# Biomathématiques 1
# Modélisation par EDO en Science la Vie
## Modèles dans $\mathbb{R}^2$

**Sandrine CHARLES & Laurent PUJO MENJOUET**
sandrine.charles@univ-lyon1.fr
pujo@math.univ-lyon1.fr

D'après un document de Sylvain MOUSSET
-
Université Claude Bernard Lyon 1 – France

13 décembre 2020

# Table des matières

# Plan détaillé

Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

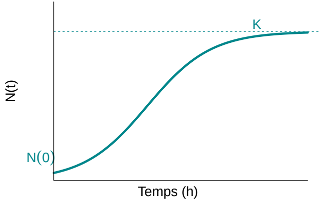
- Les équations du modèle
- Portrait de phase
- Définitions

# Le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

## En l'absence d'interaction

### Les proies $N$

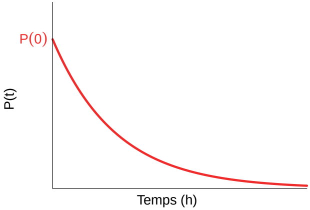
- croissance logistique, paramètres $r$ et $K$.




$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

### Les prédateurs $P$

- décroissance exponentielle, paramètre $\mu$.




$$\frac{dP}{dt} = -\mu P$$

# Le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

## Avec les interactions proies-prédateurs

Si les déplacements de proies et prédateurs se font au hasard, alors le nombre de rencontres entre proies et prédateurs est proportionnel au produit $NP$.

### Les proies $N$

- Consommation à la vitesse $\alpha NP$.
- $\alpha$ caractérise l'efficacité des attaques des prédateurs.

### Les prédateurs

- Reproduction à la vitesse $\beta NP$.
- $\beta$ caractérise le rendement des attaques en termes de reproduction des prédateurs.

# Le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

## Les équations du modèle

On a le système de deux EDO du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN\left(1-\dfrac{N}{K}\right) - \alpha NP \\ \dfrac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

avec les variables $N(t)$ et $P(t)$.

Dans le plan $(N,P)$, on peut étudier le signe de $\dfrac{dN}{dt}$ et $\dfrac{dP}{dt}$, et donc les variations de $N(t)$ et $P(t)$.

C'est ce qu'on appelle le **portrait de phase**.

# Plan détaillé

# Portrait de phase

## Signe de $\dfrac{dN}{dt}$

L'évolution du nombre de proies dépend du signe de $\dfrac{dN}{dt}$ :

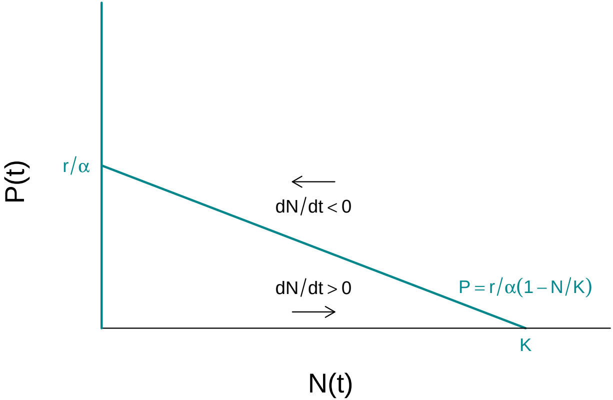
$\frac{dN}{dt} = rN(1-\frac{N}{K}) - \alpha NP$ avec $N, P > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad rN\left(1-\frac{N}{K}\right) - \alpha NP > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad N\left(r - \frac{rN}{K} - \alpha P\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad P < \frac{r}{\alpha}\left(1-\frac{N}{K}\right)
\end{aligned}$$

$\dfrac{dN}{dt} = 0$ pour $N = 0$ et $P = \dfrac{r}{\alpha}\left(1-\dfrac{N}{K}\right)$.

# Portrait de phase

## Signe de $\dfrac{dN}{dt}$



# Portrait de phase

## Signe de $\frac{dP}{dt}$

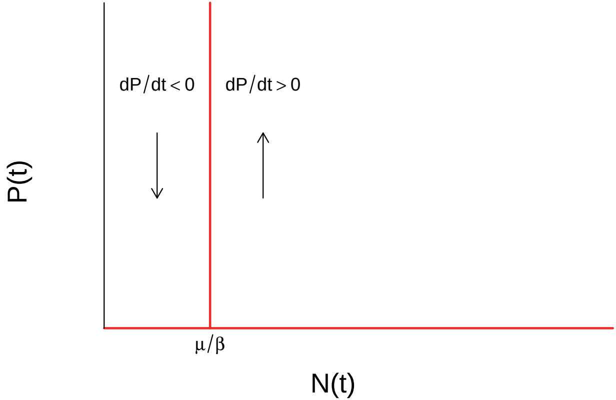
L'évolution du nombre de prédateurs dépend du signe de $\frac{dP}{dt}$ :
$\frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP$ avec $N, P > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} > 0 \quad & \Leftrightarrow \quad -\mu P + \beta NP > 0 \\ & \Leftrightarrow \quad P\left(\beta N - \mu\right) > 0 \\ & \Leftrightarrow \quad N > \frac{\mu}{\beta} \end{aligned}$$

$\frac{dP}{dt} = 0$ pour $P = 0$ et $N = \frac{\mu}{\beta}$.

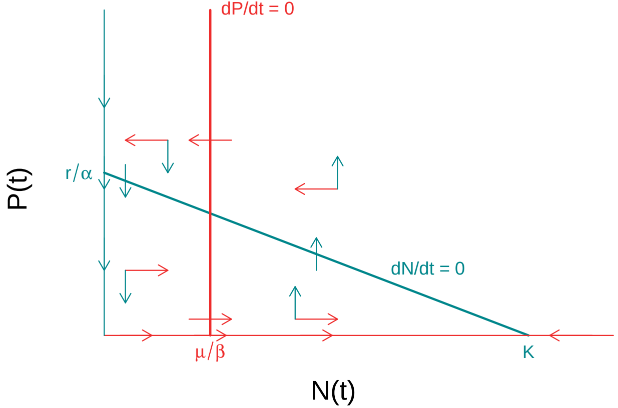
# Portrait de phase

## Signe de $\dfrac{dP}{dt}$



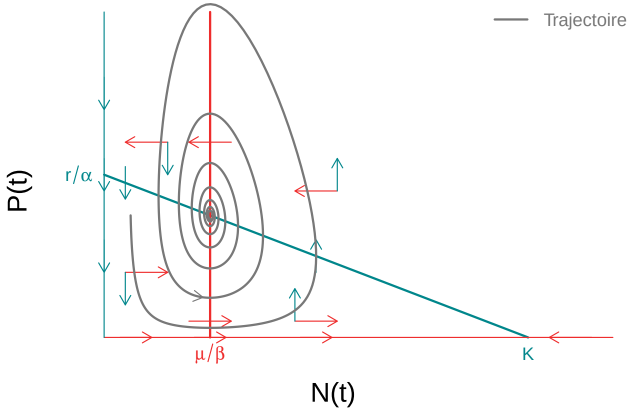
# Portrait de phase

## Vecteurs vitesse : on combine l'information

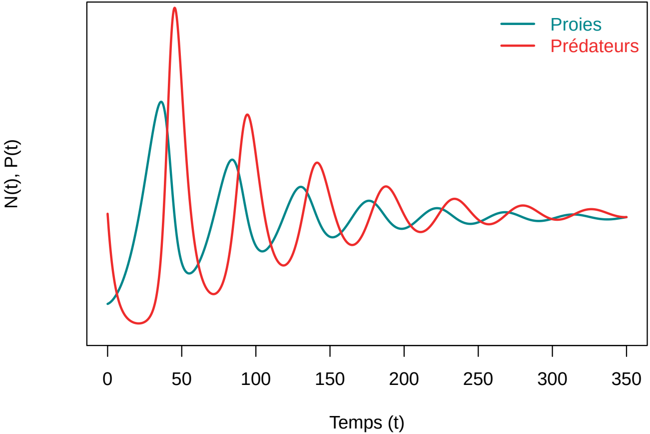


# Portrait de phase

## Dynamique du système



# Chroniques



# Plan détaillé

Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

- Les équations du modèle
- Portrait de phase
- Définitions

# Point d'équilibre

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & g(x,y) \end{cases}$$

avec $x(t)$ et $y(t)$ les variables.
Un point d'équilibre de ce système est un point $(x^\star, y^\star)$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=x^\star, y=y^\star} & = & f(x^\star, y^\star) = 0 \\ \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{x=x^\star, y=y^\star} & = & g(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases}$$

# Portrait de phase

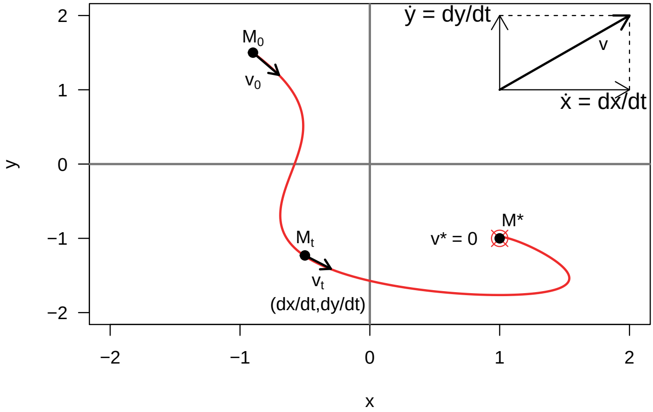
Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & g(x,y) \end{cases}$$

- On appelle **plan de phase** le plan $(x,y)$ ;
- La représentation des solutions $(x(t), y(t))$ lorsque $t$ varie de 0 à $+\infty$ dans le plan de phase est le **portrait de phase** ;
- En tout point du plan de phase $(x,y) \neq (x^*, y^*)$, il ne passe qu'une seule trajectoire (système autonome) ;
- Lorsque $t$ varie, $x(t)$ et $y(t)$ varient également, donc un point $\mathbf{M}(\mathbf{x}(\mathbf{t}),\mathbf{y}(\mathbf{t}))$ se déplace dans le plan $(x,y)$ selon une certaine **trajectoire** définie à partir de la condition initiale $\mathbf{M_0}(\mathbf{x}(\mathbf{0}),\mathbf{y}(\mathbf{0}))$.

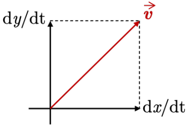
# Portrait de phase

On peut définir en chaque point de la trajectoire un vecteur vitesse $\vec{v}$ de coordonnées $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ qui est tangent à la trajectoire et orienté dans le sens de parcours de celle-ci. Les points d'équilibre sont tels que $\vec{v} = 0$.



# Isoclines nulles

Soit un système dynamique tel que $\frac{dx}{dt} = f(x,y)$ et $\frac{dy}{dt} = f(x,y)$.




Les isoclines nulles de ce système sont l'ensemble des points du plan qui vérifient :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) = 0(\uparrow) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dt} = g(x,y) = 0(\rightarrow)$$

Dans le plan de phase $(x,y)$, on parle d'**isoclines verticales** $\left(\frac{dx}{dt} = 0\right)$ ou d'**isoclines horizontales** $\left(\frac{dy}{dt} = 0\right)$, selon la direction des vecteurs vitesse le long de ces isoclines.

# Table des matières

# Plan détaillé

# Système linéaire

## Définition

On utilisera ici les variables $u(t)$ et $v(t)$.

Dans un système d'EDO linéaire de $\mathbb{R}^2$, les fonctions $f$ et $g$ sont linéaires en $u$ et $v$. Il s'écrit sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{du}{dt} & = & a_{11}\,u + a_{12}\,v \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} & = & a_{21}\,u + a_{22}\,v \end{array}\right.$$

# Système linéaire

## Ecriture matricielle

Soit un système linéaire du type

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = a_{11}\,u + a_{12}\,v \\ \dfrac{dv}{dt} = a_{21}\,u + a_{22}\,v \end{cases}$$

Ce système est équivalent à l'écriture matricielle $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{MU}$ avec

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{U(t)} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{du(t)}{dt} \\ \frac{dv(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{M}$ est la “matrice Jacobienne” du système.
Dans ce cours, nous ne verrons que les cas où $\det(\mathbf{M}) \neq \mathbf{0}$.

# Système linéaire

## Point d'équilibre

Soit un système linéaire du type $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{MU}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = a_{11}\, u + a_{12}\, v \\ \dfrac{dv}{dt} = a_{21}\, u + a_{22}\, v \end{cases}$$

Le(s) point(s) d'équilibre vérifie(nt) :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0 \\ \frac{dv}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{MU}^\star = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{U}^\star = \mathbf{0}$$

Puisque $\det(\mathbf{M}) \neq \mathbf{0}$, alors $\mathbf{M}$ est inversible et l'équation $\mathbf{MU}^\star = \mathbf{0}$ admet une unique solution : $\mathbf{U}^\star = \mathbf{0}$.

Le **seul** point d'équilibre est donc le point de coordonnées $(0,0)$.

# Plan détaillé

# Équation caractéristique (1)

Soit un système linéaire du type $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{MU}$ admettant la matrice Jacobienne

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\mathbf{M}$ sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = 0$$

# Petit rappel sur les valeurs propres

- Si $\mathbf{M}$ admet deux valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1$ et $\lambda_2$ :

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\lambda - \lambda_\mathbf{1})(\lambda - \lambda_\mathbf{2}) = \mathbf{0}$$
$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda^\mathbf{2} - (\lambda_\mathbf{1} + \lambda_\mathbf{2})\lambda + \lambda_\mathbf{1}\lambda_\mathbf{2} = \mathbf{0}$$

On aura donc $\begin{cases} \mathrm{tr}(\mathbf{M}) = \lambda_\mathbf{1} + \lambda_\mathbf{2} \\ \det(\mathbf{M}) = \lambda_\mathbf{1}\lambda_\mathbf{2} \end{cases}$

- Si $\mathbf{M}$ admet une valeur propre double, on aura $\begin{cases} \mathrm{tr}(\mathbf{M}) = \mathbf{2}\lambda_\mathbf{0} \\ \det(\mathbf{M}) = \lambda_\mathbf{0}^\mathbf{2} > \mathbf{0} \end{cases}$.
- Si $\mathbf{M}$ admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, on aura $\begin{cases} \mathrm{tr}(\mathbf{M}) = \mathbf{2}\alpha \\ \det(\mathbf{M}) = \alpha^\mathbf{2} + \beta^\mathbf{2} > \mathbf{0} \end{cases}$

# Équation caractéristique (2)

Soit un système linéaire du type $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{MU}$ admettant la matrice Jacobienne

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

La nature des solutions de $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{MU}$ va dépendre des valeurs propres de $\mathbf{M}$ et donc du **signe du discriminant** de l'équation caractéristique $\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$

$$\Delta = (\mathrm{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M})$$

On va devoir distinguer trois cas : $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$.

# Plan détaillé

# Introduction

On considère le système

$$\frac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{MU} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\mathbf{M}$ sont les solutions de l'équation

caractéristique $\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$.

→ L'allure des solutions $\mathbf{U}(\mathbf{t})$ va dépendre de la nature des valeurs propres de $\mathbf{M}$ donc du signe de $\Delta = \mathrm{tr}(\mathbf{M})^{\mathbf{2}} - \mathbf{4}\det(\mathbf{M})$.

# Allure des solutions - Éléments d'explication

Selon la nature des valeurs propres de $\mathbf{M}$, on peut lui associer l'une des 4 formes de Jordan suivantes :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ si } \Delta > \mathbf{0} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ si } \Delta < \mathbf{0}$$

$$\text{avec } \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

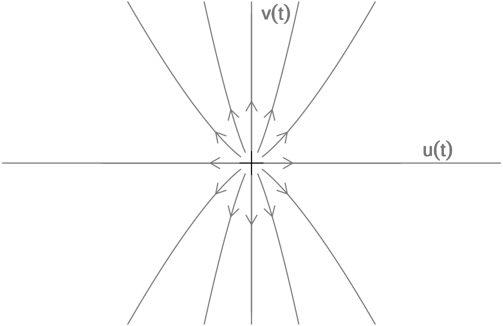
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \text{ si } \Delta = \mathbf{0}$$

Le système $\frac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{MU}$ est alors équivalent à $\frac{\mathbf{dY}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{JY}$, avec $\mathbf{Y}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$. Si $\Delta > 0$, chacune des deux équations s'écrit $\frac{dy_i(t)}{dt} = \lambda_i y_i(t)$ dont la solution est $y_i(t) = y_i(0)e^{\lambda_i t}$. Ainsi, les solutions $u(t)$ et $v(t)$ seront une combinaison linéaire des $e^{\lambda_i t}$.

# $\Delta > 0$ : $\mathbf{M}$ a 2 valeurs propres réelles distinctes **positives**

$\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ : $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{\lambda_1 t} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{\lambda_2 t} = +\infty.$

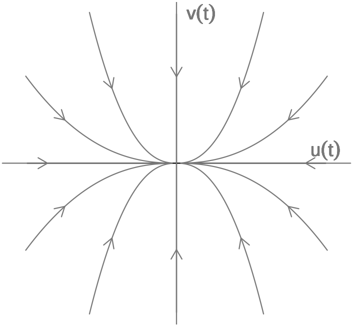
$\Rightarrow$ $(0,0)$ est un **noeud instable**



# $\Delta > 0$ : $\mathbf{M}$ a 2 valeurs propres réelles distinctes **négatives**

$\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ : $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{\lambda_1 t} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{\lambda_2 t} = 0.$

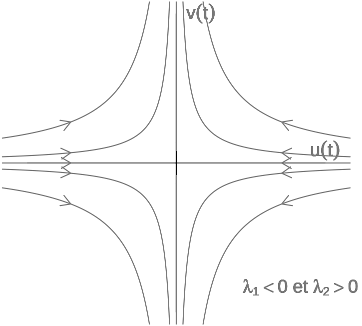
$\Rightarrow$ $(0,0)$ est un **noeud asymptotiquement stable**



# $\Delta > 0$ : $\mathbf{M}$ a 2 valeurs propres réelles distinctes **de signe opposé**

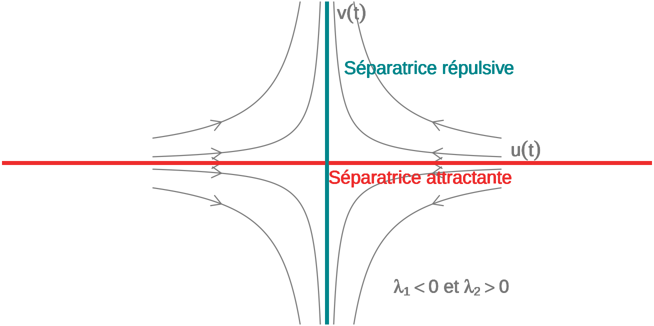
$(\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0)$ ou $(\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0)$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ est un **point selle**



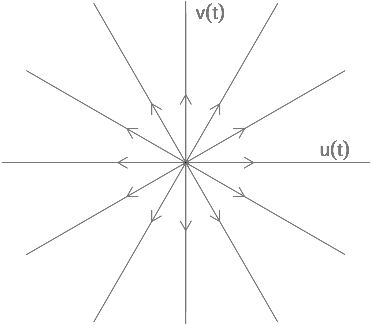
# $\Delta > 0$ : $\mathbf{M}$ a 2 valeurs propres réelles distinctes **de signe opposé**

$(\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0)$ ou $(\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0)$
$\Rightarrow$ $(0,0)$ est un **point selle**



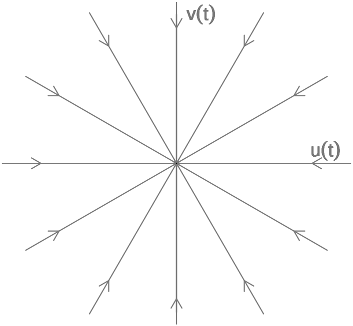
# $\Delta = 0$ : $\mathbf{M}$ a 1 valeur propre double et est **diagonale**

$\lambda_0 > 0 \Rightarrow (0,0)$ est une **étoile instable**



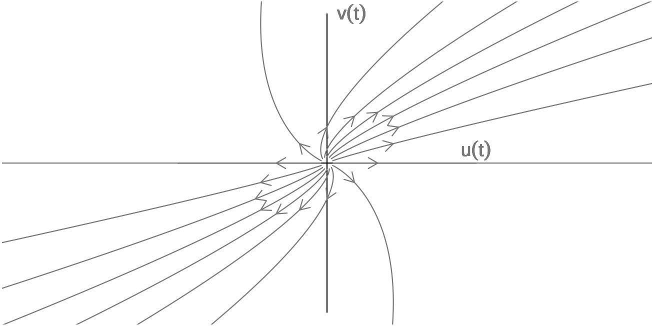
# $\Delta = 0$ : $\mathbf{M}$ a 1 valeur propre double et est **diagonale**

$\lambda_0 < 0 \Rightarrow (0,0)$ est une **étoile asymptotiquement stable**



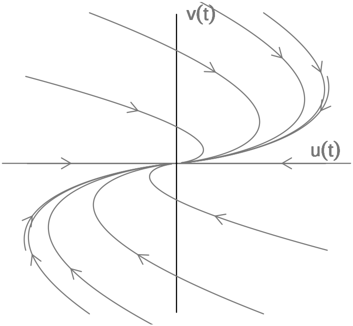
# $\Delta = 0$ : $\mathbf{M}$ a 1 valeur propre double et **n'est pas** diagonale

$\lambda_0 > 0 \Rightarrow (0,0)$ est un **noeud dégénéré instable**



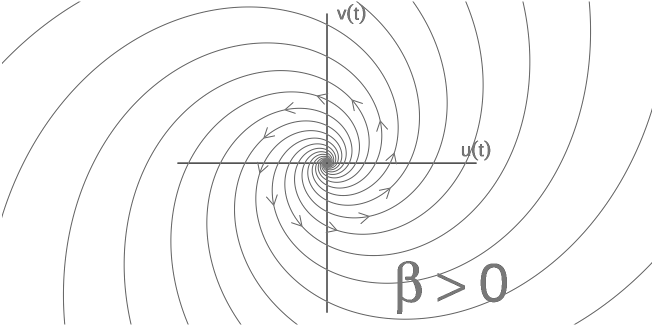
# $\Delta = 0$ : $\mathbf{M}$ a 1 valeur propre double et **n'est pas** diagonale

$\lambda_0 < 0 \Rightarrow (0,0)$ est un **noeud dégénéré asymptotiquement stable**



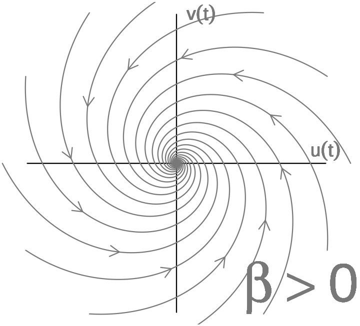
# $\Delta < 0$ : $\mathbf{M}$ a 2 valeurs propres complexes conjuguées

$\alpha > 0 \Rightarrow (0,0)$ est un **foyer instable**



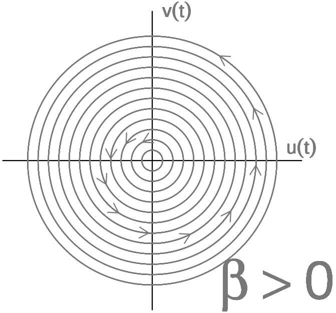
# $\Delta < 0$ : $\mathbf{M}$ a 2 valeurs propres complexes conjuguées

$\alpha < 0 \Rightarrow (0,0)$ est un **foyer asymptotiquement stable**



# $\Delta < 0$ : $\mathbf{M}$ a 2 valeurs propres complexes conjuguées

$\alpha = 0 \Rightarrow (0,0)$ est un **centre** (neutralement stable)



# Plan détaillé

# Typologie des systèmes linéaires : en résumé

Soit un système linéaire du type

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \dfrac{du}{dt} & = & a_{11}u & + & a_{12}v \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} & = & a_{21}u & + & a_{22}v \end{array} \right.$$

Ce système est équivalent au système $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{MU}$, où $\mathbf{M}$ est la matrice Jacobienne du système définie par

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

# Typologie des systèmes linéaires : en résumé

- La nature du point d'équilibre $(0,0)$ dépend du nombre, du type (complexe ou réelle), et du signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice Jacobienne $\mathbf{M}$.
- Ces valeurs propres sont solutions de l'équation caractéristique de $\mathbf{M}$ :

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$$

- On distingue plusieurs cas selon le signe de

$$\Delta = (\mathrm{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M})$$

$$\left(\Delta > 0,\ \Delta = 0,\ \Delta < 0\right)$$

# Rappels sur le lien entre $\mathrm{tr}(\mathbf{M})$, $\det(\mathbf{M})$ et les valeurs propres

- Si $\mathbf{M}$ admet deux valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1$ et $\lambda_2$ :

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \mathbf{0}$$
$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = \mathbf{0}$$

  On a donc $\begin{cases} \mathrm{tr}(\mathbf{M}) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(\mathbf{M}) = \lambda_1\lambda_2 \end{cases}$

- Si $\mathbf{M}$ admet une valeur propre double, on aura $\begin{cases} \mathrm{tr}(\mathbf{M}) = 2\lambda_0 \\ \det(\mathbf{M}) = \lambda_0^2 > 0 \end{cases}$.
- Si $\mathbf{M}$ admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, on aura $\begin{cases} \mathrm{tr}(\mathbf{M}) = 2\alpha \\ \det(\mathbf{M}) = \alpha^2 + \beta^2 > 0 \end{cases}$

# Typologie des systèmes linéaires : plan $(\mathrm{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$

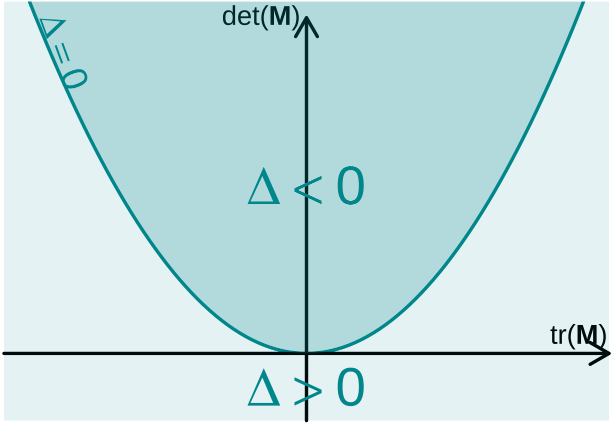
Du fait du lien avec les valeurs propres, on peut représenter dans le plan $(\mathrm{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$ les régions qui correspondent aux différents types de points d'équilibre.
Le discriminant de l'équation caractéristique de $\mathbf{M}$ est

$$\Delta = \mathrm{tr}(\mathbf{M})^{\mathbf{2}} - \mathbf{4}\det(\mathbf{M})$$

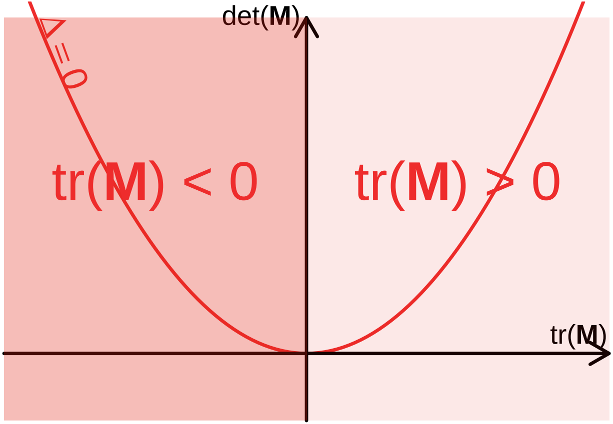
Donc la parabole d'équation $\det(\mathbf{M}) = \dfrac{(\mathrm{tr}(\mathbf{M}))^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}$ délimite les régions du plan où :

- $\Delta > 0$ (en-dessous la parabole) ;
- $\Delta < 0$ (au-dessus de la parabole).

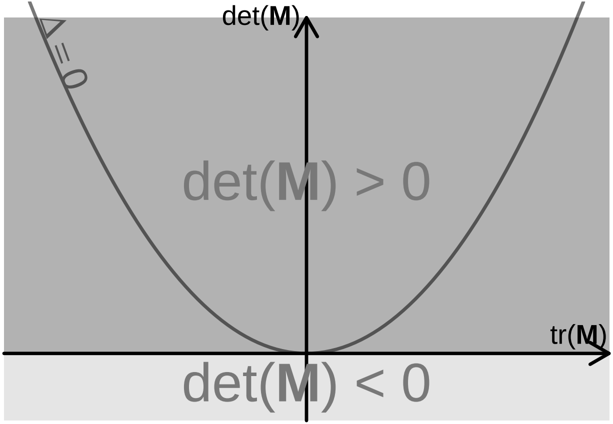
# Plan $(\mathrm{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$



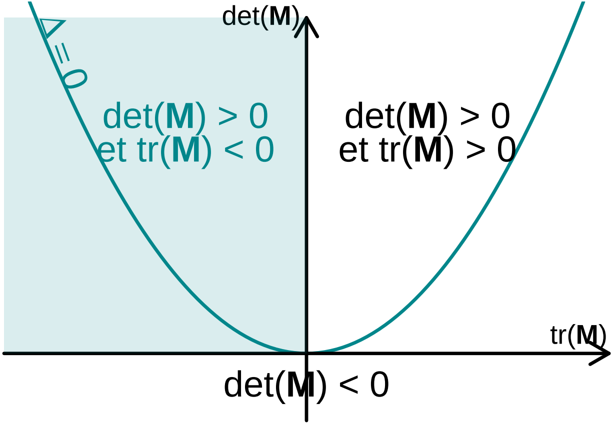
# Plan $(\mathrm{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$ : signe de la trace



# Plan $(\mathrm{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$ : signe du déterminant

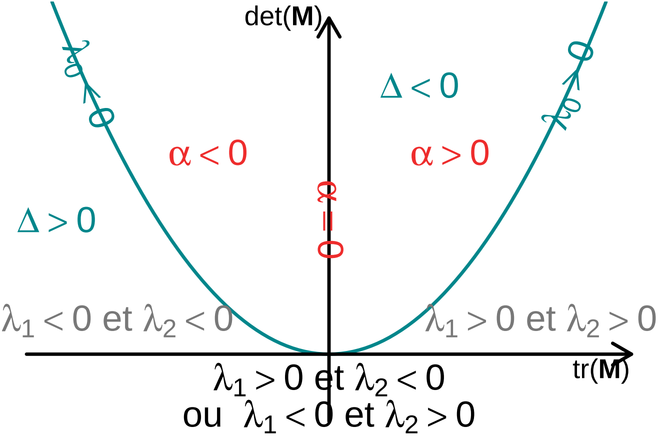


# Plan $(\mathrm{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$

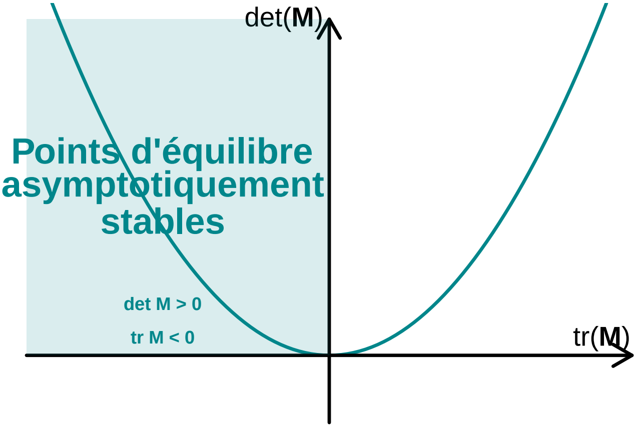


# Plan $(\mathrm{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$

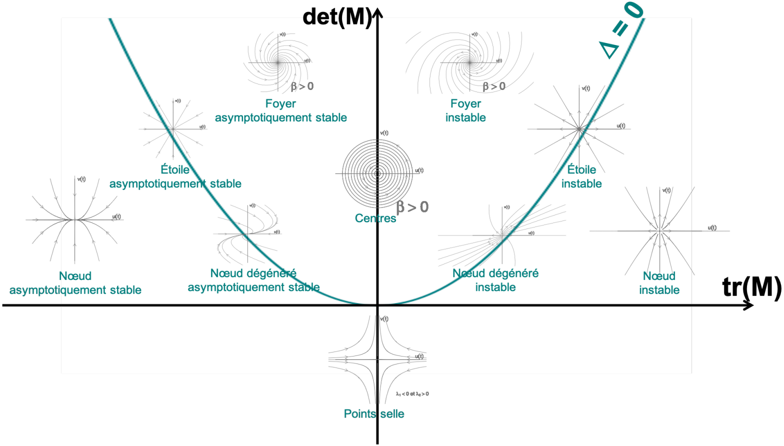
| | | |
|---|---|---|
| $\det(\mathbf{M}) = \lambda_1 \lambda_2$ | $\det(\mathbf{M}) = \lambda_0^2 > 0$ | $\det(\mathbf{M}) = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ |
| $\mathrm{tr}(\mathbf{M}) = \lambda_1 + \lambda_2$ | $\mathrm{tr}(\mathbf{M}) = 2\lambda_0$ | $\mathrm{tr}(\mathbf{M}) = 2\alpha$ |



# Plan $(\mathrm{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$



# Plan $(\mathrm{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$




https://is.gd/hWuoOA

# Table des matières

# Plan détaillé

# Le modèle de Lotka-Volterra

## Rappel des équations

Le modèle de Lotka-Volterra est un modèle proies-prédateurs dont les équations sont :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dN}{dt} = rN\left(1-\dfrac{N}{K}\right) - \alpha NP \\ \dfrac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{array}\right.$$

# Plan détaillé

# Isoclines nulles

## Rappel

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & g(x,y) \end{cases}$$

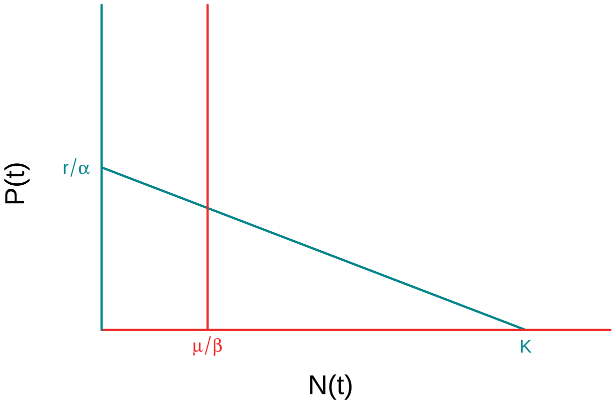
Dans le plan $(x,y)$, les isoclines nulles de ce système sont l'ensemble des points du plan qui vérifient :

$$\begin{array}{lcl} \text{verticales} & & \text{horizontales} \\ \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) = 0 & \text{ou} & \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) = 0 \\ \vec{v} \left| \begin{array}{l} 0 \\ \frac{dy}{dt} \end{array} \right. & & \vec{v} \left| \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} \\ 0 \end{array} \right. \end{array}$$

# Le modèle de Lotka-Volterra

## Isoclines nulles dans le cas où $\mu/\beta < K$

On se place dans le plan de phase $(N, P)$.



# Points d'équilibre

## Rappel

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & g(x,y) \end{array}\right.$$

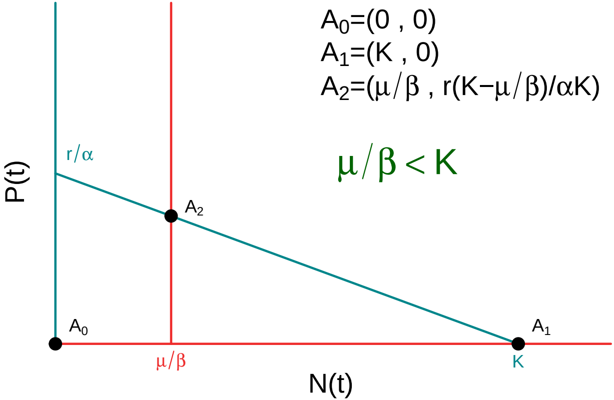
Un point d'équilibre de ce système est un point $(x^\star, y^\star)$ qui vérifie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=x^\star, y=y^\star} & = & f(x^\star, y^\star) = 0 \\ \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{x=x^\star, y=y^\star} & = & g(x^\star, y^\star) = 0 \end{array}\right.$$

# Le modèle de Lotka-Volterra

## Points d'équilibre dans le cas où $\mu/\beta < K$

Les points d'équilibre sont **à l'intersection des isoclines horizontales et verticales** :



# Plan détaillé

# Étude de la stabilité des points d'équilibre (1)

## Changement de variable

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & g(x,y) \end{array} \right.$$

possédant un point d'équilibre $(x^\star, y^\star)$ dont on cherche la stabilité.
Il faut se ramener à ce que l'on connaît : les systèmes linéaires
⇒ On va donc **linéariser au voisinage du point d'équilibre**.
On introduit le changement de variable suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u(t) & = & x(t) - x^\star \\ v(t) & = & y(t) - y^\star \end{array} \right.$$

# Étude de la stabilité des points d'équilibre (2)

## Linéarisation au voisinage du point d'équilibre

On linéarise le système au voisinage du point d'équilibre en utilisant un développement de Taylor au premier ordre des fonctions $f$ et $g$ :

$$u(t) = x(t) - x^\star \text{ et } v(t) = y(t) - y^\star$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{dx}{dt} \simeq f(x^\star, y^\star) + \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^\star, y^\star)} (x - x^\star) + \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x^\star, y^\star)} (y - y^\star) \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dy}{dt} \simeq g(x^\star, y^\star) + \left.\dfrac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x^\star, y^\star)} (x - x^\star) + \left.\dfrac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x^\star, y^\star)} (y - y^\star) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{du}{dt} \simeq \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^\star, y^\star)} u + \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x^\star, y^\star)} v \\ \dfrac{dv}{dt} \simeq \left.\dfrac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x^\star, y^\star)} u + \left.\dfrac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x^\star, y^\star)} v \end{cases}$$

puisque $f(x^\star, y^\star) = 0$ et $g(x^\star, y^\star) = 0$.

# Étude de la stabilité des points d'équilibre (3)

## Linéarisation au voisinage du point d'équilibre

Au voisinage du point d'équilibre $(x^\star, y^\star)$, le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & g(x,y) \end{cases}$$

est donc équivalent au système linéaire suivant :

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{M}^\star \mathbf{U}$$

$$\text{avec } \mathbf{M}^\star = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_\star & \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_\star \\ \left.\dfrac{\partial g}{\partial x}\right|_\star & \left.\dfrac{\partial g}{\partial y}\right|_\star \end{pmatrix}, \ \mathbf{U}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$u(t) = x(t) - x^\star \text{ et } v(t) = y(t) - y^\star$$

# Plan détaillé

# Jacobienne d'un système quelconque

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & g(x,y) \end{cases}$$

La matrice Jacobienne de ce système est définie par

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ & \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

# Le modèle de Lotka-Volterra

## Jacobienne (1)

Les équations du système sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha NP = f(N,P) \\ \frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP = g(N,P) \end{array} \right.$$

La matrice Jacobienne de ce système est

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial N} & \dfrac{\partial f}{\partial P} \\ \dfrac{\partial g}{\partial N} & \dfrac{\partial g}{\partial P} \end{pmatrix}$$

# Le modèle de Lotka-Volterra

## Jacobienne (2)

On a

$$\begin{cases} f(N,P) = rN - \dfrac{rN^2}{K} - \alpha NP \\ \\ g(N,P) = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

La matrice Jacobienne du système de Lotka-Volterra est donc :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r - \dfrac{2rN}{K} - \alpha P & -\alpha N \\ \\ \beta P & -\mu + \beta N \end{pmatrix}$$

# Plan détaillé

## Théorème de linéarisation

Soit un système non linéaire $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$ admettant un point d'équilibre $(x^\star, y^\star)$ et tel que $\det(\mathbf{M}^\star) \neq \mathbf{0}$, où $\mathbf{M}^\star$ est la matrice Jacobienne du système au voisinage du point $(x^\star, y^\star)$.

Alors, dans le voisinage du point d'équilibre, les portraits de phase du système $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$ et de sa forme linéarisée $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{M}^\star \mathbf{U}$ ont des points d'équilibre **de même nature**, sous réserve que le système linéarisé ne corresponde pas à des centres.

# Le modèle de Lotka-Volterra

## Théorème de linéarisation ($A_0$)

Cas où il existe trois points d'équilibre (cas $\mu/\beta < K$).

La matrice Jacobienne du système est :

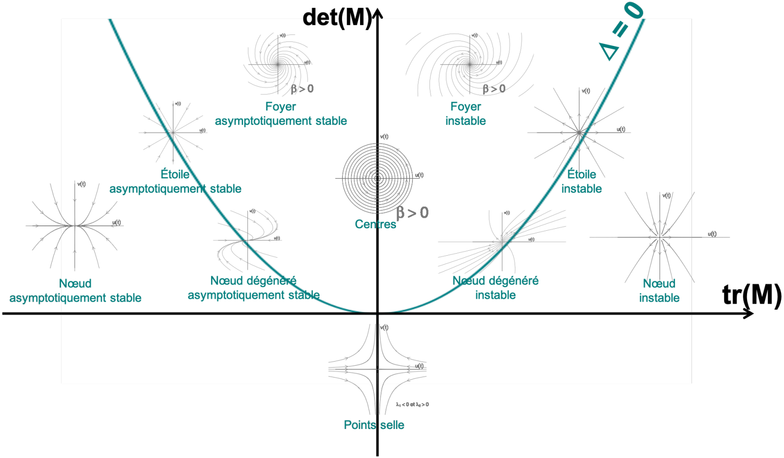
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r - \alpha P - \dfrac{2rN}{K} & -\alpha N \\ \beta P & \beta N - \mu \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre $\mathbf{A_0} = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, la matrice Jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{M_{A_0}} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

On a $\det(\mathbf{M_{A_0}}) = -\mathbf{r}\mu < \mathbf{0}$.

Donc le point d'équilibre $\mathbf{A_0} = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ est un **point selle**.




https://lc.cx/pcbL

# Le modèle de Lotka-Volterra

## Théorème de linéarisation $(A_1)$ dans le cas où $\mu/\beta < K$

Au point d'équilibre $\mathbf{A_1} = (\mathbf{K}, \mathbf{0})$, la matrice Jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{M_{A_1}} = \begin{pmatrix} -r & -\alpha K \\ 0 & \beta K - \mu \end{pmatrix}$$

On a $\det(\mathbf{M_{A_1}}) = -\mathbf{r}(\beta\mathbf{K} - \mu) < \mathbf{0}$ (car $\beta K > \mu$).

Donc le point d'équilibre $\mathbf{A_1} = (\mathbf{K}, \mathbf{0})$ est un **point selle**.

# Le modèle de Lotka-Volterra

## Théorème de linéarisation $(A_2)$ dans le cas où $\mu/\beta < K$

Au point d'équilibre $\mathbf{A_2} = (\frac{\mu}{\beta}, \frac{\mathbf{r(K-\frac{\mu}{\beta})}}{\alpha\mathbf{K}})$, les calculs se compliquent...
Il faut se rappeler que les points d'équilibre sont à l'intersection des isoclines horizontales et verticales.
Ainsi pour $\mathbf{A_2}$ :

$$\begin{cases} N = \frac{\mu}{\beta} \\ P = \frac{r}{\alpha}\left(1 - \frac{N}{K}\right) \end{cases}$$

On appelle ces équations **les conditions d'équilibre**.

# Le modèle de Lotka-Volterra

## Théorème de linéarisation $(A_2)$ dans le cas où $\mu/\beta < K$

Au point d'équilibre $\mathbf{A_2} = (\frac{\mu}{\beta}, \frac{\mathbf{r}(\mathbf{K}-\frac{\mu}{\beta})}{\alpha\mathbf{K}})$, la matrice Jacobienne s'écrit donc :

$$\mathbf{M_{A_2}} = \begin{pmatrix} -r\frac{N^\star}{K} & -\alpha N^\star \\ \beta P^\star & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\det(\mathbf{M_{A_2}}) = \alpha\beta\mathbf{N}^\star\mathbf{P}^\star > \mathbf{0}$ et $\mathrm{tr}(\mathbf{M_{A_2}}) = -\mathbf{r}\frac{\mathbf{N}^\star}{\mathbf{K}} < \mathbf{0}$.

Donc le point d'équilibre $\mathbf{A_2}$ est **un nœud, un nœud dégénéré, ou un foyer asymptotiquement stable** selon le signe de :

$$\Delta = \mathrm{tr}(\mathbf{M_{A_2}})^{\mathbf{2}} - \mathbf{4}\det(\mathbf{M_{A_2}})$$

# Le modèle de Lotka-Volterra

## Portrait de phase dans le cas où $\mu/\beta < K$