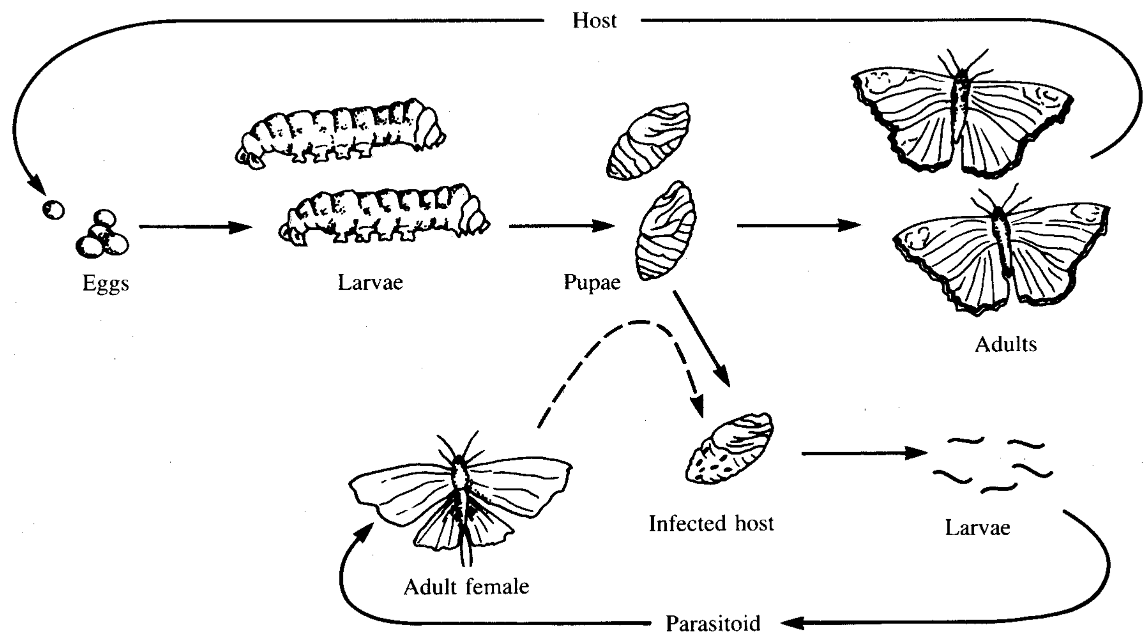
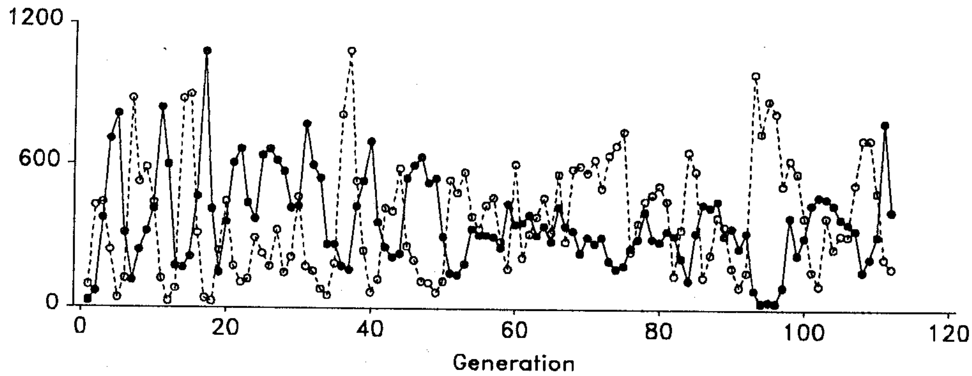
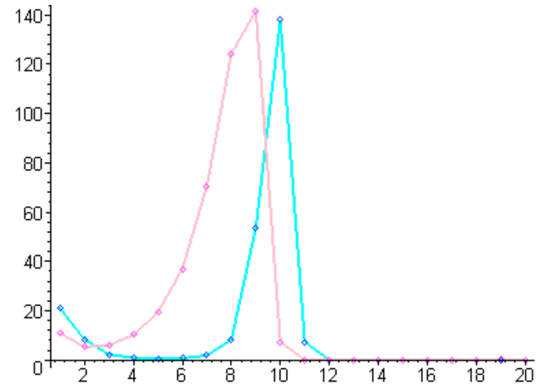
Chapitre 3



Représentation schématique d'un système hôte-parasitoïde. La femelle adulte dépose des œufs dans ou sur la larve ou la pupe de l'hôte. L'hôte infecté meure, donnant naissance à jeune parasitoïde. Les hôtes non infectés deviennent des adultes et poursuivent leur cycle.

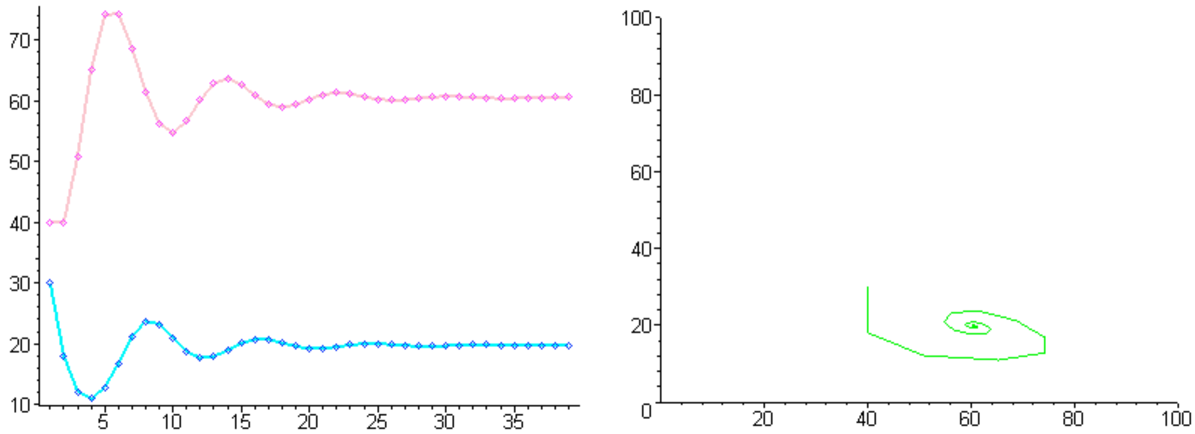


Évolution dans le temps des densités de la guêpe parasisoïde (ligne pleine) et de son hôte le charançon du haricot azuki (ligne pointillée) ; d'après Utida, 1957.

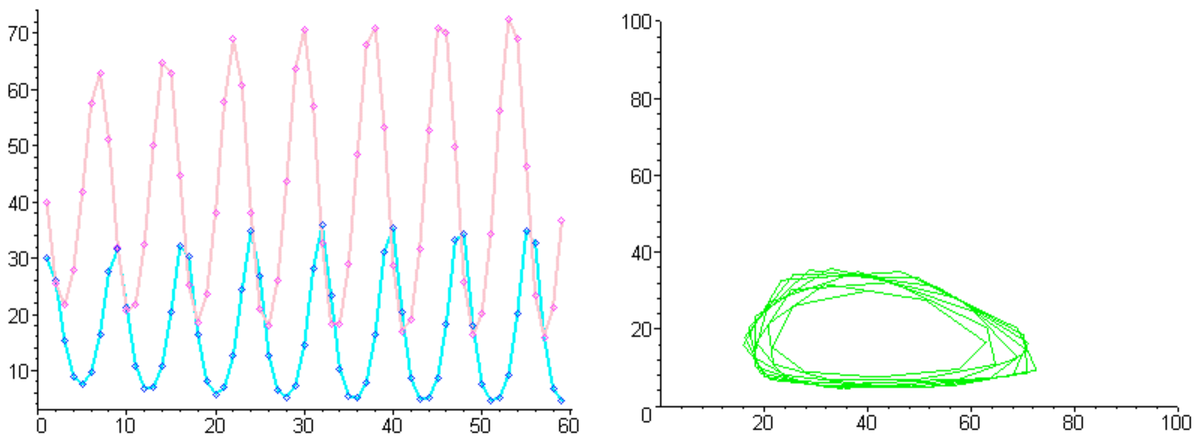


Oscillation divergentes du modèle de Nicholson-Bailey.

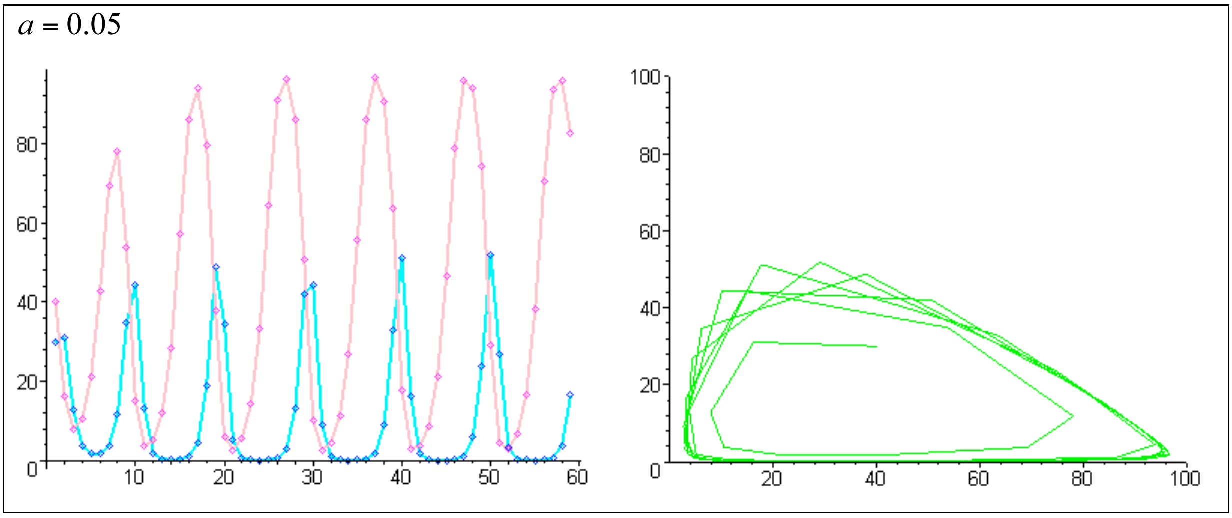
$a = 0.02$



$a = 0.035$



2



Données simulées à partir du modèle de Nicholson-Bailey avec une croissance logistique discrète de la population des hôtes. Les simulations montrent les chroniques et les trajectoires dans le plan de phase pour différentes valeurs du paramètre a. Pour chaque figure, les hôtes sont représentés par la ligne et les points roses ; les parasitoïdes sont représentés par la ligne et les points bleus.

Interaction plantes-herbivores

Hypothèses

1. Les herbivores ont des générations discrètes qui correspondent à la saisonnalité de la végétation.
2. La disponibilité de la végétation et la densité de population courante des herbivores sont les principaux facteurs qui déterminent la fécondité et la survie des herbivores.
3. L'abondance de la végétation dépend d'une part de l'ampleur de l'herbivorie à laquelle sont soumises les plantes à la saison précédente, d'autre part la précédente biomasse de la végétation.

Considérons les deux variables suivantes :

v_n = biomasse de la végétation à la génération n.

h_n = nombre d'herbivores à la génération n.

Prenons le modèle suivant :

$$\begin{cases} v_{n+1} = f\, v_n\, e^{-a h_n} \\ h_{n+1} = r h_n \left(\delta - \dfrac{h_n}{v_n} \right) \end{cases}$$

où les paramètres f, a, r, δ sont des constantes strictement positives.

Enoncé

(a) Trouver les points fixes $\bar{v}$ et $\bar{h}$ du système.

Que se passe-t-il si $f = 1$?

Quelles restrictions doivent être émises sur les paramètres pour obtenir un point fixe raisonnable biologiquement ?

(b) Montrer qu'en normalisant les équations, il est possible de réduire le nombre de paramètres. Pour cela, définir :

$$V_n = v_n / \bar{v}, \quad H_n = h_n / \bar{h}$$

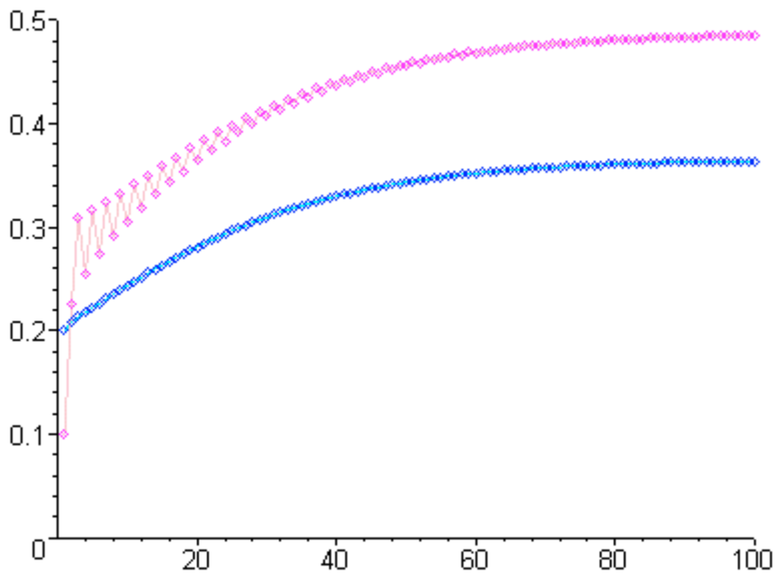
Montrer que le système d'équations peut alors être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} V_{n+1} = V_n \exp k\left(1 - H_n\right) \\ H_{n+1} = bH_n\left(1 + \frac{1}{b} - \frac{H_n}{V_n}\right) \end{cases}$$

Quelles relations existe-t-il entre b, k et les quatre paramètres f, a, r, δ ?

(c) Montrer que le système de la question (b) possède le point fixe $V^* = H^* = 1$.

(d) Etudier la stabilité locale du point fixe $V^* = H^* = 1$.



La loi de Hardy-Weinberg

Enoncé

Dans les problèmes de génétique, on adopte couramment les notations suivantes pour les fréquences des allèles A et a à la $n^{\text{ième}}$ génération :

p = fréquence de l'allèle A = $\dfrac{\text{nombre total d'allèles A}}{2\text{N}}$

q = fréquence de l'allèle a = $\dfrac{\text{nombre total d'allèles a}}{2\text{N}}$

où $p + q = 1$, et N = la taille de la population.

On fait les hypothèses suivantes :

1. Les croisements se font aléatoirement.
2. Il n'y a pas de variation dans le nombre de descendants des parents des différents génotypes.
3. Les descendants ont des fitness identiques (mêmes probabilités de survie).
4. Il n'y a jamais de mutations.

On définit alors les fréquences des génotypes AA, aA et aa dans une population donnée :

u = fréquence du génotype AA,

v = fréquence du génotype aA,

w = fréquence du génotype aa,

Alors $u + v + w = 1$. Et puisque aA est équivalent à Aa, il est clair que :

$$p = u + \frac{1}{2}v$$
$$q = \frac{1}{2}v + w$$

Le pas suivant consiste à calculer la probabilité que les parents de génotypes particuliers se croisent. Si les croisements sont aléatoires, la probabilité de croisement dépend seulement de la probabilité de rencontre. Celle-ci dépend à son tour du produit des fréquences des deux parents. La table des croisements suivante, à compléter, résume ces probabilités.

			Pères		
Génotypes			AA	Aa	aa
		fréquence %	u	v	w
Mères	AA	u	u^2	uv	uw
	Aa	v	_	v^2	_
	aa	w	_	_	_

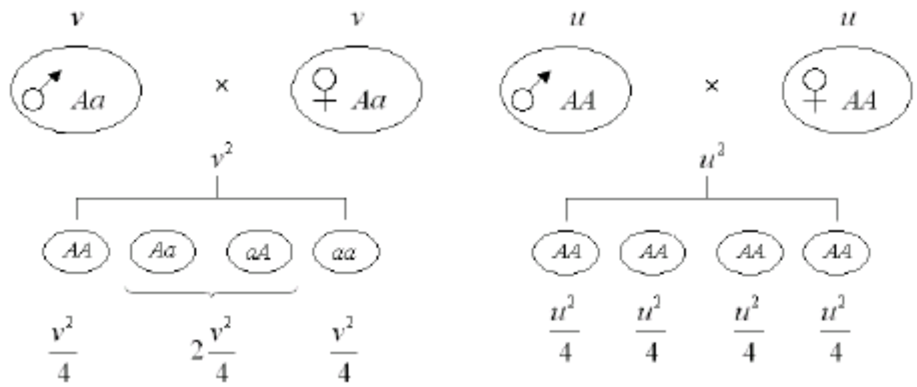
En se basant sur les probabilités de croisement, on peut déterminer la probabilité qu'un croisement donné résulte en un descendant de génotype donné. Pour cela, il faut prendre en compte les quatre combinaisons possibles d'allèles qui dérivent d'une paire de parents donnée. La Figure suivante montre ce qu'il se passe dans le cas de deux parents hétérozygotes ou dans le cas de deux parents homozygotes.

Type des parents

%

Descendants

%



La table des descendants peut alors être construite, et permet de résumer l'information :

Type des parents	Fréquence	Fréquences des génotypes des descendants: AA	aA	aa
AA x AA	u^2	u^2	_	_
AA x Aa	$2uv$	uv	uv	_
AA x aa	_	0	_	_
Aa x Aa	v^2	$v^2/4$	$v^2/2$	$v^2/4$
Aa x aa	_	0	_	_
aa x aa	_	0	_	_
	Total	$\left(u^2+uv+v^2/4\right)$	_	_

(a) Compléter la table des croisements.

(b) Tracer un diagramme similaire à celui de la Figure pour des croisements de parents de type AA x aa et Aa x AA.

(c) Compléter la table des fréquences des génotypes des descendants.

(d) Écrire le système d'équations qui régit les fréquences cumulatives des génotypes AA, Aa, et aa chez les descendants (variables u_{n+1}, v_{n+1} et w_{n+1}).

(e) Montrer que $u_{n+1}+v_{n+1}+w_{n+1}=1$, c'est-à-dire que $\forall n$, u,v,w ont une somme égale à 1.

(f) Supposons que $\left(u^*,v^*,w^*\right)$ est le point fixe du système d'équations de la question (d). En utilisant l'information obtenue à la question (e), montrer que

$$u^* = v^{*2}/4w^*$$

(g) Puisque w_{n+1} est relié à u_{n+1} et v_{n+1} (ainsi que w_n à u_n et v_n) par l'identité de la question (e), on peut éliminer une variable des trois équations déterminées à la question (d). Réécrire ces équations en termes de u_n et v_n.

(h) En déduire que

$$u_{n+1} = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2$$
$$v_{n+1} = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)\left[2-2\left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)\right]$$

(i) Montrer maintenant que

$$\left(u_{n+1} + \frac{1}{2}v_{n+1}\right) = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)$$

(j) Montrer que le résultat précédent implique que p et q ne changent pas d'une génération à l'autre, c'est-à-dire que

$$q_{n+1} = q_n, \qquad p_{n+1} = p_n$$

Note : On peut utiliser le fait que $p^2+2pq+q^2=1$.

L'équation logistique de Pielou

Enoncé

Le modèle de Pielou décrit l'évolution de la dynamique d'une population isolée avec l'équation suivante :

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1+\beta x_n} \text{ avec } \alpha > 1 \text{ et } \beta > 0$$

On peut par ailleurs supposer qu'il existe un délai d'une unité de temps dans la réponse du taux de croissance par individu, à un changement de densité. Ainsi :

$$y_{n+1} = \frac{\alpha y_n}{1+\beta y_{n-1}} \qquad \text{(E)}$$

Cette équation est par exemple utilisée pour modéliser la dynamique des populations de la **mouche bleue** (*Lucilia cuprina*).

The Blowfly is more commonly known as a ***blue bottle***, it's a very troublesome fly. In hot weather it's especially troublesome because they lay their eggs (it's a natural habit). It's eggs are laid on any gone off food or meat it can get to.

http://www.roberth.u-net.com/image63.htm