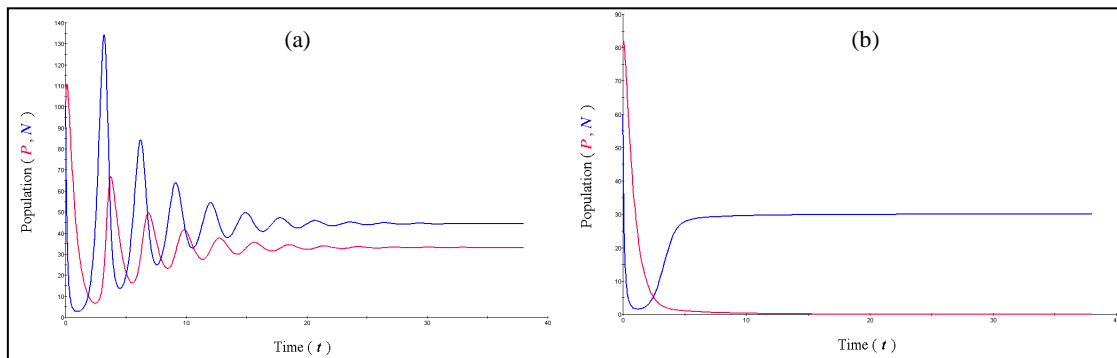


Figure 22 : Chronique du modèle de Lotka-Volterra modifié (a) pour $K > d/c$ et (b) pour $K < d/c$.

Le fait d'introduire de la compétition intra-spécifique chez les proies (croissance logistique) stabilise le modèle. Cependant, il faut que la capacité limite du milieu K soit suffisamment grande pour observer une coexistence de la proie et du prédateur.

Par ailleurs, le terme de prédation $-bNP$ est aussi irréaliste du point de vue biologique. En effet, le nombre de proies qui disparaissent par unité de temps et par prédateur (*i.e.* la réponse fonctionnelle, encore appelé **fonction réponse** F_r) est égal à bN , c'est-à-dire proportionnelle à N (Holling type I). Ainsi, lorsque N augmente, un seul prédateur est en mesure de manger une quantité de proies quasi illimitée par unité de temps.

Pour prendre en compte un effet de saturation dû à des contraintes physiologiques, empêchant le prédateur de manger de grandes quantités de proies, il est usuel d'utiliser une fonction réponse de Holling type II :

$$F_r = \frac{\alpha N}{1 + \beta N} \text{ avec } \lim_{N \rightarrow \infty} F_r = \frac{\alpha}{\beta}$$

Un modèle encore plus réaliste pour les systèmes proie-prédateur est donc le modèle de Holling :

$$\begin{cases} \dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{\alpha NP}{1 + \beta N} \\ \dot{P} = -dP + e \frac{\alpha NP}{1 + \beta N} \end{cases}$$

Une alternative à ce modèle a été proposée dans le modèle de Holling-Tanner qui suppose cette fois que la capacité limite des prédateurs est fonction du nombre de proies :

$$\begin{cases} \dot{N} = r_1 N \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{\alpha NP}{1 + \beta N} \\ \dot{P} = r_2 P \left(1 - \frac{P}{\gamma N} \right) \end{cases}$$

Il existe bien d'autres types de réponses fonctionnelles. Celles présentées ici dépendent de la densité de proies et sont dites proies-dépendantes (fonctions de N). En fonction du comportement du prédateur envers sa proie, on peut également avoir des réponses fonctionnelles proies-dépendantes de Holling type III, type IV, des fonctions prédateurs-dépendantes (fonctions de P) ou encore ratio-dépendantes (fonctions du ratio N/P).