

# Biologie Mathématique et Modélisation (L3 - MIV)

## Chapitre 3 : Fonctions de Lyapunov - Notion de cycle limite

Sandrine CHARLES (14/02/2008)

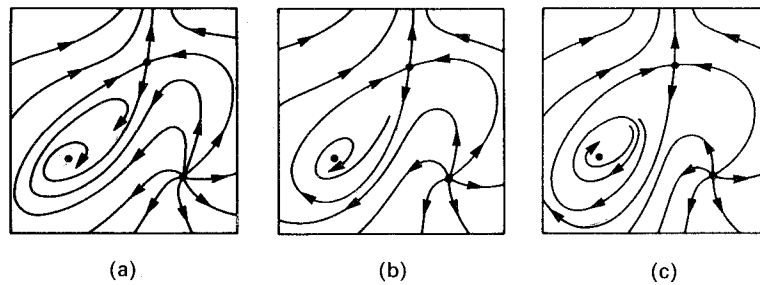


Figure 18 : Trois portraits de phase globaux qualitativement différents mais correspondant à trois points d'équilibre avec le même comportement local.

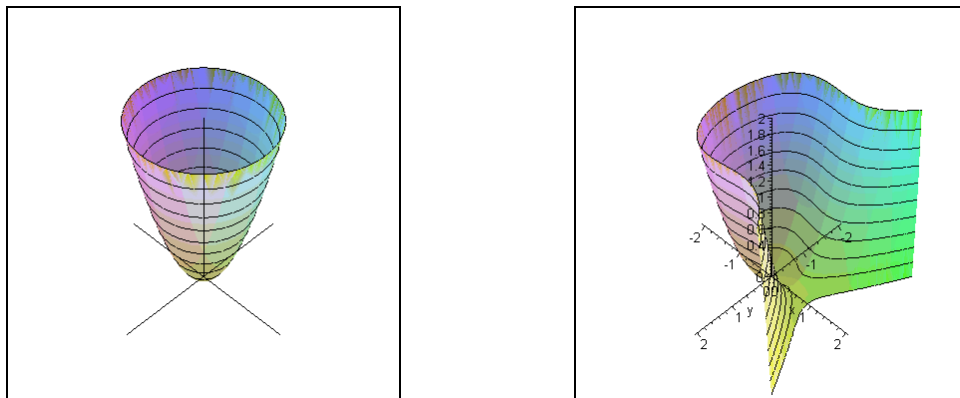


Figure 1 : A gauche  $V(x, y) = x^2 + y^2$  ; à droite  $V(x, y) = x^2 + y^2 - y^3$ .

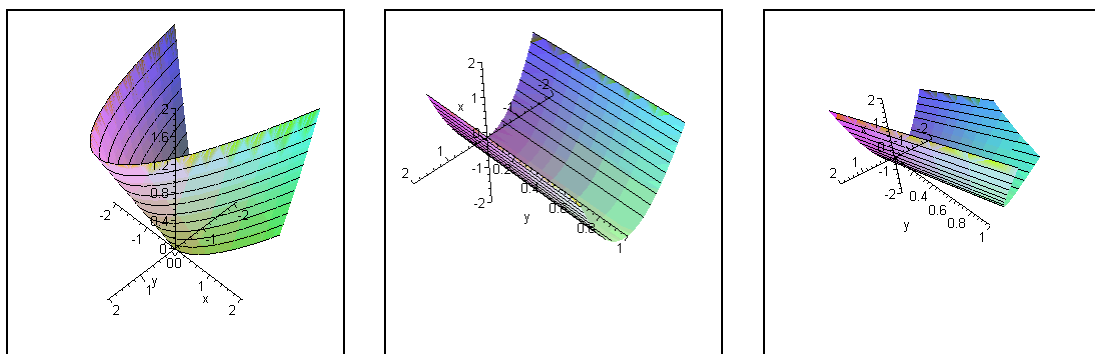


Figure 2 : De gauche à droite :  $V(x, y) = x + y^2$ ,  $V(x, y) = (x + y)^2$  et  $V(x, y) = x^2$ .

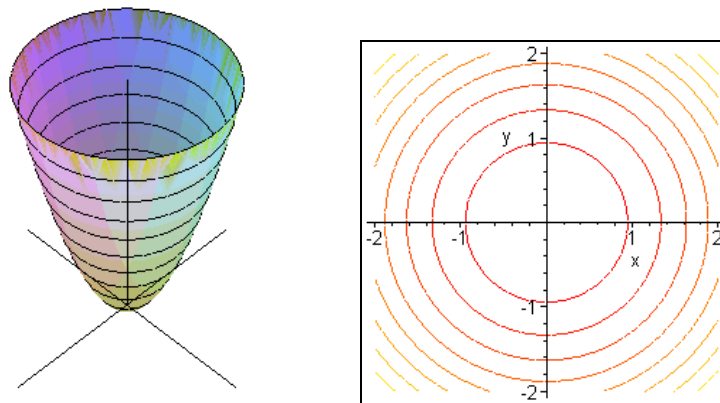
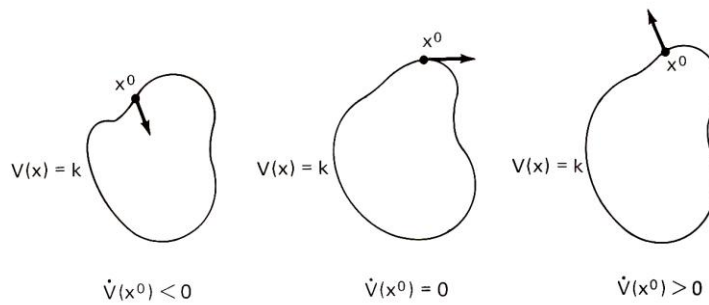


Figure 3 : Courbes de niveaux de la fonction  $V(x, y) = x^2 + y^2$ .



Intersection des courbes de niveaux avec un vecteur vitesse tangente à la trajectoire d'un système dynamique.

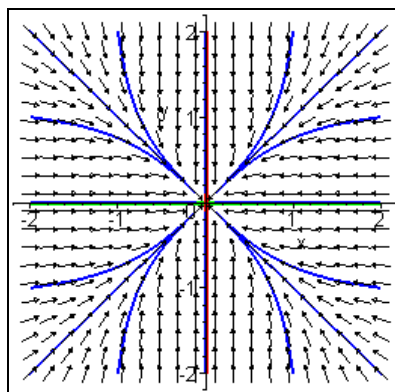
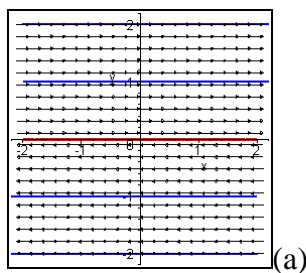
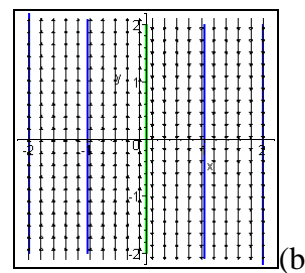


Figure 4 : Trajectoire du système  $\dot{u} = -u^3$  ;  $\dot{v} = -v^3$ .



(a)



(b)

Figure 5 : cas particuliers associés au système  $\dot{x} = y$  ;  $\dot{y} = -x - 6x^2y$  ; (à gauche) lorsque  $x = 0$  ; (à droite) lorsque  $y = 0$ .

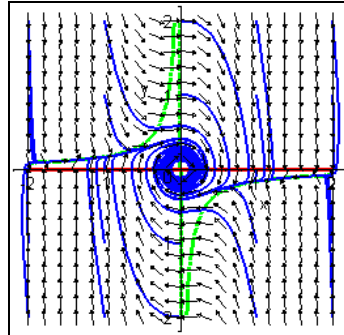


Figure 6 : Trajectoires associées au système  $\dot{x} = y$  ;  $\dot{y} = -x - 6x^2y$ .

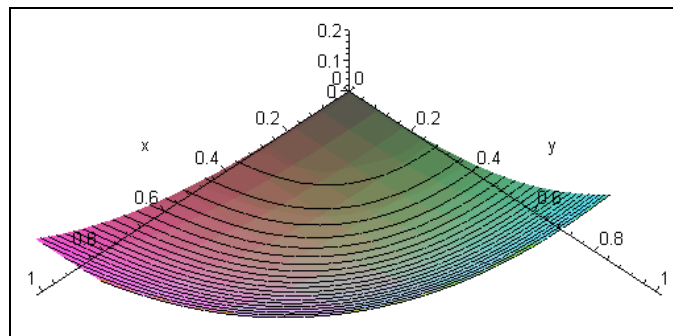


Figure 7 : Représentation 3D de la fonction  $V(x, y) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^2y + \frac{1}{3}y^3$  lorsque  $x = 0$ .

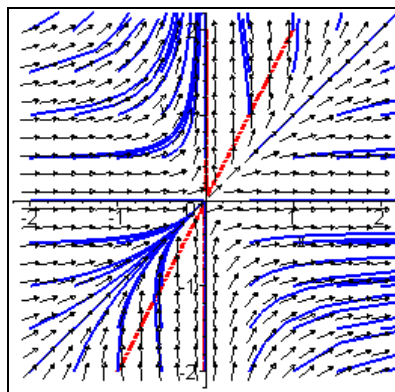


Figure 8 : Trajectoires associés au système  $\dot{x} = 2x^2 - xy$  ;  $\dot{y} = y^2$ .

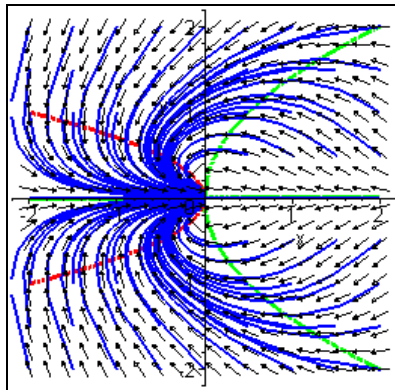


Figure 9 : Trajectoires associés au système  $\dot{x} = -x - 2y^2$  ;  $\dot{y} = 2xy - y^3$ .

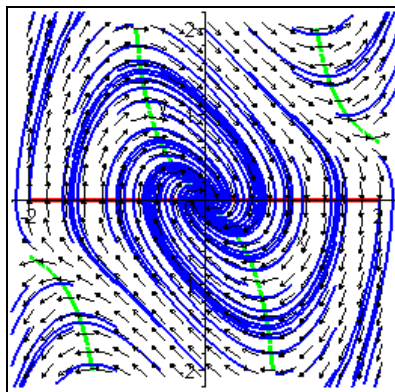


Figure 10 : Trajectoires associés au système  $\dot{x} = y$  ;  $\dot{y} = -x(1-x^2)$ .

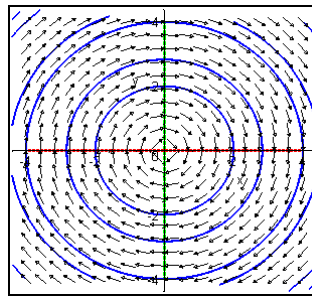


Figure 11 : Trajectoires associées au système  $\dot{x} = y$  ;  $\dot{y} = -x$ .

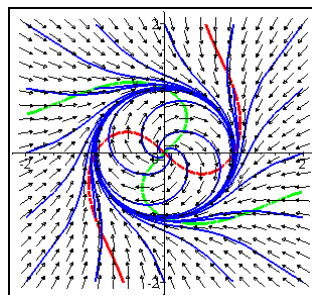


Figure 12 : Trajectoires associées au système  $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} + \alpha(1-x^2-y^2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  avec  $\alpha = 1$ .

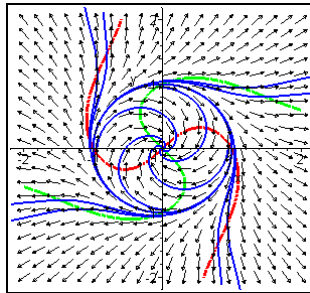


Figure 13 : Trajectoires associées au système  $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} + \alpha(1-x^2-y^2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  avec  $\alpha = -1$ .

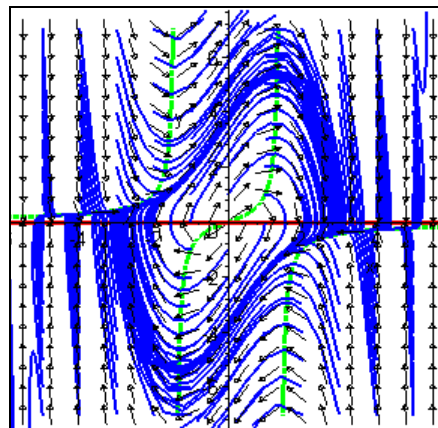
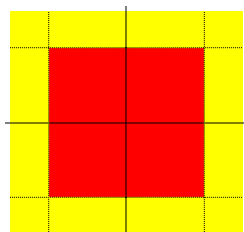
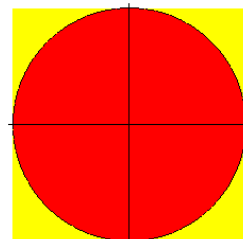


Figure 13bis : Trajectoires de l'oscillateur de Van der Pol, dont le système d'équation est

$$\dot{x} = y ; \dot{y} = (2-x^2)y - x$$



(a)



(b)

Figure 14 : (a) Carré de côté  $[a,b]$  ; (b) Cercle de rayon  $r$ .

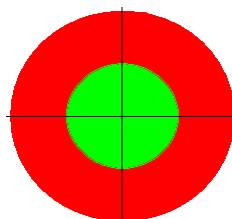


Figure 15 : L'anneau rouge est une ensemble connexe mais pas simplement connexe

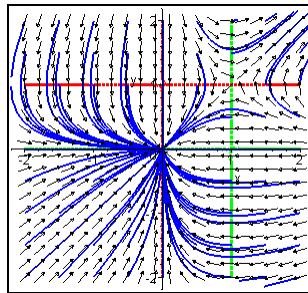


Figure 16 : Trajectoires associées au système  $\dot{x} = x(y-1)$  ;  $\dot{y} = y(x-1)$ . Les quatre quadrants de  $\mathbb{R}^2$  sont positivement invariants pour ce systèmes.

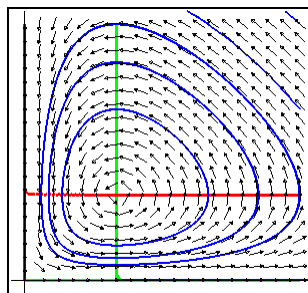


Figure 17 : Trajectoires du modèle de Lotka-Volterra pour  $a = b = c = d = 1$ .

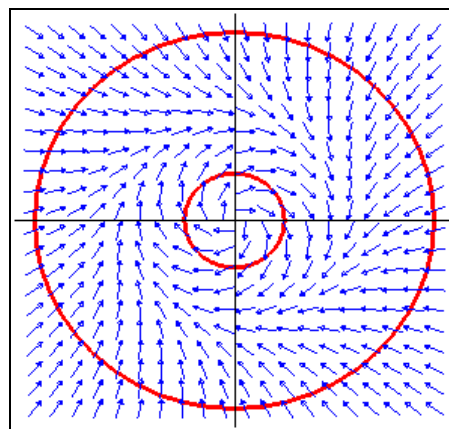


Figure 18 : Champ de vecteurs du système  $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} + (1-x^2-y^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ . Les deux cercles rouges de rayons  $1/2$  et  $2$  délimitent un domaine attractant pour ce système.

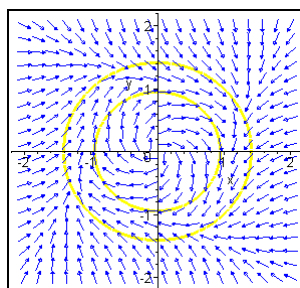


Figure 19 : Champ de vecteurs du système  $\dot{x} = y + x - x^3$  ;  $\dot{y} = -x + y - y^3$ . Les deux cercles jaunes de rayons  $< 1$  et  $> 2$  délimitent un domaine attractant pour ce système.

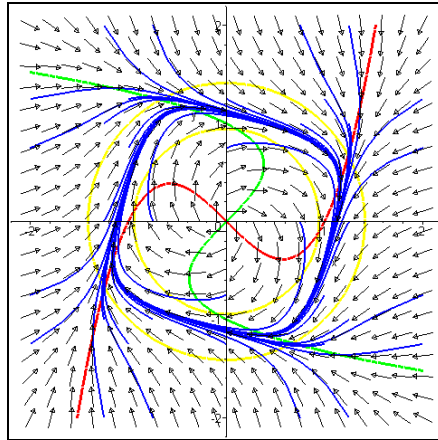


Figure 20 : Trajectoires associées au système  $\dot{x} = y + x - x^3$  ;  $\dot{y} = -x + y - y^3$ . Les deux cercles jaunes de rayons  $< 1$  et  $> 2$  délimitent un domaine attractant contenant un cycle limite stable.

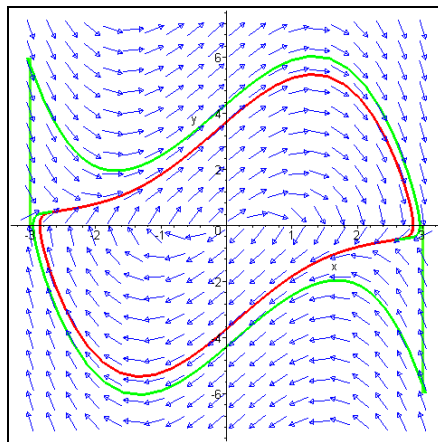


Figure 21 : En vert, « boîte » de Poincaré-Bendixson pour l'oscillateur de Van der Pol ; En rouge, le cycle limite stable pour ce système.

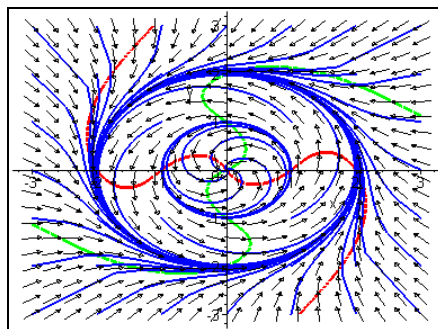


Figure 22 : Trajectoires associées au système  $\dot{r} = r(1-r)(r-2)$  ;  $\dot{\theta} = 1$ , qui admet deux cycles limites.