

Équations aux Différences & Modélisation

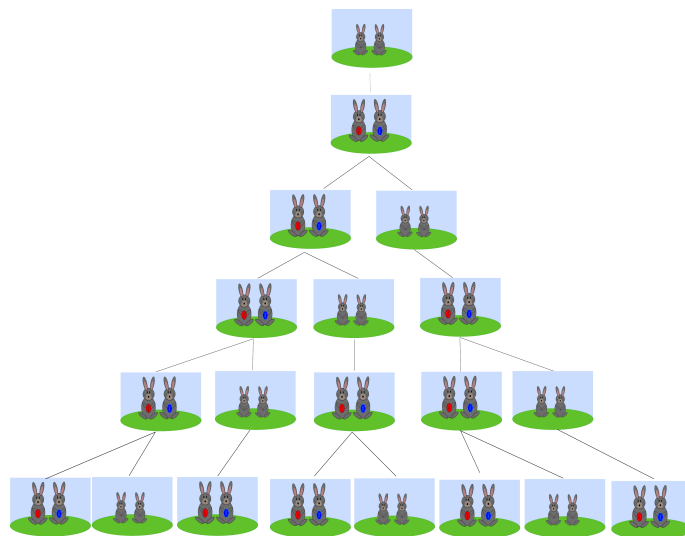
Équations aux différences linéaires dans \mathbb{R}^2

Sandrine CHARLES - sandrine.charles@univ-lyon1.fr

Arnaud CHAUMOT - arnaud.chaumot@irstea.fr

Christelle LOPES - christelle.lopes@univ-lyon1.fr

17 octobre 2016



Croissance d'une population de lapins selon la suite de Leonardo Fibonacci (1202) publié dans son *Liber abaci*.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Fibonacci.



Table des matières

1	Introduction	4
2	Rappels sur les formes de Jordan réelles dans \mathbb{R}^2	4
3	Typologie des systèmes discrets linéaires de \mathbb{R}^2	6
3.1	Cas où \mathbf{A} admet deux valeurs propres réelles distinctes	7
3.2	Cas où \mathbf{A} admet une valeur propre double (\mathbf{A} non diagonale)	12
3.3	Cas où \mathbf{A} admet deux valeurs propres complexes conjuguées	14
4	La suite de Fibonacci ou la folle épopée des lapins	17
4.1	Énoncé	18
4.2	Solution	18
5	Les systèmes de Lindenmayer	21
6	Evolution d'une population de bouquetins du "Grand Paradis"	24
7	Propagation d'une plante annuelle	26

Table des figures

1	Cas d'un point fixe origine qui est un nœud asymptotiquement stable	8
2	Cas d'un point fixe origine qui est un nœud instable	9
3	Cas d'un point fixe origine de type point selle	9
4	Cas d'un point fixe origine de type nœud dégénéré	10
5	Typologie des solutions d'un système récurrent linéaire dans \mathbb{R}^2 lorsque la matrice admet une valeur propre double et n'est pas diagonale.	13
6	Typologie des solutions d'un système récurrent linéaire dans \mathbb{R}^2 lorsque la matrice admet deux valeurs propres complexes conjuguées.	15
7	Leonardo Fibonacci (v. 1175 à Pise - v. 1250) mathématicien italien.	17
8	Page 124 du <i>Liber abaci</i> de la bibliothèque nationale de Florence, décrivant la croissance d'une population de lapins et introduisant ainsi la suite de Fibonacci.	17
9	Graphe de cycle de vie de la dynamique d'une population de lapins selon le modèle de Fibonacci.	18
10	La façade du Parthenon.	20
11	Evolution de la proportion de cellules dans un système de Lindenmayer en dimension 2.	23
12	Mauvaises herbes générées par un système de Lindenmayer en trois dimensions.	23
13	Schéma fonctionnel de l'évolution démographique de la population de bouquetins.	25
14	Schéma fonctionnel de la propagation d'une plante annuelle.	27

1 Introduction

Nous allons considérer dans ce chapitre des systèmes d'équations récurrentes couplées de la forme :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases}$$

De tels systèmes peuvent être **linéaires** :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

ou bien **non linéaires**, si f et g sont des fonctions non linéaires de x_n et de y_n .

Ces modèles sont très utilisés aujourd'hui pour décrire les processus d'évolution des séquences génomiques, en épidémiologie, voire même en économie. Dans ce cours, nous verrons des exemples d'application de ces systèmes :

- En démographie, avec la fameuse suite de Fibonacci ;
- Pour décrire des processus de ramification, avec les systèmes de Lindenmayer ;
- En dynamique des populations, avec l'étude d'une population de bouquetins du "Grand Paradis" (*Capra hircus*) et la propagation d'une plante annuelle.

2 Rappels sur les formes de Jordan réelles dans \mathbb{R}^2

Proposition 2.1. Soit \mathbf{A} une matrice réelle carrée de dimension 2. Alors il existe une matrice réelle inversible \mathbf{P} telle que $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ est de l'une des formes suivantes :

$$\begin{array}{ll} (a) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (b) \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \\ (c) \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} & (d) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \beta > 0 \end{array}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0, \alpha, \beta$ sont des réels, en relation directe avec les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} . On dit que \mathbf{J} est **semblable** à \mathbf{A} , suivant la **matrice de passage** \mathbf{P} .

Les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} sont aussi les valeurs propres de la matrice \mathbf{J} . Ce sont les valeurs λ solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad \text{avec } \mathbf{I} : \text{matrice identité}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad \text{équation caractéristique}$$

où $\text{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{22}$ est la trace de \mathbf{A} et $\det(\mathbf{A}) = \mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{22} - \mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{12}$ son déterminant. Le discriminant de l'équation caractéristique est $\Delta = (\text{tr}(\mathbf{A}))^2 - 4\det(\mathbf{A})$. Selon le signe de Δ , on aura des valeurs propres :

- Réelles distinctes ($\Delta > 0$);
- Réelles égales ($\Delta = 0$);
- Complexes conjuguées ($\Delta < 0$).

Exemple : Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. On a $\text{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{6}$ et $\det(\mathbf{A}) = \mathbf{10}$. L'équation caractéristique est donc $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ avec $\Delta = -4$. Les valeurs propres de \mathbf{A} sont $\lambda_{1,1} = 3 \pm i$.

Le calcul des vecteurs propres conjugués associés à λ_1 et λ_2 conduit à $\mathbf{V}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où la matrice de passage :

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{avec } \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie enfin que $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Proposition 2.2. *Tout système récurrent dans \mathbb{R}^2 du type $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_n$ peut être transformé en un système différentiel **canonique** équivalent, $\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{J}\mathbf{Y}_n$, où $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ est la forme de Jordan associée à \mathbf{A} et $\mathbf{X}_n = \mathbf{P}\mathbf{Y}_n$.*

3 Typologie des systèmes discrets linéaires de \mathbb{R}^2

Nous considérons donc des systèmes récurrents de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

On suppose que la matrice \mathbf{A} est inversible ($\det \mathbf{A} \neq 0$), ce qui implique que $(0, 0)$ est le seul point fixe. Ces systèmes peuvent aussi s'écrire sous la forme d'une équation récurrente d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= a_{11}x_{n+1} + a_{12}y_{n+1} \\ \Leftrightarrow x_{n+2} &= a_{11}x_{n+1} + a_{12}(a_{21}x_n + a_{22}y_n) \\ x_{n+1} &= a_{11}x_n + a_{12}y_n \Rightarrow a_{12}y_n = x_{n+1} - a_{11}x_n \\ x_{n+2} &= a_{11}x_n + a_{12}a_{21}x_n + a_{22}(x_{n+1} - a_{11}x_n) \\ x_{n+2} &= (a_{11} + a_{22})x_{n+1} + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_n \\ x_{n+2} - (a_{11} + a_{22})x_{n+1} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_n &= 0 \\ x_{n+2} - \text{tr}(\mathbf{A})x_{n+1} + \det(\mathbf{A})x_n &= 0 \end{aligned}$$

L'utilisation des formes de Jordan semble naturelle pour résoudre les systèmes linéaires dans la mesure où :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Or $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$, donc $\mathbf{A}^n = \mathbf{PJ}^n\mathbf{P}^{-1}$. La résolution des systèmes linéaires se ramène donc au calcul de la matrice \mathbf{J}^n .

3.1 Cas où \mathbf{A} admet deux valeurs propres réelles distinctes

On a $\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c|c} v_{11} & v_{21} \\ \hline v_{12} & v_{22} \end{array} \right)$ et $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Dans la base de Jordan, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} &= \mathbf{J} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} &= \mathbf{J}^n \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n w_0 \\ \lambda_2^n z_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \mathbf{P} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ \hline v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n w_0 \\ \lambda_2^n z_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_{11} \lambda_1^n w_0 + v_{21} \lambda_2^n z_0 \\ v_{12} \lambda_1^n w_0 + v_{22} \lambda_2^n z_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= w_0 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \lambda_1^n + z_0 \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \lambda_2^n \end{aligned}$$

On peut maintenant représenter les solutions, soit dans le plan (x_n, y_n) , soit dans le plan (w_n, z_n) : qualitativement, les trajectoires seront les mêmes. La nature du point fixe va dépendre du signe et de la valeur des valeurs propres λ_1 et λ_2 , c'est-à-dire des conditions $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$ (voir Figures 1 à 4).

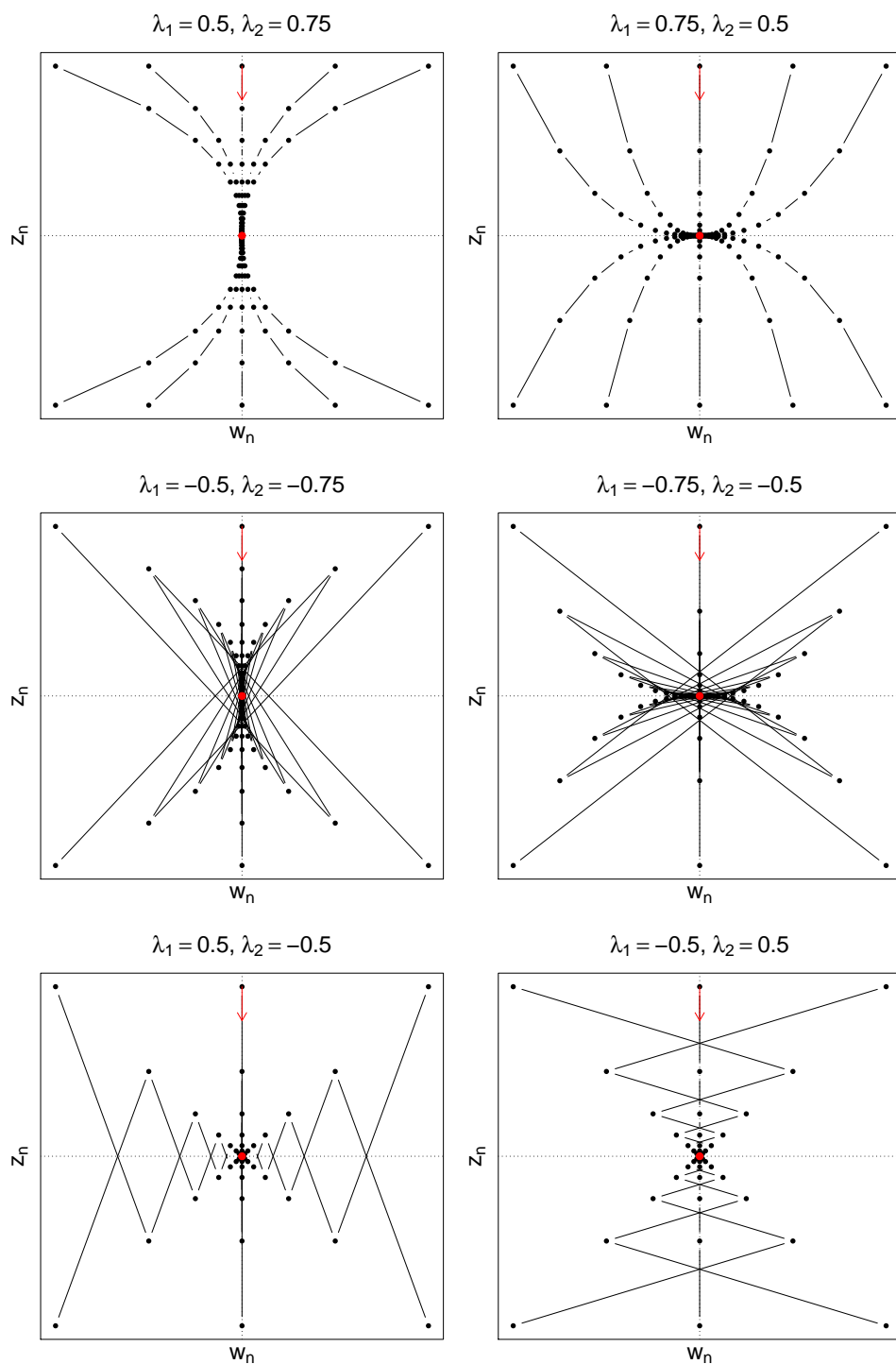
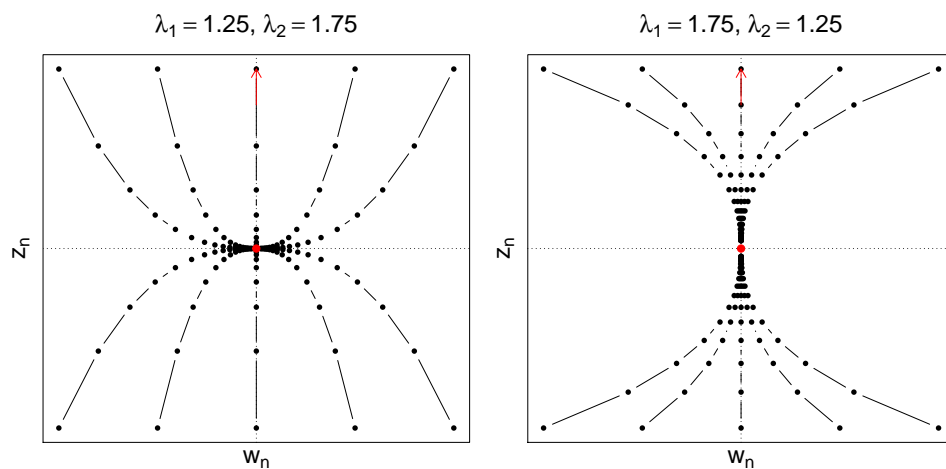
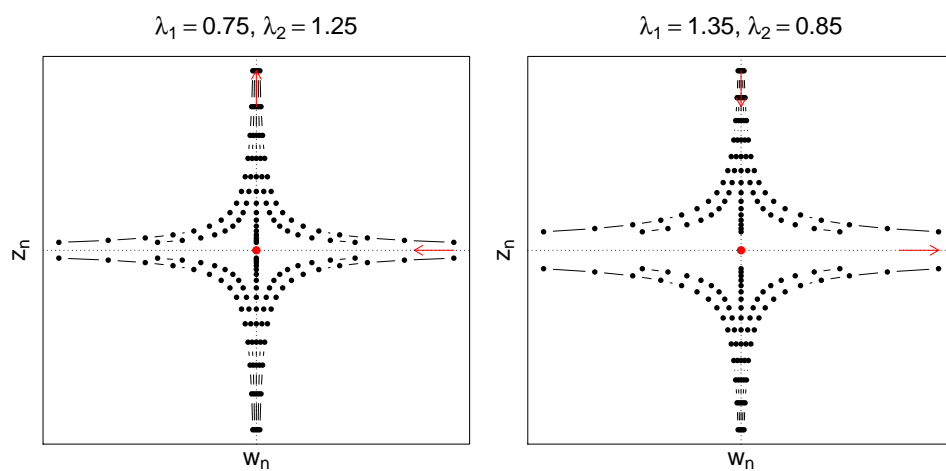
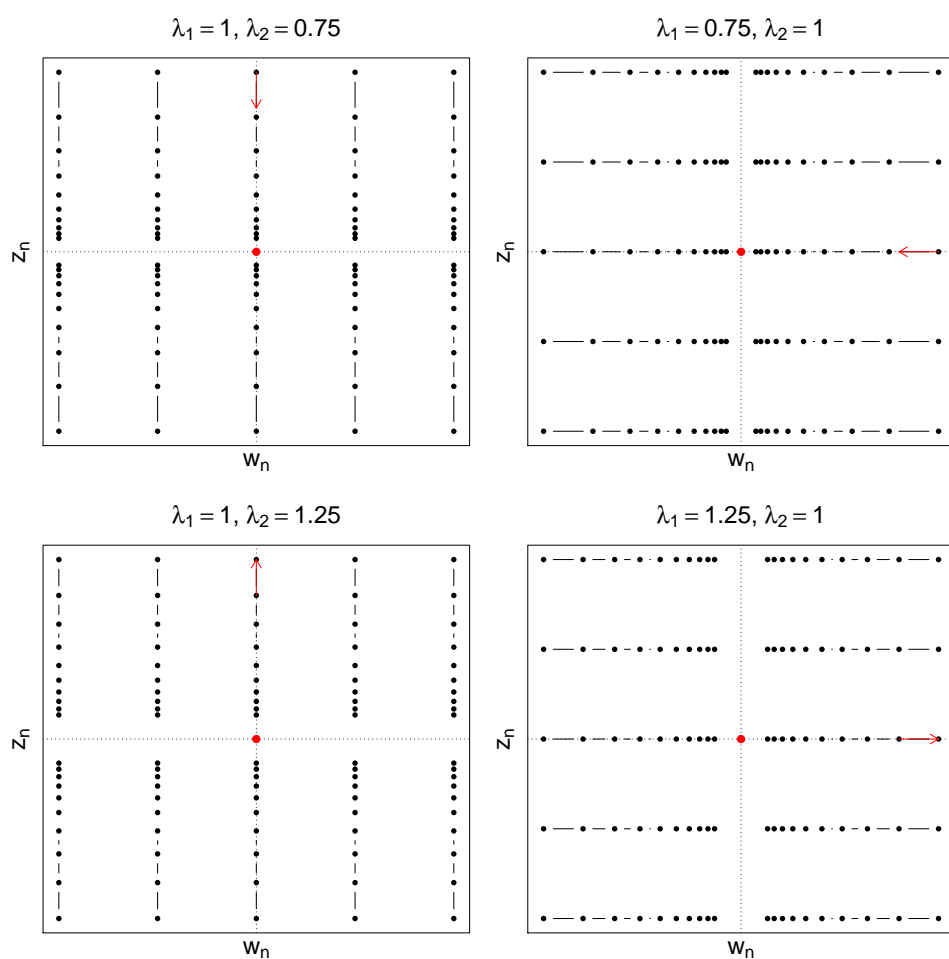


FIGURE 1 – Cas d'un point fixe origine qui est un nœud asymptotiquement stable.

FIGURE 2 – Cas d'un point fixe origine qui est un **nœud instable**.FIGURE 3 – Cas d'un point fixe origine de type **point selle**.

FIGURE 4 – Cas d'un point fixe origine de type **nœud dégénéré**.

Exemple : Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = 0.25x_n + y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} sont $\lambda_1 = \frac{1}{2} < 1$ et $\lambda_2 = \frac{3}{2} > 1$. On a donc un **point selle**.

Les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres sont $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(associé à λ_1) et $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (associé à λ_2).

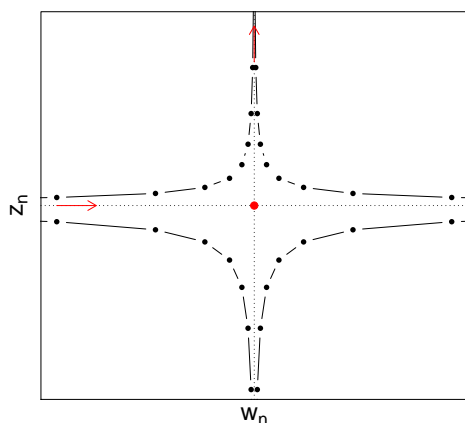
La matrice de passage est donc $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

La forme de Jordan associée à \mathbf{A} est $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Dans la base de Jordan, la solution est donc $\begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)^n w_0 \\ (3/2)^n z_0 \end{pmatrix}$, ce qui conduit à la solution finale :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = w_0 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} (1/2)^n + z_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (3/2)^n$$

Dans la base de Jordan



3.2 Cas où A admet une valeur propre double (A non diagonale)

On a $\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c|c} v_{01} & m_{21} \\ \hline v_{02} & m_{22} \end{array} \right)$ et $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

Dans la base de Jordan, on peut donc écrire :

$$\begin{pmatrix} w_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = \mathbf{J}^n \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & 2\lambda_0 \\ 0 & \lambda_0^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}^3 = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & 2\lambda_0 \\ 0 & \lambda_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^3 & 3\lambda_0^2 \\ 0 & \lambda_0^3 \end{pmatrix}$$

⋮

On a donc $\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda_0^n & n\lambda_0^{n-1} \\ 0 & \lambda_0^n \end{pmatrix}$

Ainsi, il vient $\begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^n & n\lambda_0^{n-1} \\ 0 & \lambda_0^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^n w_0 + n\lambda_0^{n-1} z_0 \\ \lambda_0^n z_0 \end{pmatrix}$

Finalement, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{01} & m_{21} \\ v_{02} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0^n w_0 + n\lambda_0^{n-1} z_0 \\ \lambda_0^n z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{01} (\lambda_0^n w_0 + n\lambda_0^{n-1} z_0) + m_{21} \lambda_0^n z_0 \\ v_{02} (\lambda_0^n w_0 + n\lambda_0^{n-1} z_0) + m_{22} \lambda_0^n z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (\lambda_0^n w_0 + n z_0) \begin{pmatrix} v_{01} \\ v_{02} \end{pmatrix} \lambda_0^{n-1} + z_0 \begin{pmatrix} m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix} \lambda_0^n$$

Remarque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\lambda_0^{n-1} = 0$ si $|\lambda_0| < 1$.

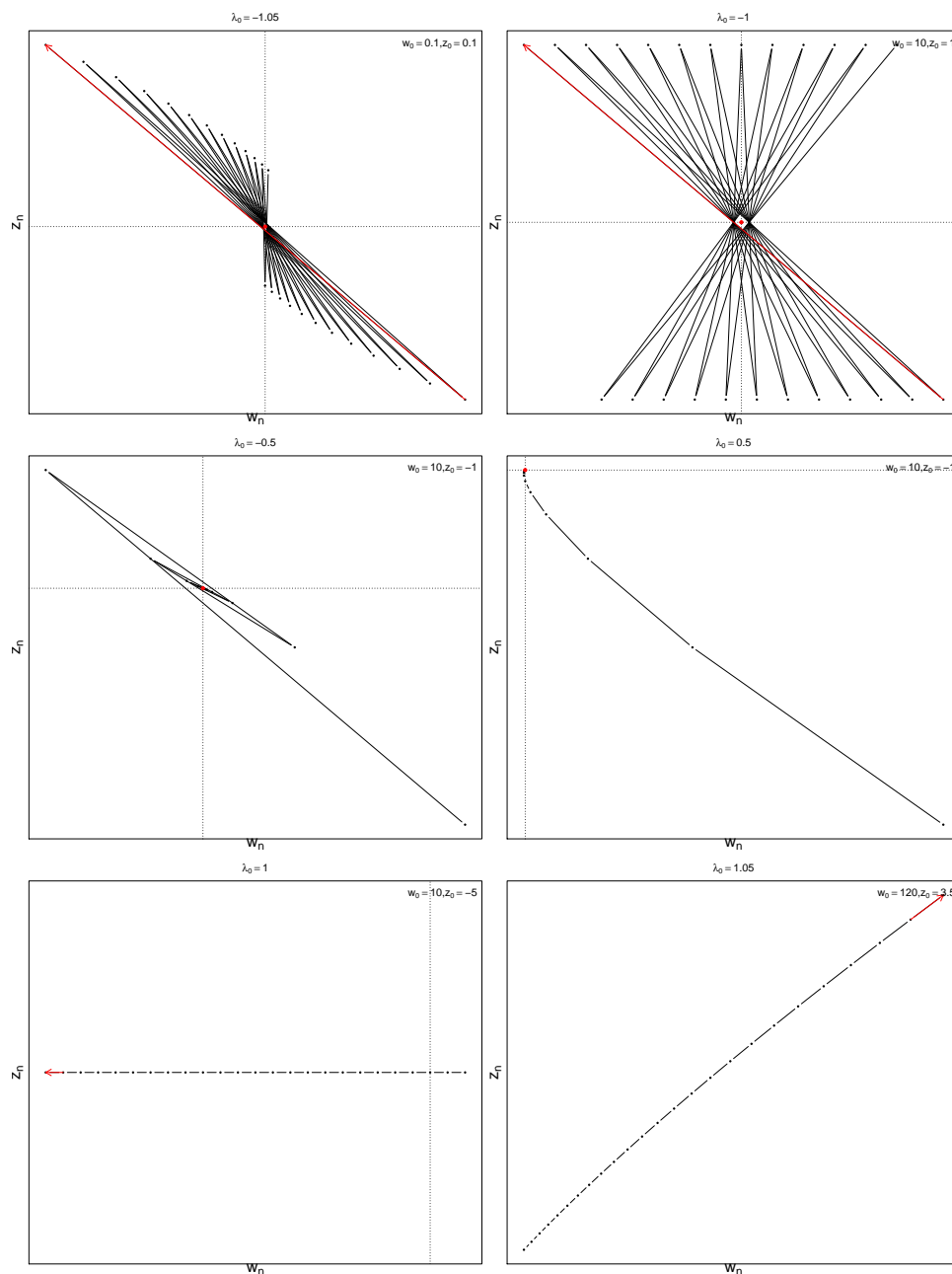


FIGURE 5 – Typologie des solutions d'un système récurrent linéaire dans \mathbb{R}^2 lorsque la matrice admet une valeur propre double et n'est pas diagonale.

3.3 Cas où \mathbf{A} admet deux valeurs propres complexes conjuguées

Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ avec $\vec{v}_{1,2} = \vec{a} \pm i\vec{b}$.

Alors $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $P = \left(\begin{array}{c|c} \vec{b} & \vec{a} \end{array} \right)$.

Dans la base de Jordan on a donc :

$$\begin{pmatrix} w_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Par mesure de simplification, mais surtout pour calculer \mathbf{J}^n , on utilise la notation des complexes en module et argument : $\lambda_1 = \rho(\cos \omega + i \sin \omega)$ et $\lambda_2 = \rho(\cos \omega - i \sin \omega)$. On

a les relations $\alpha = \rho \cos \omega$ et $\beta = \rho \sin \omega$, ainsi que $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et $\tan \omega = \frac{\beta}{\alpha}$.

$$\text{Ainsi, } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \omega & -\rho \sin \omega \\ \rho \sin \omega & \rho \cos \omega \end{pmatrix} = \rho R(\omega)$$

avec $R(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$ la matrice de rotation d'angle ω et de centre l'origine.

Pour trouver la solution du système dans la base de Jordan, on a besoin de \mathbf{J}^n :

$$\mathbf{J} = \rho R(\omega)$$

$$\mathbf{J}^2 = \rho R(\omega) \rho R(\omega) = \rho^2 R(2\omega)$$

⋮

$$\mathbf{J}^n = \rho^n R(n\omega)$$

En effet, concernant \mathbf{J}^2 , quand on compose deux rotations, on obtient une nouvelle rotation dont l'angle est la somme des deux composées.

$$\begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = \rho^n R(n\omega) \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \rho^n \begin{pmatrix} \cos n\omega & -\sin n\omega \\ \sin n\omega & \cos n\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \rho^n \begin{pmatrix} \cos n\omega w_0 - \sin n\omega z_0 \\ \sin n\omega w_0 + \cos n\omega z_0 \end{pmatrix}$$

Pour revenir aux coordonnées initiales, on utilise la relation $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} & \vec{a} \end{pmatrix} \rho^n \begin{pmatrix} \cos n\omega w_0 - \sin n\omega z_0 \\ \sin n\omega w_0 + \cos n\omega z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \rho^n [(\cos n\omega w_0 - \sin n\omega z_0) \vec{b} + (\sin n\omega w_0 + \cos n\omega z_0) \vec{a}]$$

Les termes en $\cos(n\omega)$ et $\sin(n\omega)$ sont responsables de la rotation dans le plan (x_n, y_n) , tandis que le terme ρ^n est responsable de l'évolution avec n de la distance au point $(0, 0)$.

Ainsi, la nature du point $(0, 0)$ dépend de la position de ρ par rapport à 1 ($\rho > 0$) :

- Si $\rho < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^n = 0$, on se rapproche de $(0, 0)$ en tournant autour : on a un **foyer asymptotiquement stable** ;
- Si $\rho > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^n = +\infty$, on s'éloigne de $(0, 0)$ en tournant autour : on a un **foyer instable** ;
- Si $\rho = 1$, alors $\forall n, \rho^n = 1$, on reste toujours à la même distance de $(0, 0)$ en tournant autour : on a des **centres**.

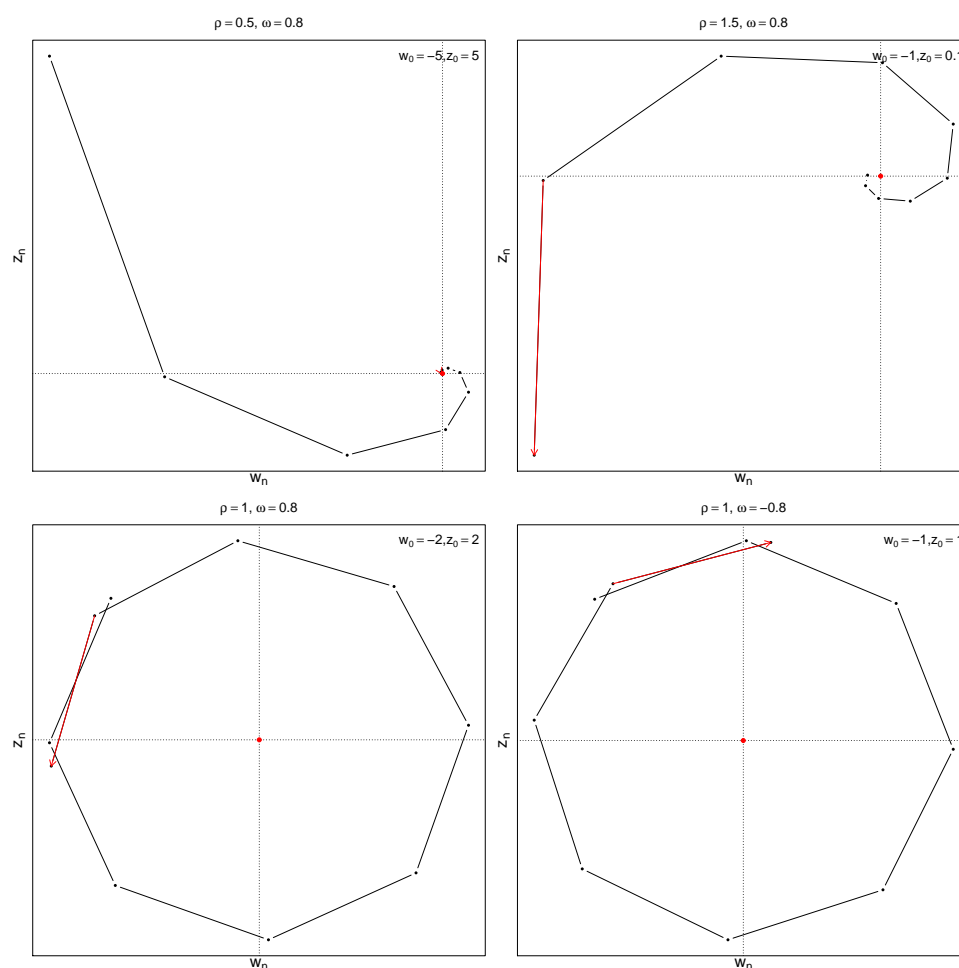


FIGURE 6 – Typologie des solutions d'un système récurrent linéaire dans \mathbb{R}^2 lorsque la matrice admet deux valeurs propres complexes conjuguées.

Exemple : Etudier le système $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$, donc $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs propres sont $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On calcule $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2$ et $\tan \omega = \sqrt{3} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3}$. On a donc $\rho > 1$, l'origine est un **foyer instable**.

Par conséquent :

$$\mathbf{J} = 2 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \text{ ce qui implique que } \mathbf{J}^n = 2^n \begin{pmatrix} \cos \left(n \frac{\pi}{3}\right) & -\sin \left(n \frac{\pi}{3}\right) \\ \sin \left(n \frac{\pi}{3}\right) & \cos \left(n \frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

Dans la base de Jordan, la solution s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = \mathbf{J}^n \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} \cos \left(n \frac{\pi}{3}\right) & -\sin \left(n \frac{\pi}{3}\right) \\ \sin \left(n \frac{\pi}{3}\right) & \cos \left(n \frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} w_0 \cos \left(n \frac{\pi}{3}\right) - z_0 \sin \left(n \frac{\pi}{3}\right) \\ w_0 \sin \left(n \frac{\pi}{3}\right) + z_0 \cos \left(n \frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

La solution finale du système est alors :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} w_n \\ z_n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \cos \left(n \frac{\pi}{3}\right) - z_0 \sin \left(n \frac{\pi}{3}\right) \\ w_0 \sin \left(n \frac{\pi}{3}\right) + z_0 \cos \left(n \frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} \sqrt{3}w_0 \sin \left(n \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}z_0 \cos \left(n \frac{\pi}{3}\right) \\ w_0 \cos \left(n \frac{\pi}{3}\right) - z_0 \sin \left(n \frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

Avec la condition initiale $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$, il vient $w_0 = 1$ et $z_0 = 1/\sqrt{3}$, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} \sqrt{3} \sin \left(n \frac{\pi}{3}\right) + \cos \left(n \frac{\pi}{3}\right) \\ \cos \left(n \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left(n \frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

4 La suite de Fibonacci ou la folle épopée des lapins

Ce problème est apparu pour la première fois en 1202 dans le “*Liber abaci*” (*Livre du calcul* ou *Livre de l’abaque*), un livre écrit par le célèbre mathématicien italien Leonardo de Pise, plus connu sous le nom de Leonardo Fibonacci (Figure 7, https://fr.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci). Fibonacci présente dans ce livre les chiffres arabes et le système d’écriture décimale positionnelle.



FIGURE 7 — Leonardo Fibonacci (v. 1175 à Pise - v. 1250) mathématicien italien.

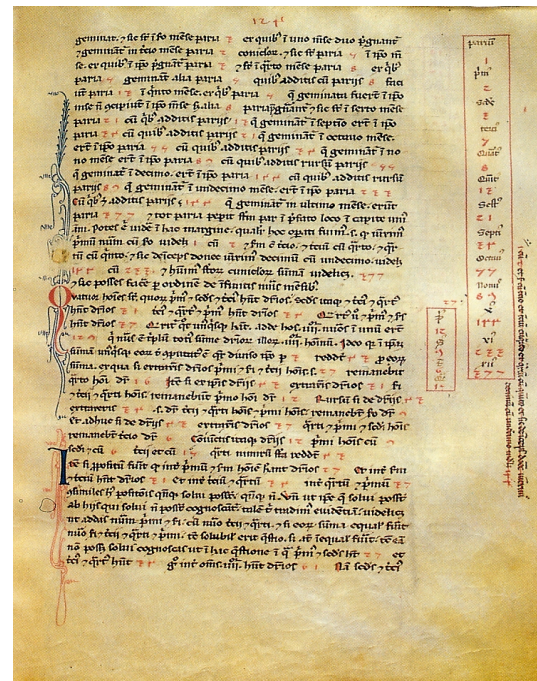


FIGURE 8 — Page 124 du *Liber abaci* de la bibliothèque nationale de Florence, décrivant la croissance d’une population de lapins et introduisant ainsi la suite de Fibonacci.

La suite de Fibonacci est définie de la manière suivante :

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \text{ avec } x_0 = 0 \text{ et } x_1 = 1$$

Les premiers termes de la suite sont donc :

$$0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

4.1 Énoncé

Supposons que tout couple de lapins se reproduit quand les lapins sont âgés de 2 mois, et que chaque fois la reproduction donne lieu à 1 couple de lapins. On suppose également que tous les lapins survivent. En partant d'un couple de lapins âgés de 1 mois à $n = 0$, combien y aura-t-il de couples d'adultes à la $n^{\text{ième}}$ génération ?

4.2 Solution

On se place en *post-breeding census*, c'est-à-dire que le pas de temps, égal à 1 mois, démarre juste après la reproduction (Table 1) ; ainsi, les jeunes de l'année deviennent adultes et se reproduisent cette même année.

	n	0	1	2	3	4	5
Nouveaux-nés		0	1	1	2	3	5
Jeunes	j_n	1	0	1	1	2	3
Adultes	a_n	0	1	1	2	3	5

TABLE 1 – Evolution au cours du temps des différentes catégories de lapins.

On peut représenter la dynamique de la population de lapins au moyen d'un graphe de cycle de vie (Figure 9).

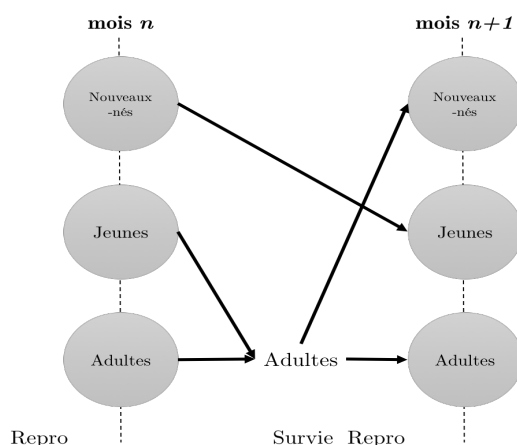


FIGURE 9 – Graphe de cycle de vie de la dynamique d'une population de lapins selon le modèle de Fibonacci.

On peut maintenant écrire le modèle mathématique :

$$\begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ j_n + a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} \text{ avec } j_0 = 1 \text{ et } a_0 = 0.$$

Remarque : Le lien avec la suite de Fibonacci est immédiat :

$$a_{n+2} = j_{n+1} + a_{n+1} = a_n + a_{n+1}.$$

Les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} sont $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, c'est-à-dire $\lambda_1 \simeq 1,6$ et $\lambda_2 \simeq -0,6$.

Le point fixe origine sera donc un **point selle**, avec divergence selon le premier vecteur propre et oscillations convergentes autour du second vecteur propre.

Les vecteurs propres de \mathbf{A} sont $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$, donc $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.

La forme de Jordan associée à \mathbf{A} est $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

$$\text{avec } \mathbf{P}^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

La solution finale est donc :

$$\begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = w_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + z_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

On ne s'intéresse en fait qu'à a_n , c'est-à-dire :

$$a_n = w_0 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + z_0 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Pour trouver w_0 et z_0 , on utilise la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \\ a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) \end{aligned}$$

Pour finir, lorsque $n \rightarrow +\infty$, $a_n \simeq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 0$.

Ainsi, pour n grand, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \simeq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarque : Le nombre $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$ est le **nombre d'or**, supposé représenter le rapport des longueurs des côtés du rectangle le plus esthétique aux yeux de l'homme. Il paraît que¹ :

- Le rapport de la hauteur de la pyramide de Khéops par sa demi-base est égal au nombre d'or ;
- La façade du Parthénon d'Athènes s'inscrit dans un rectangle doré, c'est-à-dire tel que le rapport de la longueur à la hauteur est égal au nombre d'or ;
- Les rapports "hauteur totale / distance sol-nombril" et "distance sol-nombril / distance nombril-sommet du crâne" sont égaux au nombre d'or ;
- ...



FIGURE 10 – La façade du Parthenon.

<http://images.math.cnrs.fr/Le-Nombre-d-or.html>

1. http://trucsmaths.free.fr/nombre_d_or.htm.

5 Les systèmes de Lindenmayer

Pavé (2012, p180) propose les systèmes de Lindenmayer comme modèles démographiques. Lindenmayer² a proposé une formalisation des règles de reproduction d'éléments biologiques qui a entre autres permis de modéliser l'évolution morphologique (ou morphogénèse) de systèmes ramifiés tels que les arbres (Figure 12).

On considère une population cellulaire dont on veut étudier la dynamique de population. On distingue dans la population deux catégories de cellules :

1. Des cellules jeunes et immatures, notées a , qui ne se divisent pas ;
2. Des cellules matures, notées b , susceptibles de se diviser.

On fait de plus les hypothèses suivantes :

- La reproduction a lieu à intervalles de temps discrets $1, 2, \dots, t$;
- D'un pas de temps à l'autre, les cellules a deviennent matures : $a \rightarrow b$ entre t et $t + 1$;
- Les cellules b se divisent, en un pas de temps, en une cellule a et une cellule b : $b \rightarrow ab$ entre t et $t + 1$.

Sur plusieurs pas de temps, **en partant d'une unique cellule a** , on peut alors construire le schéma d'accroissement de la population suivant :

$$a \rightarrow b \rightarrow ab \rightarrow bab \rightarrow abbab \rightarrow bababbab \rightarrow \dots$$

Soient $N_a(t)$ et $N_b(t)$ les nombres de cellules a et b au temps t . On peut alors établir la formule de récurrence suivante (Table 2) :

$$\begin{cases} N_a(t+1) = N_b(t) \\ N_b(t+1) = N_a(t) + N_b(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} N_a(t+1) \\ N_b(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_a(t) \\ N_b(t) \end{pmatrix}$$

On obtient la même matrice que pour la suite de Fibonacci.

2. Lindenmayer A. (1971) Developmental Systems without Cellular Interaction, their Language and Grammars. *Journal of Theoretical Biology*, 30, 455-484.

t	$N_a(t)$	$N_b(t)$	$N_a(t) + N_b(t)$
0	1	0	1
1	0	1	1
2	1	1	2
3	1	2	3
4	2	3	5
5	3	5	8
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

TABLE 2 – Table d'évolution des effectifs du modèle de Lindenmayer.

L'évolution de la population de cellules sera donc identique à celle de la population de lapins :

$$\begin{pmatrix} N_a(t) \\ N_b(t) \end{pmatrix} = w_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + z_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

Avec les conditions initiales $N_a(0) = 1$ et $N_b(0) = 0$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} N_a(t) \\ N_b(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

Lorsque t devient grand, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t = 0$ et :

$$\begin{pmatrix} N_a(t) \\ N_b(t) \end{pmatrix} \simeq -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

On en tire immédiatement que, lorsque t est grand, $\frac{N_b(t)}{N_a(t)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$, le nombre d'or.

Numériquement, on confirme les résultats précédents :

$$\begin{pmatrix} N_a(t) \\ N_b(t) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.276 \\ 0.447 \end{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t = (0.276 + 0.447) \begin{pmatrix} 0.382 \\ 0.618 \end{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t = 0.723 \begin{pmatrix} 0.382 \\ 0.618 \end{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

- Le vecteur $\begin{pmatrix} 0.382 \\ 0.618 \end{pmatrix}$ contient les proportions relatives des cellules a et b lorsque t est grand : 38.2% de cellules a et 61.8% de cellules b ;

- Ces proportions relatives restent inchangées, \forall les conditions initiales ;
- Le rapport $\frac{0.618}{0.382}$ est égal au nombre d'or.

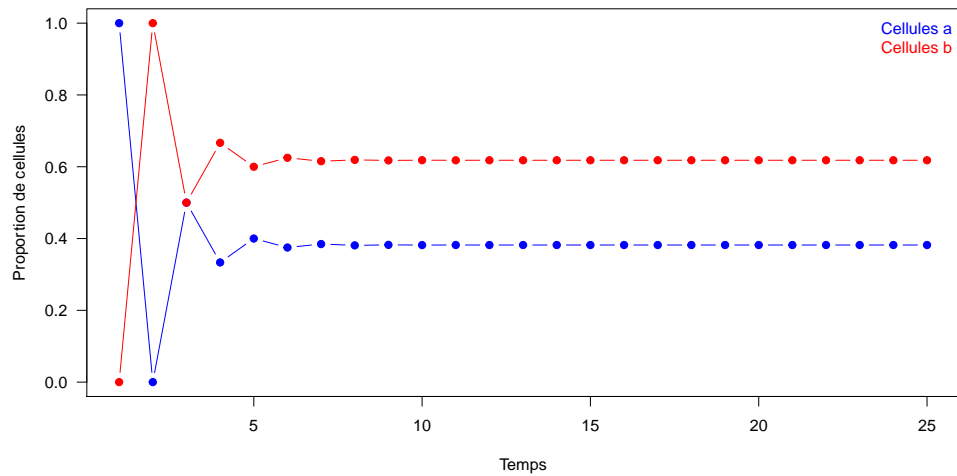


FIGURE 11 – Evolution de la proportion de cellules dans un système de Lindenmayer en dimension 2.



FIGURE 12 – Mauvaises herbes générées par un système de Lindenmayer en trois dimensions.

<https://fr.wikipedia.org/wiki/L-System>

6 Evolution d'une population de bouquetins du "Grand Paradis"

Cet exemple, présenté dans Pavé (2012, p192), montre l'utilisation des modèles récurrents linéaires dans \mathbb{R}^2 pour la modélisation de la dynamique d'une population naturelle de bouquetins du "Grand Paradis". Il est tiré de Lebreton et Millier (1982)³. La biologie connue de cette espèce suggère les règles de fonctionnement simplifiées suivantes :

1. Un jeune animal devient adulte deux ans après sa naissance ; si c'est une femelle, il peut alors donner naissance à un jeune cette même année ;
2. Une femelle adulte produit un et un seul animal tous les deux ans ;
3. Le sex-ratio est supposé égal à 1 (*i.e.*, un animal jeune est une femelle avec une probabilité de 0.5) ;
4. On note p la probabilité annuelle de survie d'un animal (jeune ou adulte).

On désigne par J_t le nombre d'individus jeunes au temps t et par A_t le nombre de **femelles** adultes au temps t ; on ne tient compte ici que des femelles : ce sont elles qui assurent la dynamique de la population s'il y a au moins un mâle. De plus, le pas de temps dicté par la biologie est d'une durée de **2 ans**.

On se place en *post-breeding census*, c'est-à-dire que sur la durée d'un pas de temps il y aura d'abord survie puis reproduction (si celle-ci peut avoir lieu). Ainsi, les jeunes d'une année se reproduisent cette même année. On peut schématiser le fonctionnement de cette population comme le montre la Figure 13.

Si on fait le bilan sur un intervalle de temps de 2 ans, on peut écrire le modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} J_{t+2} = \frac{p^2}{2} J_t + p^2 A_t \\ A_{t+2} = \frac{p^2}{2} J_t + p^2 A_t \end{cases}$$

3. Lebreton J.-D. et Millier C. (1982) *Modèles Dynamiques Déterministes en Biologie*. Masson (eds.), Paris.

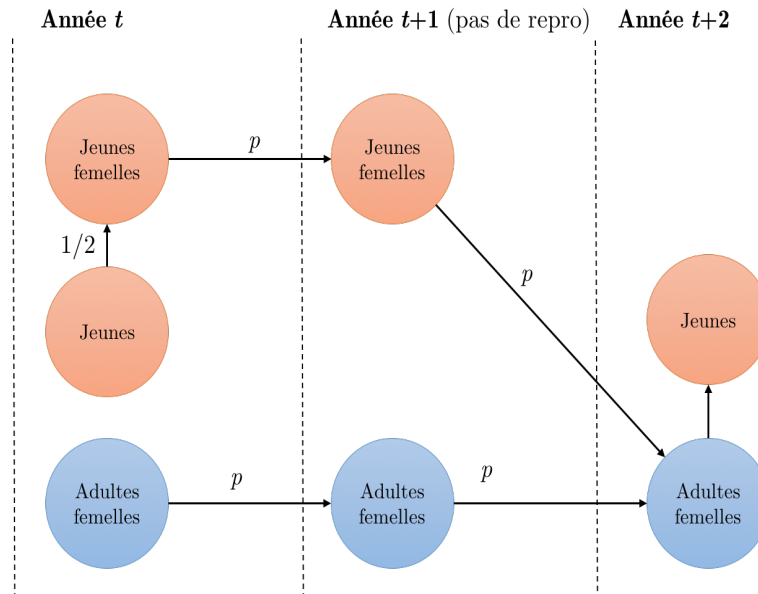


FIGURE 13 – Schéma fonctionnel de l'évolution démographique de la population de bouquetins.

En posant $\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} J_t \\ A_t \end{pmatrix}$, il vient :

$$\mathbf{X}_{t+2} = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2} & p^2 \\ \frac{p^2}{2} & p^2 \end{pmatrix} \mathbf{X}_t = p^2 \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}_t$$

Soit N_t le nombre total d'individus au temps t . On a alors $N_t = J_t + 2A_t$.

Compte-tenu de ce qui précède, on peut écrire :

$$N_{t+2} = J_{t+2} + A_{t+2}$$

$$N_{t+2} = p^2 ((0.5J_t + A_t) + 2(0.5J_t + A_t)) = p^2 (1.5J_t + 3A_t)$$

$$N_{t+2} = \frac{3}{2}p^2 (J_t + 2A_t) = \frac{3}{2}p^2 N_t$$

La croissance de la population des bouquetins du Grand Paradis est donc de type exponentiel avec un taux $\lambda = \frac{3}{2}p^2$. Il y aura effectivement croissance si $\frac{3}{2}p^2 > 1$, c'est-à-dire si $p > \sqrt{\frac{2}{3}}$, soit $p > 0.82$.

Assurer la conservation de la population nécessite donc que $p \simeq 0.82$, soit 82% de survie chaque année pour tous les individus, ce qui semble plausible biologiquement d'après l'ONCSF⁴.

4. <http://www.oncfs.gouv.fr/Connaitre-les-especes-ru73/Le-Bouquetin-des-Alpes-ar1527>

7 Propagation d'une plante annuelle

L'objectif ici est de développer un modèle mathématique qui permette de connaître le nombre de plantes à une génération n quelconque.

Les plantes produisent des graines à la fin de leur période de croissance, lorsqu'elles arrivent à maturité (**en août** généralement); après quoi elles meurent. Seule une fraction de ces graines passe l'hiver, et celles qui survivent germent au début de la saison **en mai** pour donner naissance à une nouvelle génération de plante. Certaines graines peuvent ne germer que l'année suivante; on distingue donc les graines d'une année et les graines de deux années.

On désigne par :

- γ , le nombre de graines produites par plante en août ;
- α , la fraction de graines d'une année qui germent en mai ;
- β , la fraction de graines de deux années qui germent en mai ;
- σ , la fraction de graines qui passe un hiver.

L'ensemble du processus peut se schématiser comme sur la Figure 14.

Si on note p_n le nombre de plantes à la génération n , on peut alors écrire :

$$p_n = \begin{pmatrix} \text{plantes issues} \\ \text{des graines} \\ \text{d'une année} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{plantes issues} \\ \text{des graines} \\ \text{de deux années} \end{pmatrix}$$

$p_n = \alpha s_{1,n} + \beta s_{2,n}$ avec $s_{1,n}$ et $s_{2,n}$ les nombres de graines de une et de deux années en avril à la génération n (avant la germination). On place ici le pas de temps annuel juste avant la germination en avril.

Le fait que certaines graines restent après la germination peut se traduire par :

$$\text{graines restantes} = \begin{pmatrix} \text{fraction} \\ \text{de graines} \\ \text{non germées} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{nombre initial} \\ \text{de graines} \\ \text{en avril} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{s}_{1,n} = (1 - \alpha) s_{1,n} \text{ et } \tilde{s}_{2,n} = (1 - \beta) s_{2,n}$$

avec $\tilde{s}_{1,n}$ et $\tilde{s}_{2,n}$ les nombres de graines de une et deux années *restant* en mai après que certaines ont germé, c'est-à-dire le nombre de graines non germées à la génération n .

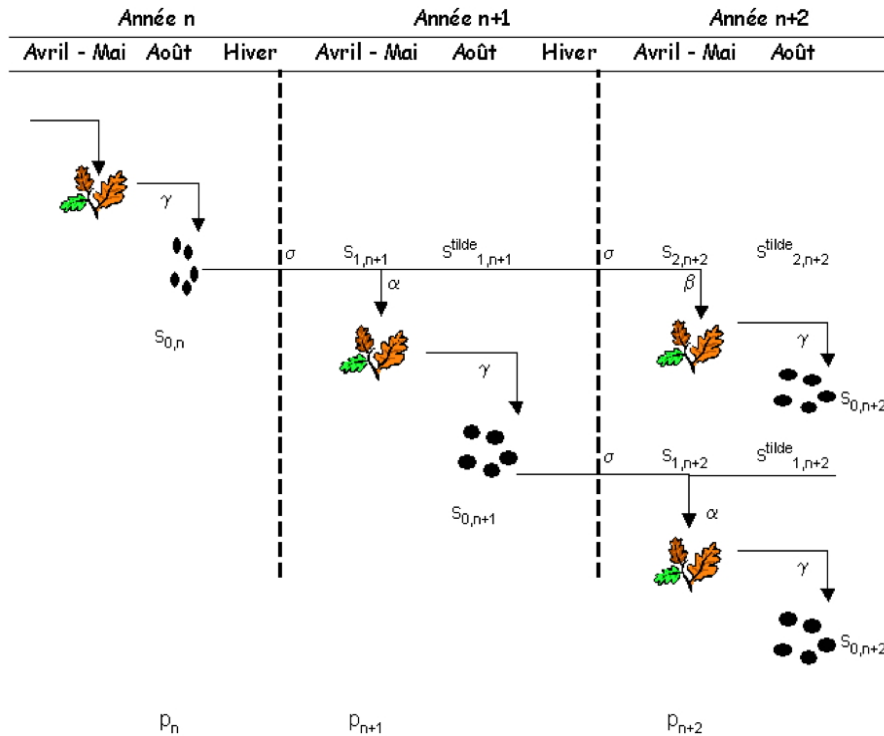


FIGURE 14 – Schéma fonctionnel de la propagation d'une plante annuelle.

Le nombre de nouvelles graines produites à la génération n est fonction du nombre de plantes :

$$s_{0,n} = \gamma p_n$$

Après l'hiver, ces graines, nouvelles à la génération n , deviennent des graines d'une année à la génération suivante $n + 1$ et il en reste une fraction σ :

$$s_{1,n+1} = \sigma s_{0,n} = \sigma \gamma p_n$$

De manière analogue, on peut écrire :

$$s_{2,n+1} = \sigma \tilde{s}_{1,n} = \sigma (1 - \alpha) s_{1,n} = \sigma^2 \gamma (1 - \alpha) p_{n-1}$$

En remplaçant les deux dernières relations, dans l'expression de p_n , il vient :

$$p_{n+1} = \alpha \sigma \gamma p_n + \beta \sigma^2 \gamma (1 - \alpha) p_{n-1}$$

Pour résoudre cette équation selon le formalisme des systèmes récurrents linéaires, on pose

$x_n = p_n$ et $y_n = p_{n-1}$. Ainsi :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha\sigma\gamma x_n + \beta\sigma^2\gamma(1-\alpha)y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_n$$

avec $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha\sigma\gamma & \beta\sigma^2\gamma(1-\alpha) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de \mathbf{A} sont solutions de :

$$\lambda^2 - \alpha\sigma\gamma\lambda - \beta\sigma^2\gamma(1-\alpha) = 0$$

$$\Delta = (\alpha\sigma\gamma)^2 + 4\beta\sigma^2\gamma(1-\alpha) = (\alpha\sigma\gamma)^2 \left(1 + \frac{4\beta(1-\alpha)}{\alpha^2\gamma}\right) > 0$$

Il y a donc deux valeurs propres réelles distinctes :

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\sigma\gamma}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\alpha^2\gamma}(1-\alpha)}\right)$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha\sigma\gamma}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\alpha^2\gamma}(1-\alpha)}\right)$$

On constate que $\lambda_1 > 0$ et que $\lambda_2 < 0$ car $1 - \alpha > 0$. Par conséquent, il y aura croissance de la population de plantes annuelles si et seulement si $\lambda_1 > 1$, c'est-à-dire :

$$\frac{\alpha\sigma\gamma}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\alpha^2\gamma}(1-\alpha)}\right) > 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\alpha^2\gamma}(1-\alpha)} > \frac{2}{\alpha\sigma\gamma} - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{4\beta}{\alpha^2\gamma}(1-\alpha) > \left(\frac{2}{\alpha\sigma\gamma} - 1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{4\beta}{\alpha^2\gamma}(1-\alpha) > \frac{4}{(\alpha\sigma\gamma)^2} - \frac{4}{\alpha\sigma\gamma} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\beta}{\alpha^2\gamma}(1-\alpha) > \frac{4}{(\alpha\sigma\gamma)^2} - \frac{4}{\alpha\sigma\gamma}$$

On multiplie tout par $\alpha\sigma\gamma$ et on divise par 4

$$\Leftrightarrow \beta\sigma^2\gamma(1-\alpha) > 1 - \alpha\sigma\gamma$$

$$\Leftrightarrow \beta\sigma^2\gamma(1-\alpha) + \alpha\sigma\gamma > 1$$

Si on suppose que $\beta = 0$, ce qui revient à supposer qu'aucune graine de deux années ne germe en mai, il vient la condition $\alpha\sigma\gamma > 1$. Sans plus d'informations biologiques, il est impossible d'aller plus loin.