Théorie des jeux

Introduction

- Fondée en 1944 par Von Neumann et Morgenstern pour modéliser le fonctionnement de certains systèmes économiques
- Hypothèses : (1) des règles régissent un jeu
  (2) les joueurs jouent avec les mêmes règles et cherchent à maximiser leur gain individuel
- Principe : règles déterminent le gain de chacun en fonction de ce qu'il a joué et de ce que les autres ont joué

➔ Chaque joueur doit définir une stratégie (ensemble de décisions *a priori* sur la façon dont il va conduire le jeu) en fonction de ce qu'il sait de celle des autres

Introduction

- Buts : créer des modèles mathématiques simples pour synthétiser tous les éléments essentiels à la description des interactions −> Solutions décrivent les issues possibles du jeu

➔ Modèles à terme pour mieux comprendre les phénomènes sociaux ou biologiques sous-jacents.

- Exemples d'application :
  - **Economie** : marchandage entre acheteur et vendeur
  - **Sciences politiques et relations internationales** : compétition électorale entre candidats à la présidentielle
  - **Droit** : compétition entre défendeur et partie adverse
  - **Biologie** : rapport entre longueur de la trompe d'une abeille et la longueur du pistil d'une fleur

Types de jeux (1)

- Entité de base = joueur (individu seul ou groupe d'individus prenant une décision (stratégie, comportement)).

➔ Une fois les joueurs définis, 2 types de modèles :

- *Jeux **non coopératifs*** : basés sur les actions des joueurs individuels ⟶ modélisation des interactions dans lesquelles :
  - les joueurs sont libres de leurs actions, ont des objectifs propres et indépendants
  - un joueur rationnel va chercher à maximiser son propre gain
- *Jeux **coopératifs*** : basés sur les actions conjointes d'un groupe de joueurs

Types de jeux (2)

- On peut distinguer aussi :
  - *Jeux* ***simultanés*** : chaque joueur choisit son plan d'action complet une fois pour toute au début du jeu (choix simultané de tous les joueurs)

    ➔ Représentation sous forme d'un tableau = *forme normale*
  - *Jeux* ***séquentiels*** : chaque joueur choisit son plan d'action à chaque fois qu'il doit prendre une décision

    ➔ Représentation sous forme d'un arbre = *forme extensive*

Equilibre de Nash

- Nouvelle propriété d'équilibre pour les jeux non coopératifs introduite par Nash (1951) :

Si aucun joueur n'a intérêt à changer individuellement sa stratégie en connaissant celle des autres, alors le vecteur des stratégies = ***équilibre de Nash***

🡻

- ✓ prévoit la stabilité d'une interaction vis-à-vis des déviations possibles par rapport aux stratégies individuelles
- ✓ état stable dont aucun joueur n'a intérêt à dévier, même sachant les stratégies jouées par les autres

Théorie des jeux en biologie…

- Maynard Smith (1974) = 1er à introduire le concept de théorie des jeux en biologie évolutive :
  - Observations de nombreux animaux et notamment crabes violonistes qui se battent pour les femelles, et pour lesquels la majorité des rencontres s'achèvent sans blessure alors même qu'ils ont la capacité de se tuer

  ➔ Valeur sélective de ces comportements ?

1- Introduction

1-1 Le jeu Faucon-Colombe

1-2 La notion d'ESS

1-3 La notion de gain

Principe

- Rechercher la stratégie optimale dans une situation de compétition
- 2 types de stratégies pour animaux en compétition :
  - **Stratégie F « Faucon »** (méchant, *Hawk* en anglais) : se battre jusqu'au bout ➔ Victoire ou mort
  - **Stratégie C « Colombe »** (gentil, *Dove* en anglais) : limiter les risques et s'échapper avant blessure

    Dynamique de populations animales constituées d'une certaine proportion de F et d'une certaine proportion de C
- Définition des gains et coûts :
  - gain G > 0 : gain lors d'un combat
  - coût C > 0 : pertes dues aux blessures lors des combats
  - perte de temps T > 0

Principe

- Décrire, pour chaque interaction entre F et C, l'espérance de gain des individus à l'issu d'une rencontre

➔ **matrice des gains**

$$A = \left[a_{ij}\right]_{i,j \in [1,\omega]}$$

ω : nombre total de stratégies (= 2)

a_{ij} : espérance de gain d'un individu adoptant la stratégie i en jouant contre un individu adoptant la stratégie j

Matrice des gains

- Stratégie 1 = F et stratégie 2 = C

$$a_{11} = a(F,F) =$$

$$a_{12} = a(F,C) =$$

$$a_{21} = a(C,F) =$$

$$a_{22} = a(C,C) =$$

$$A = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

1- Introduction

Définitions

- Une population est stable d'un point de vue évolutif si elle est **à l'abri d'une invasion par des minorités**

➔ une stratégie est évolutivement stable s'il n'y a aucune stratégie mutante qui donne une meilleure fitness aux individus qui l'adoptent.

Définition 1 : Soit W_A la fitness darwinienne

$$W_A = V_A f_A$$

V_A : probabilité pour un porteur de l'allèle A de survivre jusqu'à l'âge adulte

f_A : nombre moyen de descendants de chaque survivant = fitness absolue

Définitions

Définition 2 : Une **stratégie pure** d'un joueur i est un plan d'action qui prescrit une action de ce joueur chaque fois qu'il est susceptible de jouer. On note S_i l'ensemble des stratégies pures du joueur i et $s_i \in S_i$ une stratégie pure de ce joueur.

Définition 3 : Une **stratégie mixte** d'un joueur i est une mesure de probabilité p_i définie sur S_i. On note P_i l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i et $p_i \in P_i$ une stratégie mixte de ce joueur.

Application

Soit une population composée d'une proportion $x(t)$ d'individus jouant la stratégie F et d'une proportion $y(t)$=1-$x(t)$ d'individus jouant la stratégie C ➔ évolution de $x(t)$ et $y(t)$?

- Gains moyens selon stratégie :
  - Pour un individu jouant F :
  - Pour un individu jouant C :

➔ Equilibre si S(F) = S(C)

Application

$$S(F) = S(C) \Leftrightarrow$$

➔ Si $G < C$: il existe un équilibre = stratégie mixte x^*

➔ Si $G \geq C$: x^*≥1 donc x^*=1 et y^*=0 ➔ stratégie pure = tous les individus sont « F »

1- Introduction

1-1 Le jeu Faucon-Colombe
1-2 La notion d'ESS
1-3 La notion de gain

Définitions

<u>Définition 4</u> : Soit N stratégies pures dénotées s_1, s_2, …, s_N associées aux probabilités p_1, p_2, …, p_N. On a alors

$$\forall i, p_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

Une stratégie mixte est un point p dans le simplex :

$$S_N = \left\{ p = (p_1, \ldots, p_N) \in IR^N : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} p_i = 1 \right\}$$

➔ Coins du simplex = vecteurs unités $\vec{e}_i$ dont la $i^{ème}$ coordonnées est égale à 1, les autres nulles.

➔ Intérieur du simplex = stratégie complètement mixte telle que $\forall i, p_i > 0$

Définitions

<u>Définition 5</u> : Un jeu sous forme normale est caractérisé par une matrice de gain $A = [a_{ij}]$ de dimension $N \times N$, a_{ij} étant le gain d'un joueur utilisant la stratégie S_i contre un joueur utilisant la stratégie S_j.

Si $N = 2$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$ le vecteur population

Types de gains

➔ 2 types de gains :
- Δ_i le gain moyen de la stratégie i
- Δ le gain moyen dans la population

Lien entre $S(F)$, $S(C)$, Δ_i et Δ ?

On a : $A = \begin{pmatrix} a_{FF} & a_{FC} \\ a_{CF} & a_{CC} \end{pmatrix}$ et $\begin{array}{l} S(F) = x a_{FF} + (1-x) a_{FC} \\ S(C) = x a_{CF} + (1-x) a_{CC} \end{array}$

$$\Rightarrow \boxed{A\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(F) \\ S(C) \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \boxed{S(F) = \Delta_F}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \boxed{S(C) = \Delta_C}$$

Théorie des jeux

1- Introduction
2- Formalisation par les systèmes dynamiques
3- Le dilemme du prisonnier
4- Le jeux Roc-Ciseau-papier
5- Exemples célèbres

2- Formalisation par les systèmes dynamiques

2-1 Les équations du réplicateur
2-2 Retour sur le jeu Faucon/Colombe : cas où $T = 0$
2-3 Le jeu Faucon/Colombe : cas où $T \neq 0$
2-4 Définition d'une ESS

Définition

- Notion de **stabilité évolutive** repose sur la notion de dynamique implicite que l'on peut modéliser sur le simplex S_N

Soit :

- une population composée de N stratégies S_i en proportion x_i.
- f_i la fitness de la stratégie S_i : dépend de l'état de la population $X(t)$

➔ Si la population est grande et que les générations sont chevauchantes, alors on peut supposer que $X(t)$ évolue dans le simplex S_N comme une fonction différentielle de t.

Définition

Taux d'accroissement relatif de la proportion x_i pour $S_i = \dot{x}_i / x_i$

➔ mesure du succès évolutif

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = \text{fitness de } S_i - \text{fitness moyenne} \quad \Rightarrow \dot{x}_i = x_i\left(f_i(X) - \bar{f}(X)\right) \quad \forall i = 1, N$$

Equations du réplicateurs

Dans le cas linéaire : $f_i(X) = (AX)_i$ et $\bar{f}(X) = X^T AX$

$$\Rightarrow \dot{x}_i = x_i\left((AX)_i - X^T AX\right) \quad \forall i = 1, N$$

Pour un jeu à 2 stratégies : $\dot{x} = x(\Delta_1 - \Delta)$

2- Formalisation par les systèmes dynamiques

Jeu F/C pour $T = 0$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{G-C}{2} & G \\ 0 & \frac{G-T}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{G-C}{2} & G \\ 0 & \frac{G}{2} \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = x(\Delta_F - \Delta)$$

$$\Delta_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$$

$$(\Delta_F - \Delta) = \frac{1}{2}(1-x)(G - Cx)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x} = x(\Delta_F - \Delta) = \frac{x}{2}(1-x)(G - Cx)}$$

Jeu F/C pour $T = 0$

$$\dot{x} = \frac{x}{2}(1-x)(G - Cx)$$

- Points d'équilibre :
- Stabilité : $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}$ ou signe de $\dot{x}$
- Portrait de phase :

Si G < C

Si G ≥ C

2- Formalisation par les systèmes dynamiques

2-1 Les équations du réplicateur
2-2 Retour sur le jeu Faucon/Colombe : cas où $T = 0$
2-3 Le jeu Faucon/Colombe : cas où $T \neq 0$
2-4 Définition d'une ESS

Jeu F/C pour $T \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{G-C}{2} & G \\ 0 & \frac{G-T}{2} \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = x(\Delta_F - \Delta)$$

$$\Delta_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \frac{G-C}{2}x + G(1-x)$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \frac{G-C}{2}x^2 + Gx(1-x) + \frac{G-T}{2}(1-x)^2$$

$$(\Delta_F - \Delta) = \frac{1}{2}(1-x)(-x(C+T)+G+T)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x} = x(\Delta_F - \Delta) = \frac{x}{2}(1-x)(-x(C+T)+G+T)}$$

Jeu F/C pour $T \neq 0$

$$\dot{x} = \frac{x}{2}(1-x)(-x(C+T)+G+T)$$

- Points d'équilibre :
- Stabilité : $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}$ ou signe de $\dot{x}$
- Portrait de phase :

Si G < C

Si G ≥ C

2- Formalisation par les systèmes dynamiques

2-1 Les équations du réplicateur
2-2 Retour sur le jeu Faucon/Colombe : cas où $T = 0$
2-3 Le jeu Faucon/Colombe : cas où $T \neq 0$
2-4 Définition d'une ESS

Généralités

Une stratégie p est un point dans le simplex :

$$S_N = \left\{ p = (p_1, \ldots, p_N) \in IR^N : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} p_i = 1 \right\}$$

$A=(a_{ij})$: matrice de gain d'un jeu donné

➔ $(Ap)_i$: gain moyen de la stratégie i

➔ gain d'une stratégie p contre une stratégie $q = p^T A q$

Définitions

Définition 1 : Une stratégie p^* est un **équilibre de Nash** ssi :

$$p^T A p^* \leq p^{*T} A p^*$$

C'est un **équilibre de Nash strict** si et seulement si :

$$p^T A p^* < p^{*T} A p^*$$

Une stratégie j est un **équilibre de Nash strict** ssi :

$$\boxed{a_{ij} < a_{jj} \quad \forall i = 1, N}$$

La stratégie j fait mieux contre elle-même que contre n'importe quelle autre stratégie donc elle ne peut pas être envahie

Définitions

Définition 2 : Une stratégie p^* est une **ESS** ssi c'est un équilibre de Nash strict et si :

$$p^{*T} A p > p^T A p$$

Une stratégie j est une **ESS** ssi :

$$\boxed{a_{ij} < a_{jj} \quad \text{et} \quad a_{ji} > a_{ii} \quad \forall i = 1, N}$$

La stratégie j envahit toutes les autres.

Retour au jeu F/C pour $T = 0$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{G-C}{2} & G \\ 0 & \frac{G}{2} \end{pmatrix}$$

➔ F est une ESS ?

1-

2-

Théorie des jeux

3- Le dilemme du prisonnier

Définition du jeu

- Contexte : 2 individus (Calvin et Hobbes) sont arrêtés par la police suite à un vol à main armée et sont enfermés dans 2 cellules séparées sans possibilité de communication.
- Stratégies : chaque individu est interrogé séparément et il a le choix entre
  - **Nier** avoir commis le vol = **stratégie N**
  - **Dénoncer** son complice comme seul responsable = **stratégie D**

➔ Jeu non coopératif avec n = 2 joueurs

Gains et forme normale du jeu

- Gains : négativement liés aux années de prison auxquelles ils sont condamnés en fonction de leur déposition
  - Si ils dénoncent tous les 2 : 8 ans de prison
  - S'ils nient tous les 2 : 1 an de prison
  - Si un seul dénonce, il est relâché tandis que l'autre est condamné à 10 ans de prison
- Forme normale du jeu

	Hobbes N	Hobbes D
Calvin N	(-1,-1)	(-10,0)
Calvin D	(0,-10)	(-8,-8)

3- Le dilemme du prisonnier

3-1 Introduction
3-2 Formalisation
3-3 Les équations du réplicateur

Matrice de gain

- Pour le joueur en ligne jouant les stratégies N ou D :

$$A = \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix}$$

  - Si les deux prisonniers nient : récompense R
  - Si les deux dénoncent : gain P < R
  - Si le premier joueur nie tandis que l'autre dénonce : gain S < P
  - Si le premier joueur dénonce tandis que l'autre nie : gain T > R

3- Le dilemme du prisonnier

3-1 Introduction
3-2 Formalisation
3-3 Les équations du réplicateur

Equations du réplicateur

- x = probabilité d'adopter la stratégie N

$$A\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rx + S(1-x) \\ Tx + P(1-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_N \\ \Delta_D \end{pmatrix}$$

$$\Delta = x\Delta_N + (1-x)\Delta_D = Rx^2 + (S+T)x(1-x) + P(1-x)^2$$

$$\Rightarrow \dot{x} = x(\Delta_N - \Delta) = x(1-x)\big(x(R-S-T+P) + S - P\big)$$

ESS ?

- Points d'équilibre : $x_1^* = 0 \quad x_2^* = 1 \quad x_3^* = \frac{P-S}{R-S-T+P}$

Il faut vérifier que $0 \le x_3^* \le 1$ pour S < P < R < T   Impossible

➔ 2 points d'équilibre = stratégies pures

- Stabilité : $\dot{x} = x(1-x)\underbrace{\left(x(R-S-T+P)+S-P\right)}_{> 0 \text{ pour } x > x_3^* > 1}$

Bilan

$$A = \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix}$$ S < P < R < T

Une stratégie j est une **ESS** ssi :

$$\boxed{a_{ij} < a_{jj} \quad \text{et} \quad a_{ji} > a_{ii} \qquad \forall i = 1, N}$$

➔ Stratégie N est un **ESS** ssi :

➔ Stratégie D est un **ESS** ssi :

Exemple numérique

	Hobbes N	Hobbes D
Calvin N	(-1,-1)	(-10,0)
Calvin D	(0,-10)	(-8,-8)

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$ D = ESS

$\Delta_N = -10$

$\Delta = -8x^2 + 6x - 8$

$$\Rightarrow \dot{x} = x(8x^2 - 6x - 2)$$

Théorie des jeux

4- Le jeux Roc-Ciseau-papier

Définition du jeu

- Stratégies : 3 individus pouvant adopter 3 stratégies
  - Stratégie Roc = R
  - Stratégie Ciseau = C
  - Stratégie Papier = P
- Règles du jeu : le Roc l'emporte sur le Ciseau ; le roc perd contre le Papier ; le Ciseau gagne contre le Papier. Quand 2 stratégies identiques se rencontrent, il y a égalité.
- Gains possibles
  - +1 quand il y a victoire
  - 0 en cas d'égalité
  - -1 en cas d'échec

Matrice de gain

- Pour le joueur en ligne jouant les stratégies R, C ou P :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4- Le jeux Roc-Ciseau-papier

Equations du réplicateur

- x_1 = probabilité de jouer la stratégie R, x_2 = probabilité de jouer la stratégie C, x_3 = probabilité de jouer la stratégie P

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_R \\ \Delta_C \\ \Delta_P \end{pmatrix}$$

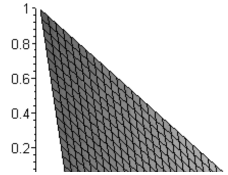
$$\Delta = x_1\Delta_R + x_2\Delta_C + x_3\Delta_P \ = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(\Delta_R - \Delta) \\ \dot{x}_2 = x_2(\Delta_C - \Delta) \\ \dot{x}_3 = x_3(\Delta_P - \Delta) \end{cases} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(\Delta_R) = x_1(x_2 - x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(\Delta_C) = x_2(x_3 - x_1) \\ \dot{x}_3 = x_3(\Delta_P) = x_3(x_1 - x_2) \end{cases}$$

Equations du réplicateur

- On a $x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 0$
- La dynamique est restreinte au triangle unitaire :

Domaine positivement invariant



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 - x_3) = x_1(x_2 - (1 - x_1 - x_2)) \\ \dot{x}_2 = x_2(x_3 - x_1) = x_2((1 - x_1 - x_2) - x_1) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 - x_3) = x_1(x_1 + 2x_2 - 1) \\ \dot{x}_2 = x_2(x_3 - x_1) = x_2(1 - 2x_1 - x_2) \end{cases}}$$

Points d'équilibre

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 - x_3) = x_1(x_1 + 2x_2 - 1) \\ \dot{x}_2 = x_2(x_3 - x_1) = x_2(1 - 2x_1 - x_2) \end{cases}$$

- 4 points d'équilibre :

Stabilité locale

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 - x_3) = x_1(x_1 + 2x_2 - 1) \\ \dot{x}_2 = x_2(x_3 - x_1) = x_2(1 - 2x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$J = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 1 & 2x_1 \\ -2x_2 & 1 - 2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

Conservation des centres ?

- Soit $H(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3$ intégrale première du système ?

$$\frac{\partial H(x_1,x_2,x_3)}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial H}{\partial x_2}\dot{x}_2+\frac{\partial H}{\partial x_3}\dot{x}_3=0$$

➔ Donc H = intégrale première du système

- Il faut montrer que les courbes de niveaux de H se referment autour du point non trivial

$$H(x_1,x_2)=x_1x_2(1-x_1-x_2)$$

➔ Développement en série de Taylor à l'ordre 2 de H au voisinage du point non trivial pour montrer que la fonction admet un extremum local en ce point

Conservation des centres ?

$$H(x_1,x_2)-H(1/3,1/3)=\left.\frac{\partial H}{\partial x_1}\right|_{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}\left(x_1-\frac{1}{3}\right)+\left.\frac{\partial H}{\partial x_2}\right|_{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}\left(x_2-\frac{1}{3}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2}\right|_{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}\left(x_1-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2}\right|_{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}\left(x_2-\frac{1}{3}\right)^2+\left.\frac{\partial^2 H}{\partial x_1\partial x_2}\right|_{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}\left(x_1-\frac{1}{3}\right)\left(x_2-\frac{1}{3}\right)$$

Conservation des centres ?

$$H(x_1,x_2)-H(1/3,1/3)=-\frac{1}{3}\left(x_1-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\left(x_2-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\left(x_1-\frac{1}{3}\right)\left(x_2-\frac{1}{3}\right)$$

4- Le jeux Roc-Ciseau-papier

Portrait de phase

4- Le jeux Roc-Ciseau-papier

4-1 Introduction
4-2 Les équations du réplicateur
4-3 Le portrait de phase
4-4 Les effets d'une perturbation

Gains

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1+\varepsilon & -1 \\ -1 & 0 & 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon \in IR$$

- Gains moyens des différentes stratégies pures :

$$\begin{pmatrix} \Delta_R \\ \Delta_C \\ \Delta_P \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\varepsilon)x_2 - x_3 \\ -x_1 + (1+\varepsilon)x_3 \\ (1+\varepsilon)x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

- Gain moyen dans la population :

$$\Delta = x_1\Delta_R + x_2\Delta_C + x_3\Delta_P = \varepsilon(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = \varepsilon\sigma$$

Equations du réplicateur

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(\Delta_R - \Delta) \\ \dot{x}_2 = x_2(\Delta_C - \Delta) \\ \dot{x}_3 = x_3(\Delta_P - \Delta) \end{cases} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1((1+\varepsilon)x_2 - x_3 - \varepsilon\sigma) \\ \dot{x}_2 = x_2(-x_1 + (1+\varepsilon)x_3 - \varepsilon\sigma) \\ \dot{x}_3 = x_3((1+\varepsilon)x_1 - x_2 - \varepsilon\sigma) \end{cases}$$

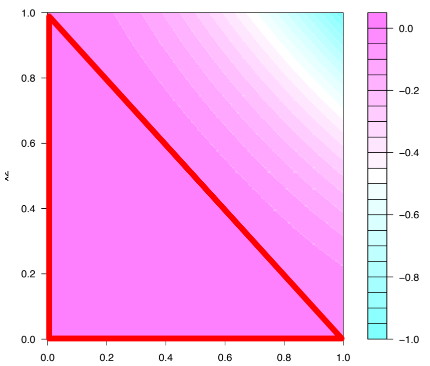
- 4 points d'équilibre : $(0,0,1)$ $(0,1,0)$ $(1,0,0)$ $(1/3,1/3,1/3)$
- Stabilité : PS PS PS ?

↓

Fonction de Lyapunov

Fonction de Lyapunov

$$V(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$$



V définie positive et admet un **maximum** dans l'intérieur strict du simplex (il faudra inverser les conclusions du théorème de Lyapunov)

Quand ε = 0, V est une intégrale première

Fonction de Lyapunov

$$V(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$$

$$\frac{dV(x_1,x_2,x_3)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3}\dot{x}_3$$
$$= x_2x_3\dot{x}_1 + x_1x_3\dot{x}_2 + x_1x_2\dot{x}_3$$

Fonction de Lyapunov

$$\frac{dV}{dt} = \varepsilon V(x_1,x_2,x_3)\left[1-3\varepsilon\sigma\right]$$

$$\sigma(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \quad \Rightarrow \quad \sigma(x_1,x_2) = x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2 - x_1x_2$$

Signe au voisinage de (1/3,1/3) ? Développement en série de Taylor à l'ordre 2

Fonction de Lyapunov

$$\frac{dV}{dt} = \varepsilon V(x_1,x_2,x_3)\left[1-3\varepsilon\sigma\right]$$

$$\sigma(x_1,x_2) - \sigma(1/3,1/3) = -(x_1-1/3)^2 - (x_2-1/3)^2 - (x_1-1/3)(x_2-1/3)$$

Stabilité de stratégie mixte

$$V(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3$$

- On avait vu graphiquement que V admet un maximum dans le simplex. Pour le prouver : développement en série de Taylor de V au voisinage de (1/3,1/3,1/3)

$$V(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3 \quad \Rightarrow \quad V(x_1,x_2)=x_1x_2(1-x_1-x_2)$$

Stabilité de stratégie mixte

$$V(x_1,x_2)-V(1/3,1/3)=-\frac{1}{3}(x_1-1/3)^2-\frac{1}{3}(x_2-1/3)^2-\frac{1}{3}(x_1-1/3)(x_2-1/3)$$

Théorie des jeux

1- Introduction
2- Formalisation par les systèmes dynamiques
3- Le dilemme du prisonnier
4- Le jeux Roc-Ciseau-papier
5- Exemples célèbres

5- Exemples célèbres

5-1 Le jeu Faucon-Colombe-Retaliator
5-2 La guerre des sexes

Stratégies

- Jeu Faucon-Colombe avec une troisième stratégie R : les individus R se comportent comme des F lorsqu'ils rencontrent des F et se comportent comme des C quand ils rencontrent des C
- Que se passe-t-il quand 2 R se rencontrent ?
  - Hypothèse 1 : ils se comportent comme des C
  - Hypothèse 2 : ils se comportent à 50% comme des F et à 50% comme des C

5- Exemples célèbres

5-1 Le jeu Faucon-Colombe-Retaliator

$\boxed{\textbf{5-2 La guerre des sexes}}$

Contexte

- Chez les fourmis *Wasmannia auropunctata* : les reines et les mâles sont issus d'une reproduction clonale. Seules les ouvrières (stériles) sont issues d'une reproduction sexuée.

  ➔ Modèle de compétition entre mâles et femelles pour transmission de leurs gènes d'une génération à l'autre

- Chez l'Homme : cf Charles Darwin, compétition des femelles et mâles pour l'accès au partenaire de sexe opposé
  ➔ guerre des sexes opposant la stratégie mâle de compétition pour contrôler les génitrices, à la stratégie femelle de choix du meilleur géniteur

Modélisation

- Conflit entre mâles et femelles au sujet du partage des tâches dans l'investissement parental.
- 2 types de mâles et 2 types de femelles :
  - les mâles M1 **infidèles** (x_1) et les mâles M2 **fidèles** (x_2) : $x_1 + x_2 = 1$
  - les femelles F1 **timides** (y_1) et les femelles F2 **faciles** (y_2) : $y_1 + y_2 = 1$
- Coûts :
  - le fait d'élever avec succès sa progéniture augmente la fitness des 2 parents d'un facteur G
  - l'investissement parental a un coût –C : entièrement supporté par les femelles si les mâles désertent , sinon partagé entre les 2 parents
  - une longue période d'engagement mutuel a un coût –E pour chacun des 2 parents

Matrice des gains

- Jeux asymétrique : gain d'un mâle contre une femelle ≠ du gain d'une femelle contre un mâle

  ➔2 matrice de gains : A matrice de gain des mâles contre les femelles et B celle des femelles contre les mâles.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{F1} & \mathbf{F2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{M1} \\ A = \\ \mathbf{M2} \end{array} & \left(\begin{array}{cc} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{array} \right) \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{M1} & \mathbf{M2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{F1} \\ B = \\ \mathbf{F2} \end{array} & \left(\begin{array}{cc} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{array} \right) \end{array}$$

Gains des stratégies

- Les mâles (x) jouent contre les femelles (y) et les femelles contre les mâles :

$$\begin{pmatrix} \Delta_{M1} \\ \Delta_{M2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ 1-y_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \Delta_{F1} \\ \Delta_{F2} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ 1-x_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta_{M1} \\ \Delta_{M2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(1-y_1) \\ \left(G-\frac{C}{2}-E\right)y_1 + \left(G-\frac{C}{2}\right)(1-y_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{F1} \\ \Delta_{F2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(G-\frac{C}{2}-E\right)(1-x_1) \\ (G-C)x_1 + \left(G-\frac{C}{2}\right)(1-x_1) \end{pmatrix}$$

Equilibre non trivial

- On cherche à égaliser les gains

$$\Delta_{M1} = \Delta_{M2} \Leftrightarrow G(1-y_1) = \left(G-\frac{C}{2}-E\right)y_1 + \left(G-\frac{C}{2}\right)(1-y_1)$$

$$\Delta_{F1} = \Delta_{F2} \Leftrightarrow \left(G-\frac{C}{2}-E\right)(1-x_1) = (G-C)x_1 + \left(G-\frac{C}{2}\right)(1-x_1)$$

Equations du réplicateur

- 2 populations (avec chacune 2 stratégies) qui jouent l'une contre l'autre

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}\right] \\ \dot{y} = y\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & 1-y \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}\right] \end{cases}$$

- Proposition 1 : on ne change pas la dynamique du système si on rajoute une constante à une colonne de A et/ou de B

  ➔ On peut rendre A et B diagonale

Equations du réplicateur

$$A = \begin{pmatrix} 0 & G \\ G - \frac{C}{2} - E & \boxed{G - \frac{C}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G \boxed{- G + \frac{C}{2}} \\ G - \frac{C}{2} - E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{C}{2} \\ G - \frac{C}{2} - E & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & G - \frac{C}{2} - E \\ G - C & \boxed{G - \frac{C}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G - \frac{C}{2} - E \boxed{- G + \frac{C}{2}} \\ G - C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ G - C & 0 \end{pmatrix}$$

Equations du réplicateur

$$\begin{pmatrix} \Delta_{M1} \\ \Delta_{M2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y \\ 1 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{C}{2} \\ G - \frac{C}{2} - E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C}{2}(1 - y) \\ \left(G - \frac{C}{2} - E\right) y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta_{F1} \\ \Delta_{F2} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ 1 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ G - C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E(1 - x) \\ (G - C)x \end{pmatrix}$$

Equations du réplicateur

$$\Delta_M = x\Delta_{M1} + (1 - x)\Delta_{M2} = x\frac{C}{2}(1 - y) + (1 - x)\left(G - \frac{C}{2} - E\right)y$$

$$\Delta_F = y\Delta_{F1} + (1 - y)\Delta_{F2} = -Ey(1 - x) + (1 - y)(G - C)x$$

$$\dot{x} = x\left[\Delta_{M1} - \Delta_M\right]$$

Equations du réplicateur

$$\Delta_M = x\Delta_{M1} + (1 - x)\Delta_{M2} = x\frac{C}{2}(1 - y) + (1 - x)\left(G - \frac{C}{2} - E\right)y$$

$$\Delta_F = y\Delta_{F1} + (1 - y)\Delta_{F2} = -Ey(1 - x) + (1 - y)(G - C)x$$

$$\dot{y} = y\left[\Delta_{F1} - \Delta_F\right]$$

Equations du réplicateur

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x)\left[(E-G)y + \dfrac{C}{2}\right] \\ \dot{y} = y(1-y)\left[(C-G+E)x - E\right] \end{cases}$$

- 5 points d'équilibre :
- Stabilité :

Stabilité des points d'équilibre

- (0,0) :

M fidèles et F faciles

- (1,0) :

M infidèles et F faciles

- (0,1) :

M fidèles et F timides

- (1,1) :

M infidèles et
F timides

Stabilité des points d'équilibre

- $\left(\dfrac{E}{C+E-G}, \dfrac{C}{2(G-E)}\right)$: La linéarisation prévoit des centres
➔Intégrale première

Stratégie mixte

- Portrait de phase