Master BEE@Lyon

UE "Écologie et Évolution Quantitatives"

Les modèles démographiques matriciels

https://sites.google.com/view/model-matriciel

Pr. Sandrine CHARLES

Université Claude Bernard Lyon 1 – France

19 février 2020

Table des matières

1 Introduction

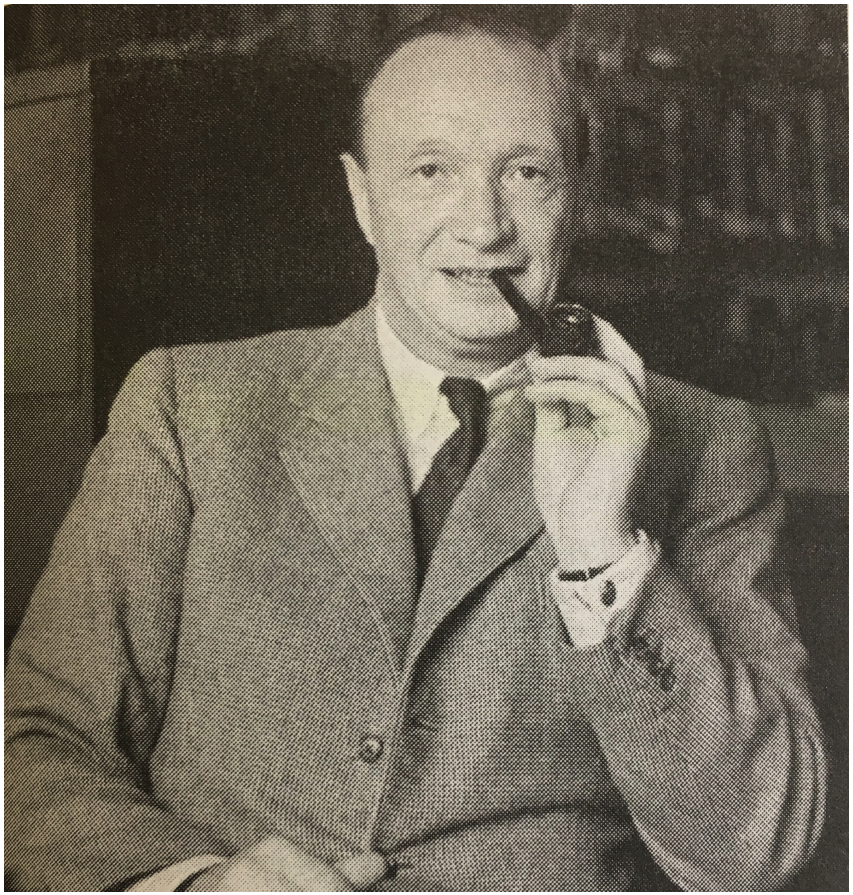
2 Quelques simulations

3 La théorie

4 Les modèles multirégionaux

5 Références

Patrick Holt Leslie (1945, 1948)

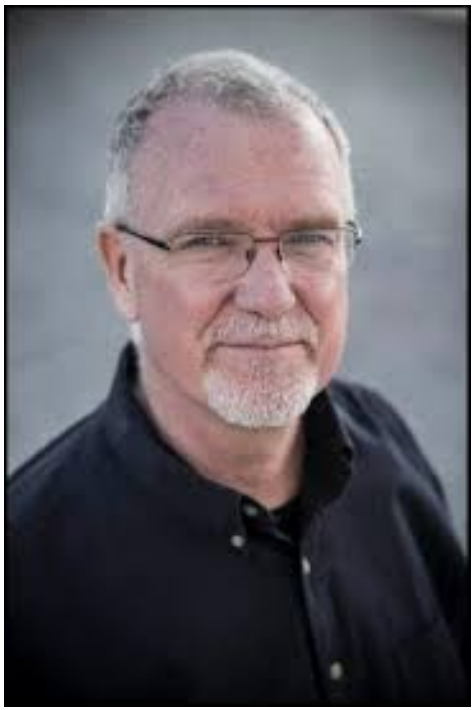


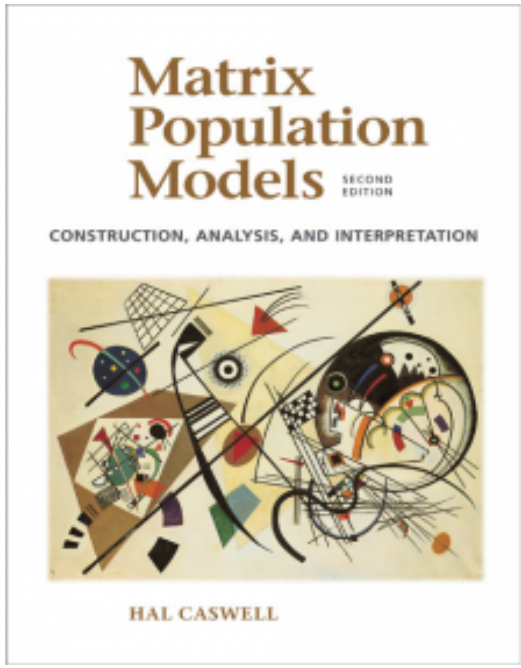
Leonard Lefkovitch (1965)

Michael B. Usher (1966)

http://www.stir.ac.uk/people/10878

Hal Caswell (2001)





http://www.uva.nl/en/about-the-uva/organisation/staff-members/content/c/a/h.caswell/h.caswell.html

Le modèle de Leslie (version originale)

Les hypothèses

1. L'âge (généralement noté x), est une variable continue dont la première valeur vaut 0, est subdivisé en **classes d'âge** numérotées de 1 à ω : la classe d'âge i correspond ainsi à l'ensemble des individus d'âge $i-1 \leq x \leq i$ pour $i = 1..\omega$;
2. Le temps est considéré comme une **variable discrète** : t, $t+1$, $t+2$, ..., avec t le pas de temps ou *intervalle de projection* ;
3. Le pas de temps est exactement égal à la durée de chacune des classes d'âge, ce qui implique que de t à $t+1$ tous les individus passent de la classe d'âge i à la classe d'âge $i+1$.

Le modèle de Leslie (version originale)

Les notations

Si on désigne par $n_i(t)$ le nombre d'individus de la classe d'âge i au temps t, et par $\vec{N}_t$ le vecteur population au temps t, alors :

$$n_i\,(t+1) = f\left[n_i\,(t)\right]_{i=1,\omega} \quad \text{et} \quad \vec{N}_{t+1} = \mathbf{M}\vec{N}_t$$

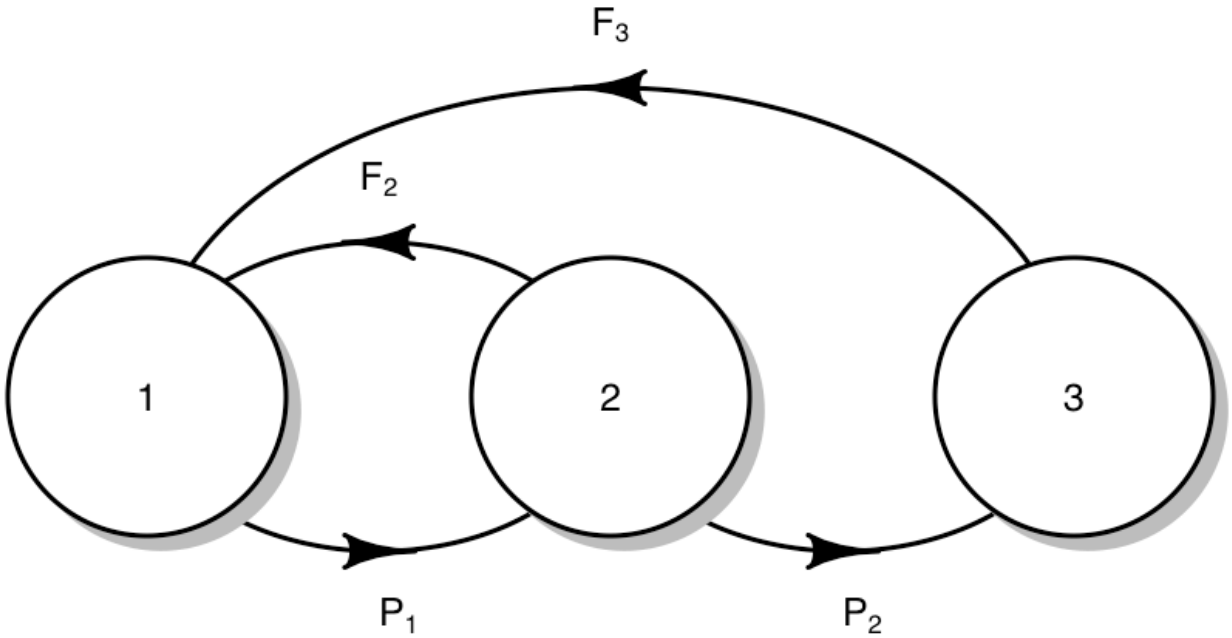
avec f une fonction linéaire des $n_i(t)$.

C'est cette matrice $\mathbf{M}$ que l'on appelle **matrice de Leslie**.

$\rightarrow$ En général, dans ces modèles, on ne considère que les femelles.

Le graphe de cycle de vie

Les taux vitaux



- P_i le taux de survie d'un individu de la classe d'âge i à la classe d'âge $i+1$;
- F_i le nombre moyen d'individus femelles engendrés par une femelle d'âge i et qui survivent jusqu'à l'âge 1 (on appelle F_i la fécondité, qui inclut ici le sex-ratio)

Le graphe de cycle de vie

Les équations

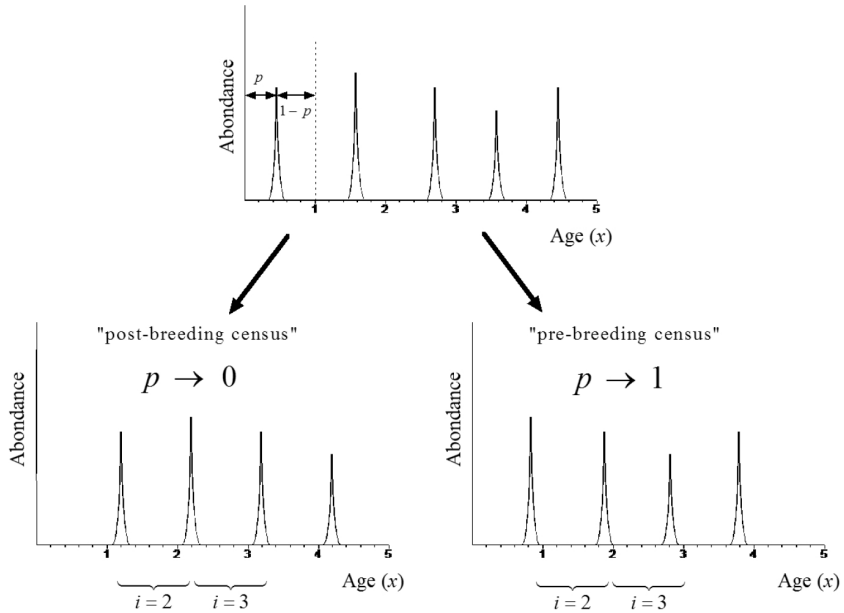
$$\begin{cases} n_1(t+1) = F_2 n_2(t) + F_3 n_3(t) \\ n_2(t+1) = P_1 n_1(t) \\ n_3(t+1) = P_2 n_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}_{t+1} = \begin{pmatrix} 0 & F_2 & F_3 \\ P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}_t \Leftrightarrow \vec{N}_{t+1} = \mathbf{M}\vec{N}_t$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \cdots & F_{\omega-1} & F_\omega \\ P_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_{\omega-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Choisir le début du pas de temps

Fonctionnement *birth-pulse*



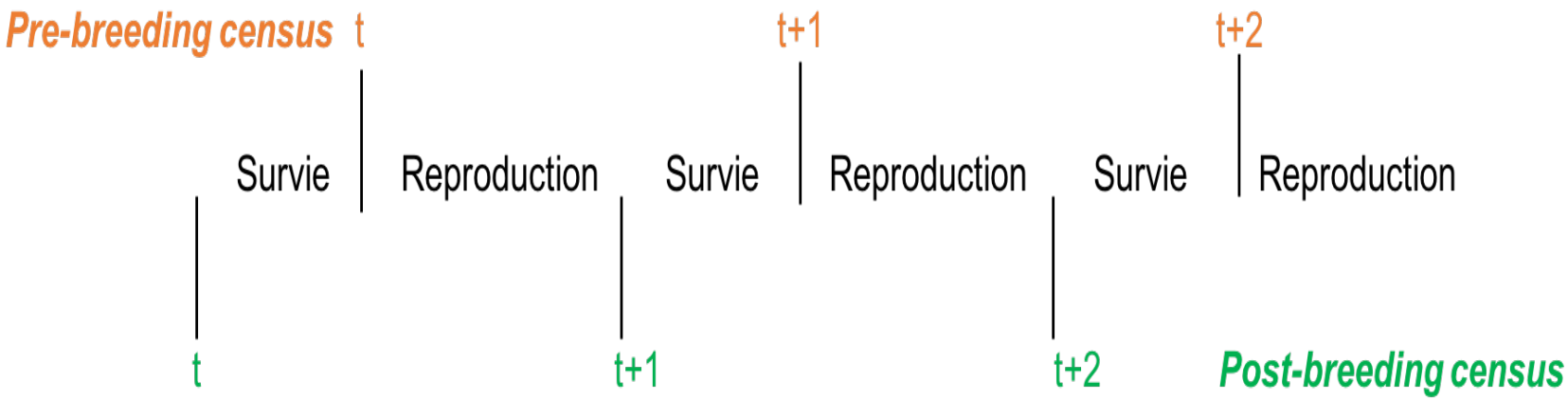
Si on appelle p le temps qui s'écoule entre la reproduction et le recensement $(0 < p < 1)$, alors, au moment du recensement, les pics d'abondance correspondent à des pics d'individus âgés de p, $p + 1$, $p + 2$,...

Choisir le début du pas de temps

Fonctionnement *birth-pulse*

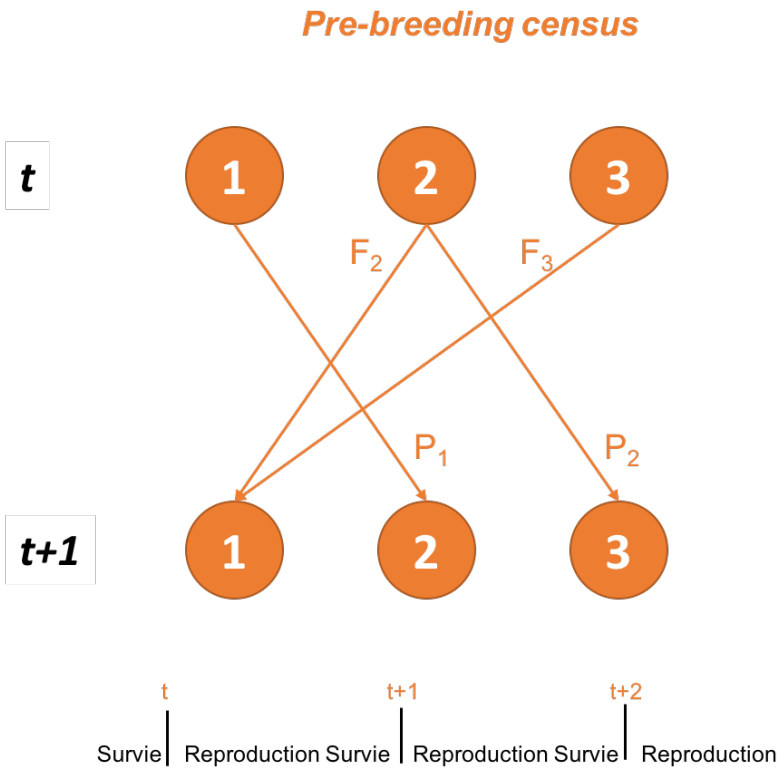
En pratique, les recensements sont effectués :

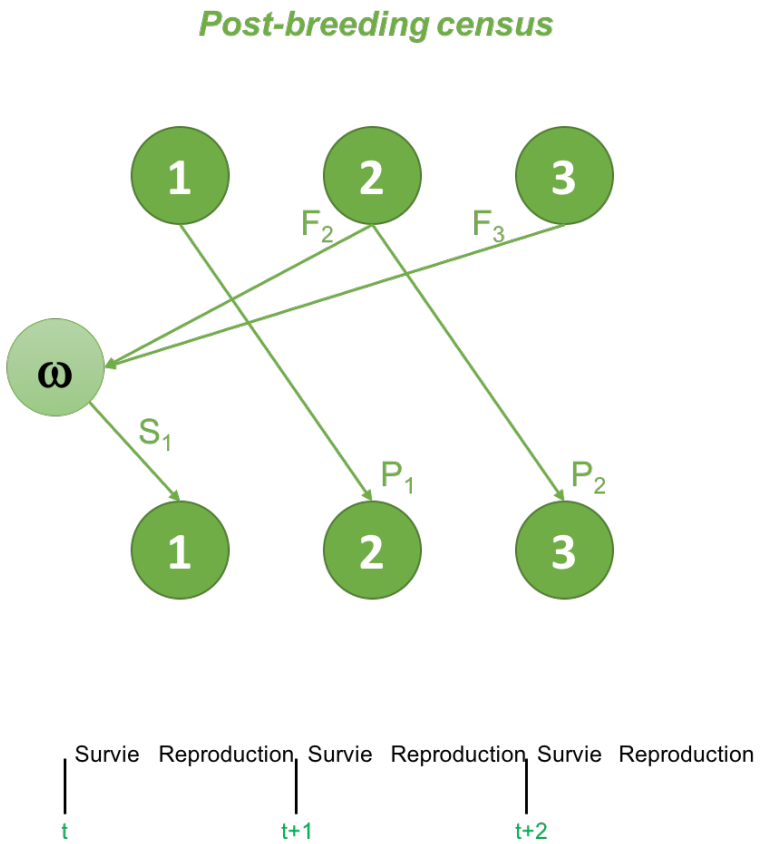
- (i) Juste avant la reproduction. Dans ce cas, $p \to 1$, et on parle d'un recensement pré-reproduction (*pre-breeding census*) ;
- (ii) Juste après la reproduction. Dans ce cas, $p \to 0$, et on parle d'un recensement post-reproduction (*post-breeding census*).



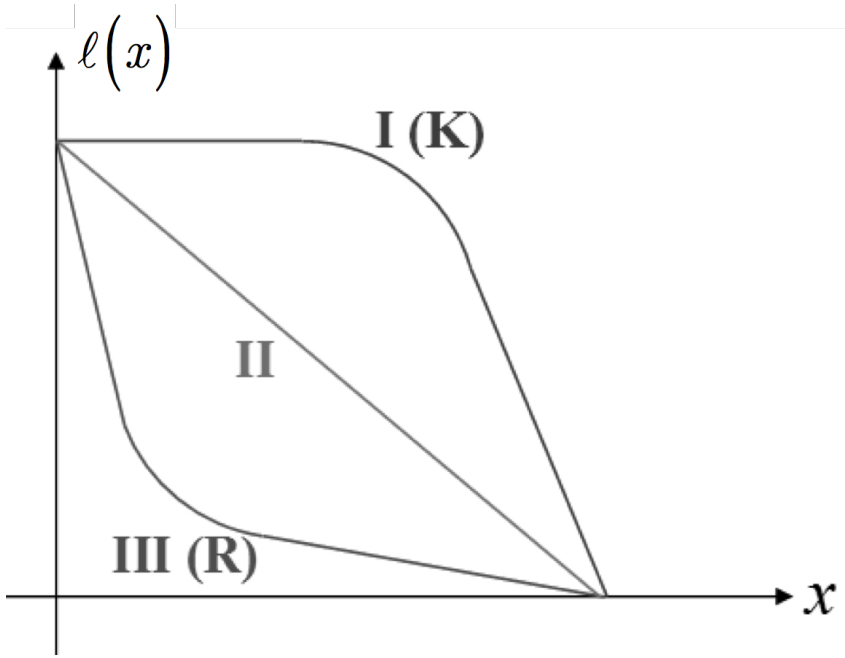
Choisir le début du pas de temps

Fonctionnement *birth-pulse*





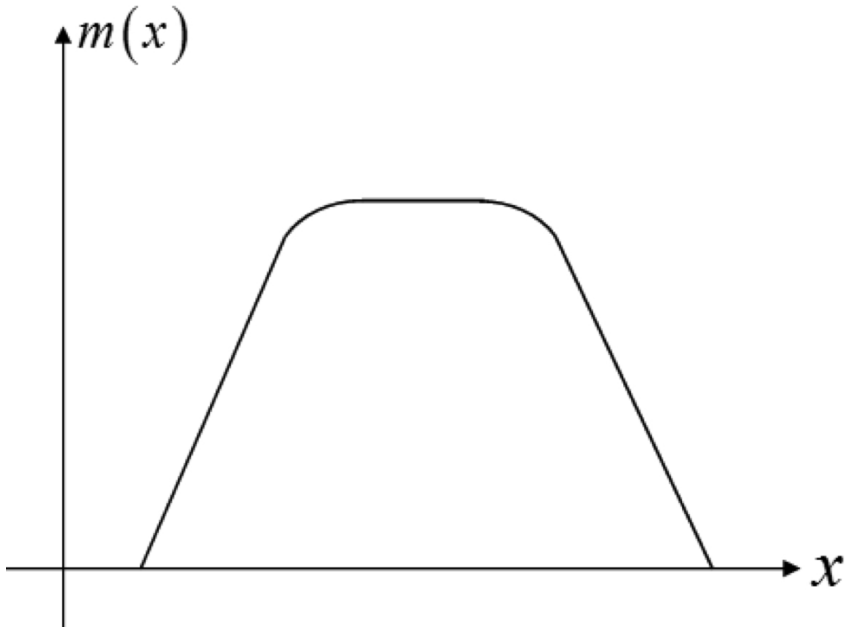
La fonction de survie $\ell(x)$



La fonction $\ell(x)$ correspond à la probabilité de survie depuis la naissance jusqu'à l'âge x.

La fonction de maternité $m(x)$

La fonction $m(x)$ correspond à l'espérance du nombre de jeunes femelles par femelle adulte.



Sous l'hypothèse *birth-pulse* et *pre-breeding census* :

$$P_i \simeq \frac{\ell\,(i+1)}{\ell\,(i)} \quad \text{et} \quad F_i \simeq \ell\,(1)\,m\,(i)$$

Table des matières

1 Introduction

2 Quelques simulations

3 La théorie

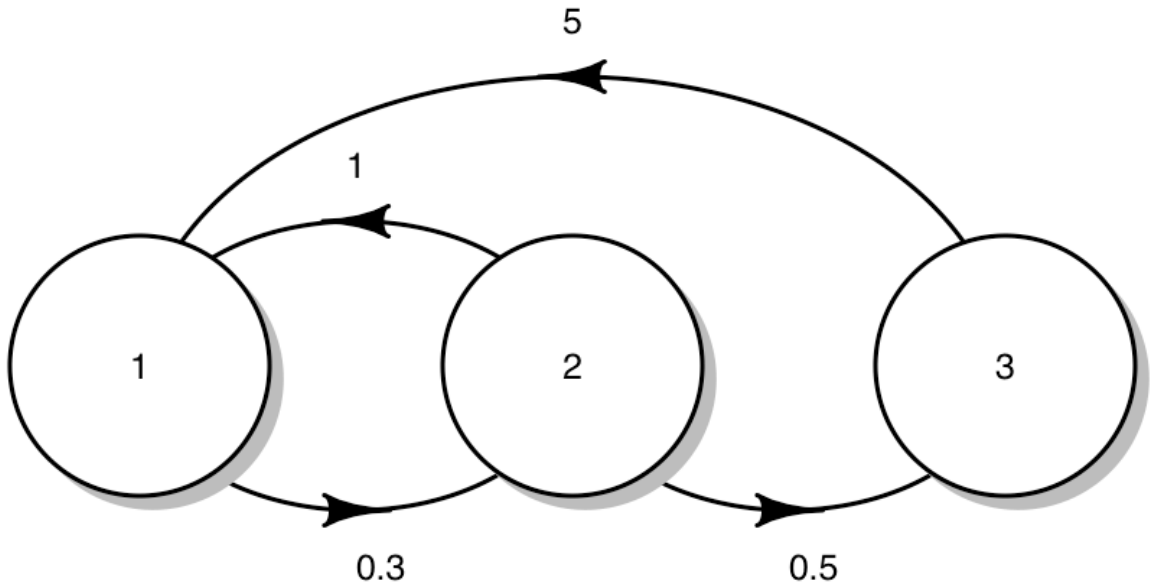
4 Les modèles multirégionaux

5 Références

Plan détaillé

2 Quelques simulations
- Matrice constante
- Influence de la condition initiale
- Influence d'une variation des coefficients
- Variation stochastique des coefficients
- Matrice densité-dépendante

Un exemple jouet



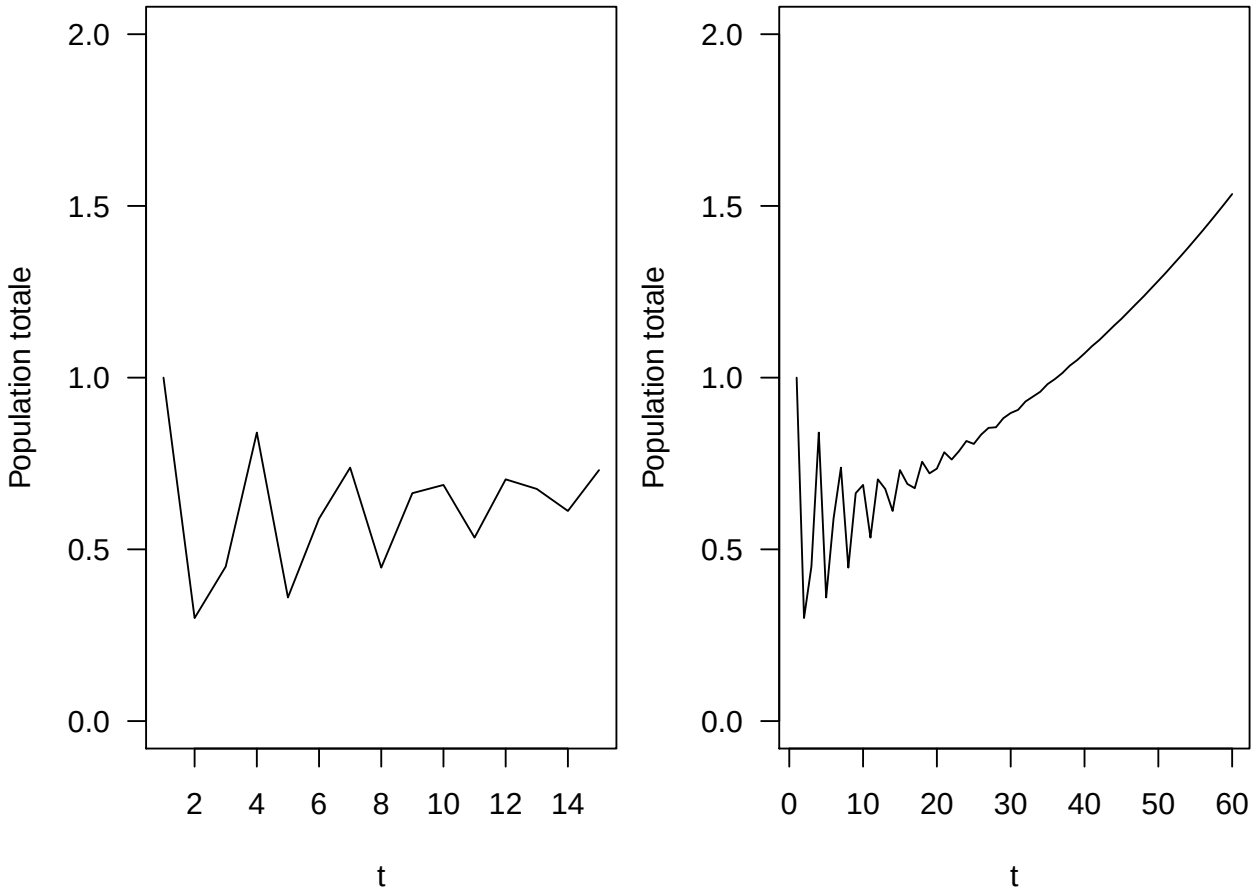
La matrice de Leslie correspondante est :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Considérons la condition initiale $\vec{N_0} = (1, 0, 0)$.

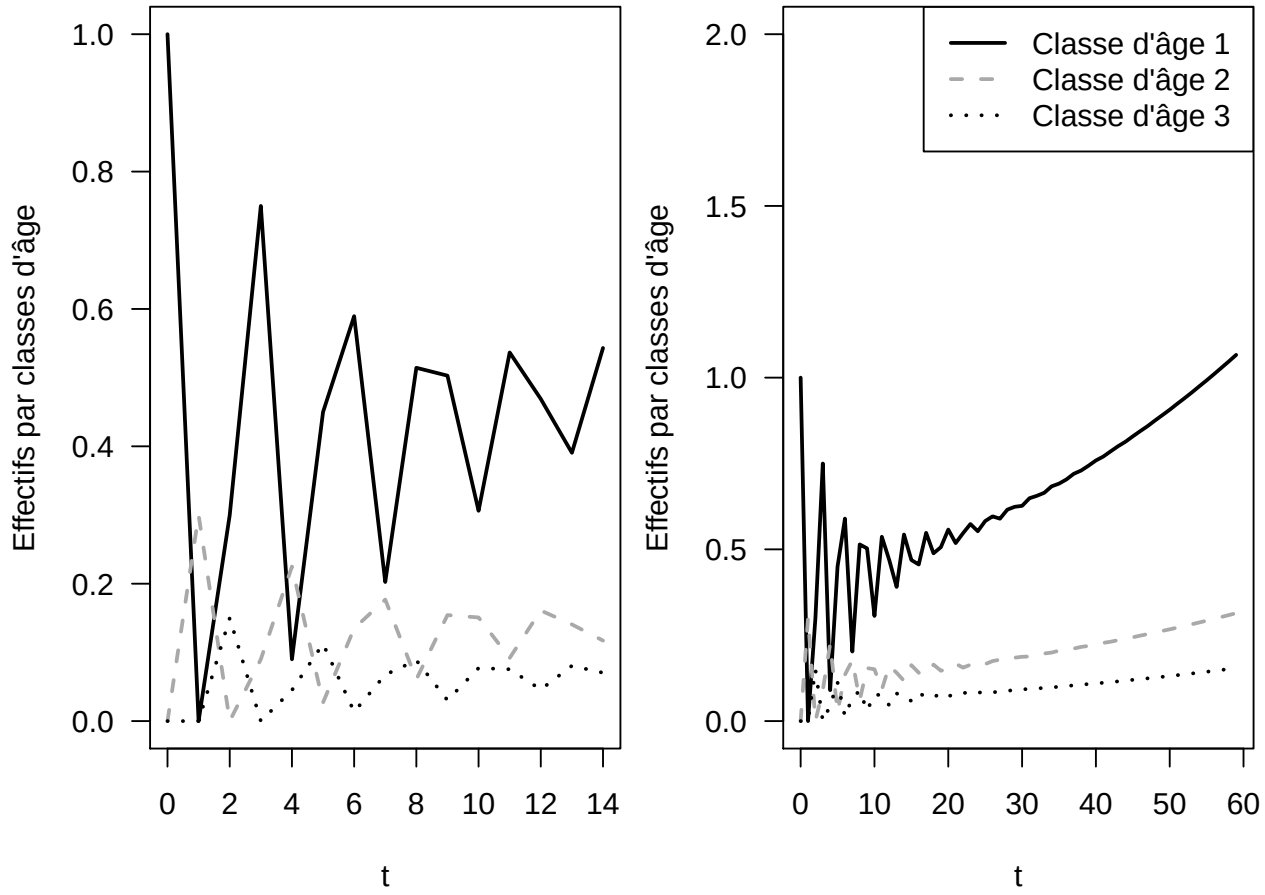
La matrice $\mathbf{M}$ est constante

Population totale



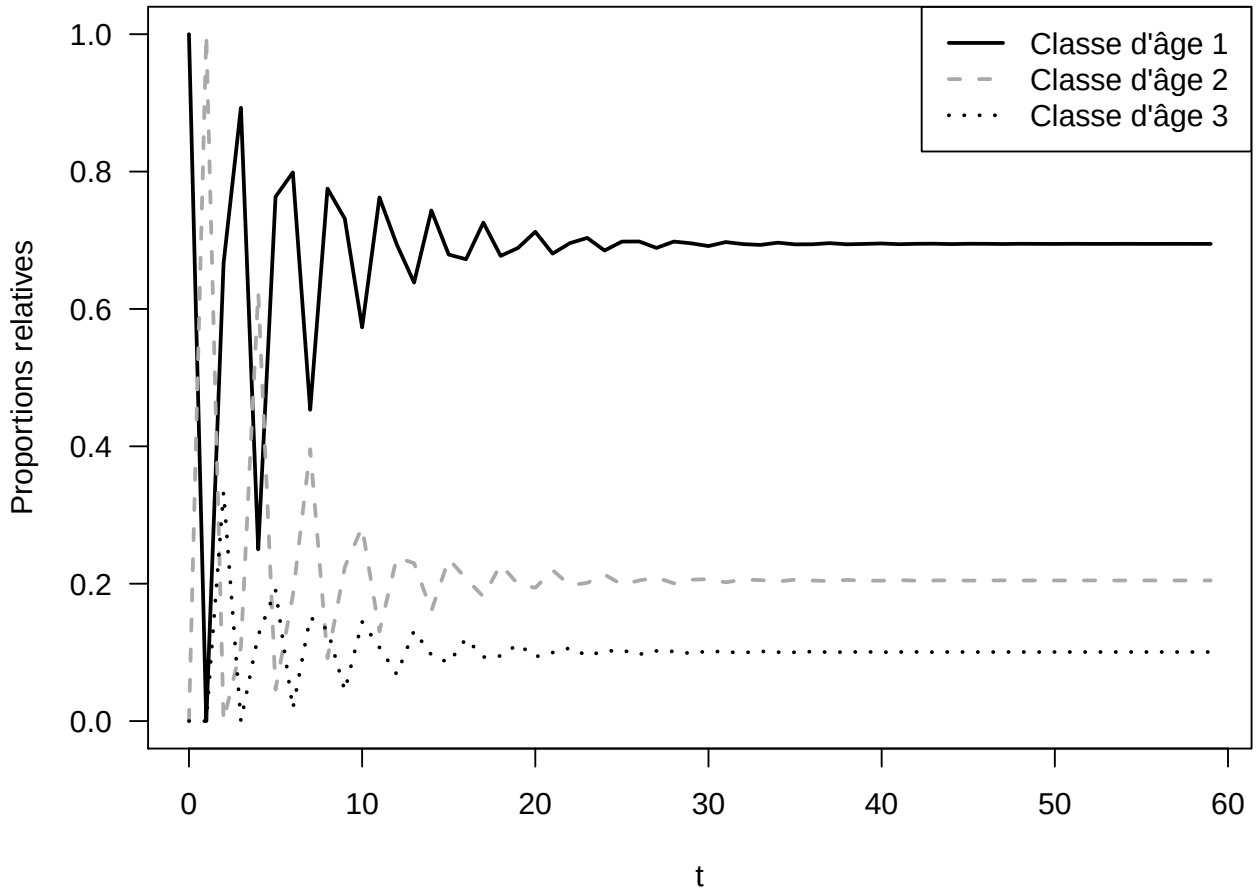
La matrice $\mathbb{M}$ est constante

Effectifs des classes d'âge



La matrice $\mathbb{M}$ est constante

Proportions relatives

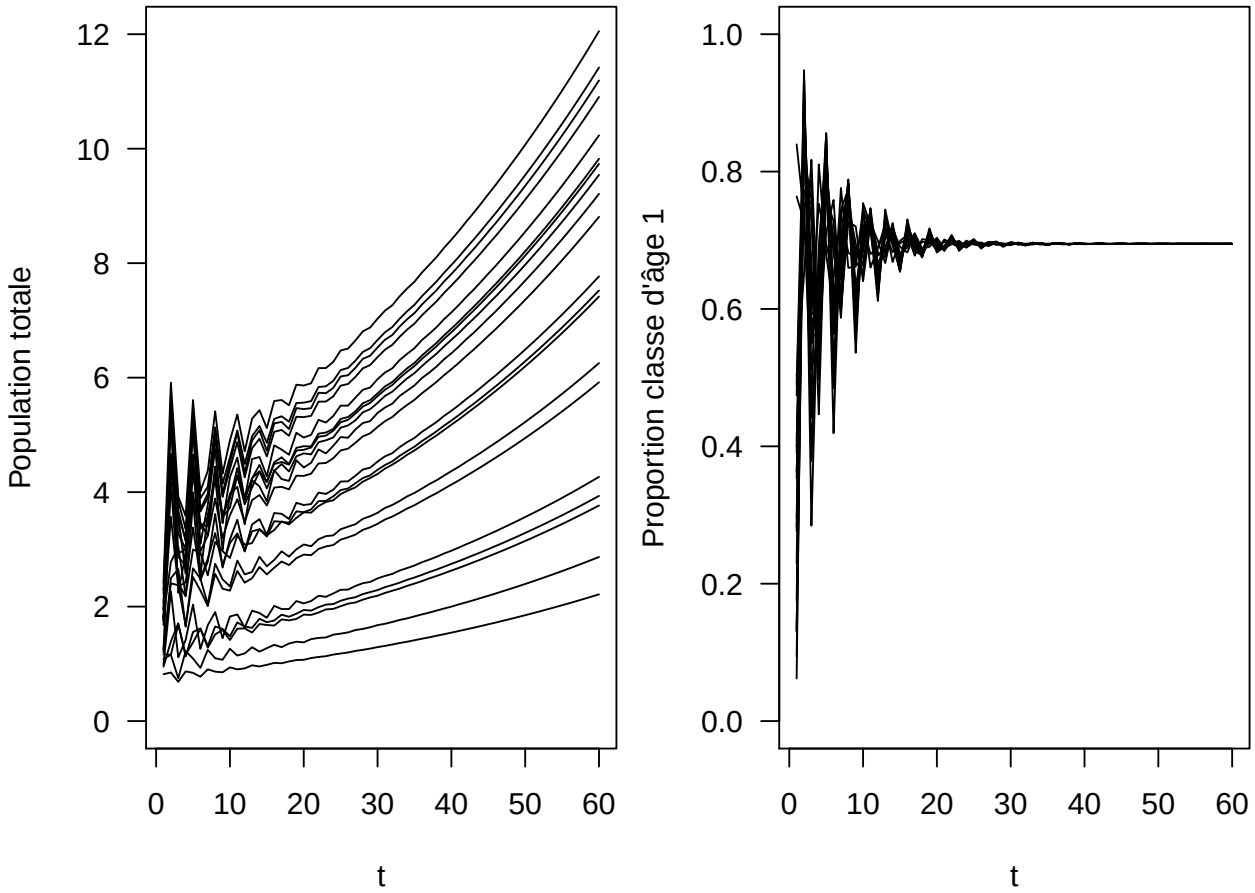


Plan détaillé

2 Quelques simulations
- Matrice constante
- Influence de la condition initiale
- Influence d'une variation des coefficients
- Variation stochastique des coefficients
- Matrice densité-dépendante

La matrice $\mathbb{M}$ est constante

Influence de la condition initiale

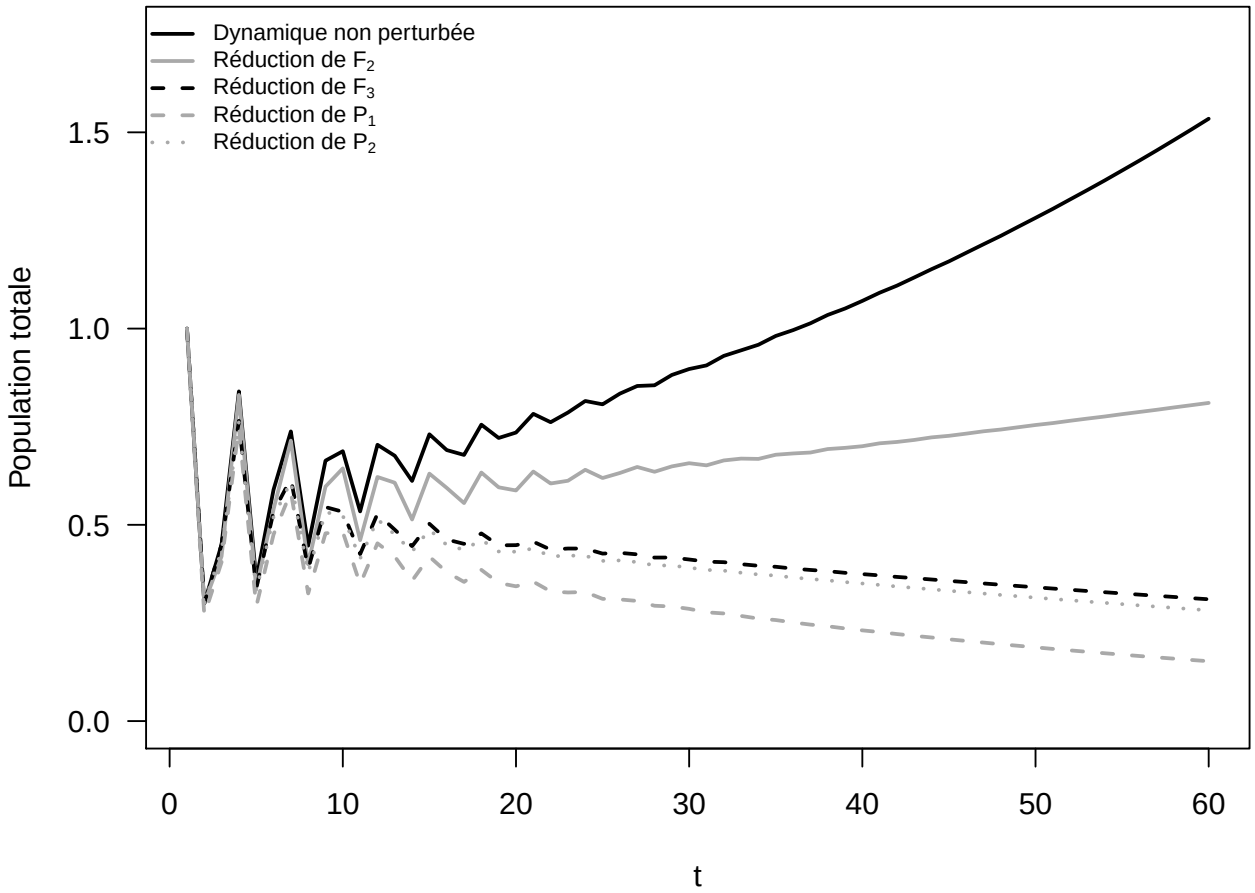


Plan détaillé

2 Quelques simulations
- Matrice constante
- Influence de la condition initiale
- Influence d'une variation des coefficients
- Variation stochastique des coefficients
- Matrice densité-dépendante

La matrice $\mathbb{M}$ est constante

Influence d'une variation de 10% des coefficients



Plan détaillé

2 Quelques simulations
- Matrice constante
- Influence de la condition initiale
- Influence d'une variation des coefficients
- Variation stochastique des coefficients
- Matrice densité-dépendante

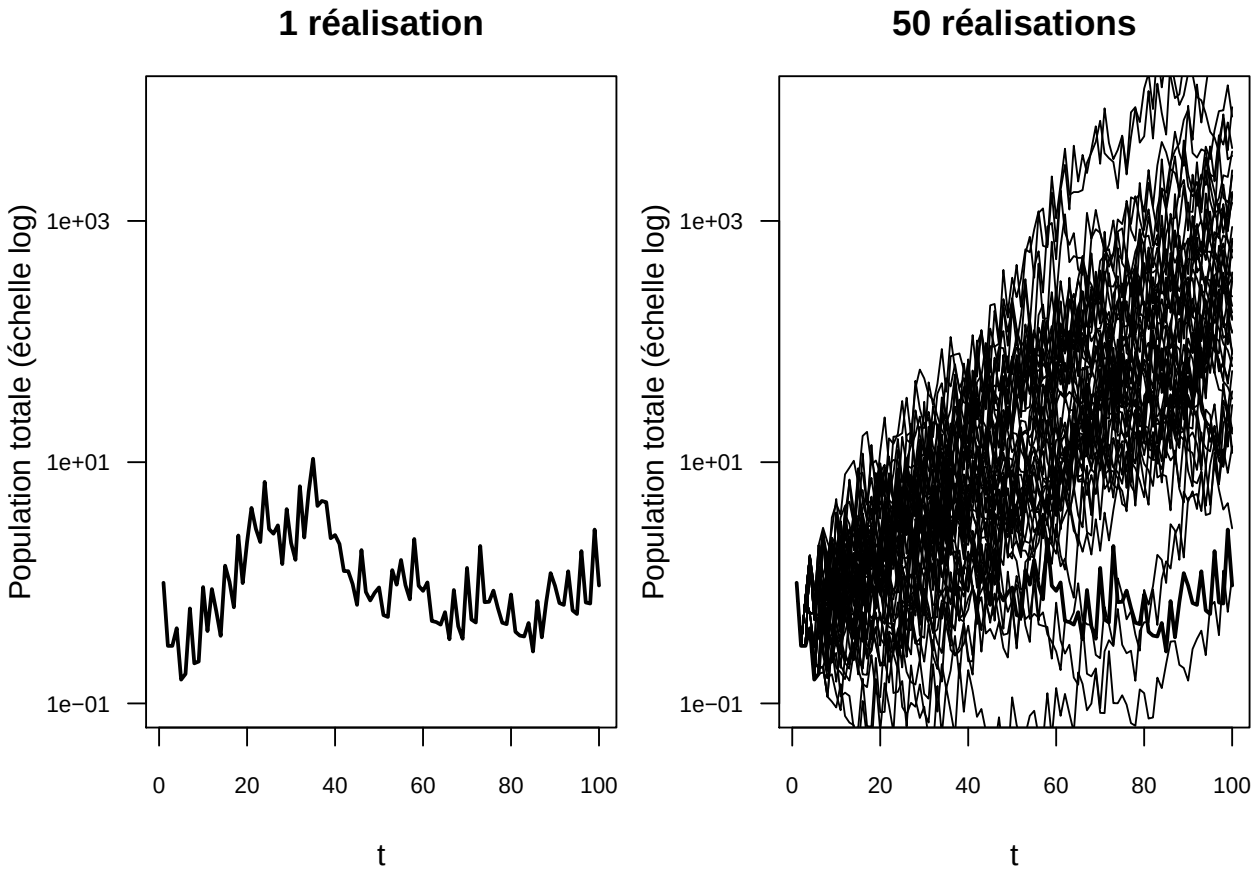
Variation stochastique des coefficients

$$\mathbf{M}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \times h(t) & 5 \times h(t) \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$h(t)$ traduit la façon dont la fécondité varie en fonction des bonnes ou des mauvaises années. Pour faire simple, on peut considérer qu'il y a de très bonnes années avec une forte fécondité $(h(t) = 2)$ et de très mauvaises années avec une faible fécondité $(h(t) = 0.5)$. On considère par ailleurs que les bonnes et les mauvaises années se succèdent aléatoirement et de manière indépendante dans le temps avec une probabilité $1/2$.

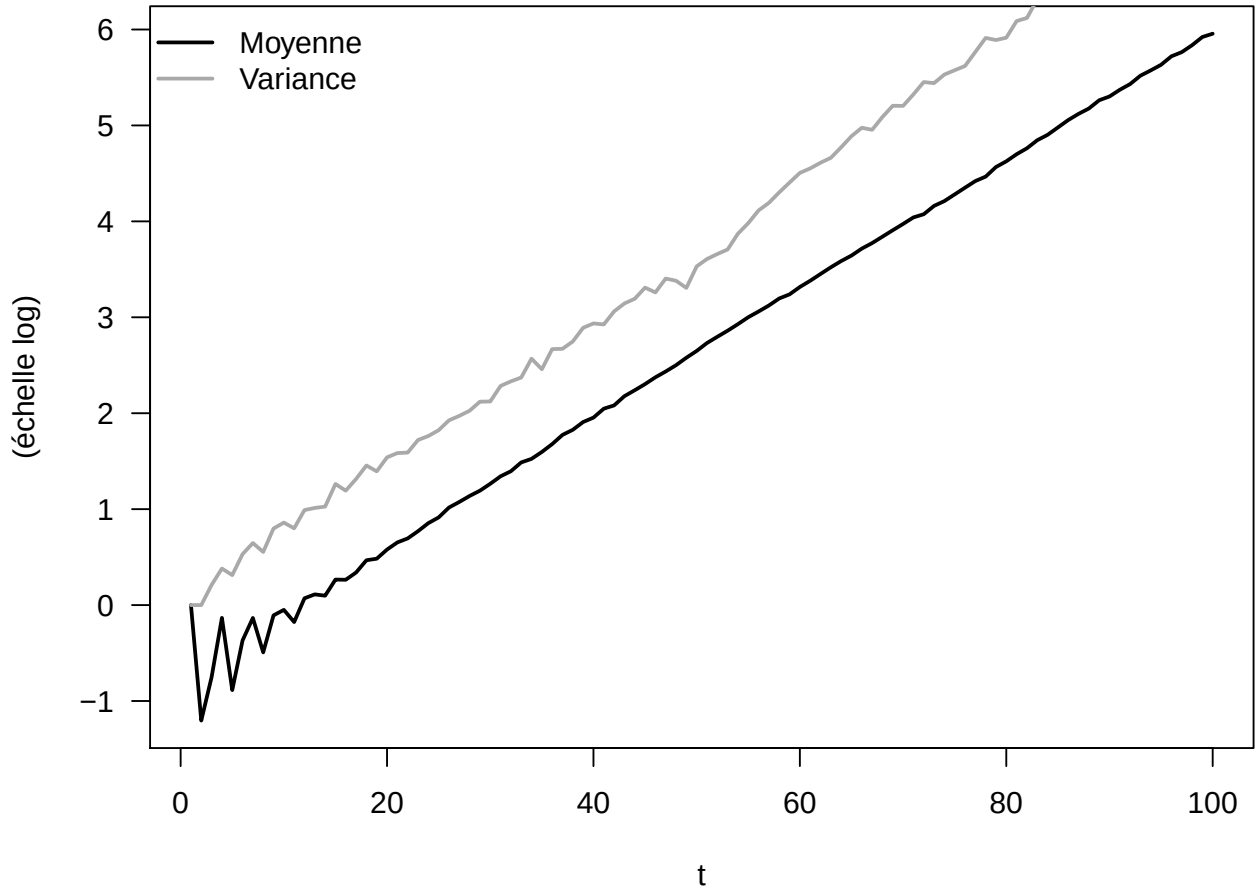
Variation stochastique des coefficients

Dynamique au cours du temps



Variation stochastique des coefficients

Peut-on déceler une tendance ?



La dispersion autour de la moyenne reste la même au cours du temps.

Plan détaillé

2 Quelques simulations
- Matrice constante
- Influence de la condition initiale
- Influence d'une variation des coefficients
- Variation stochastique des coefficients
- Matrice densité-dépendante

La matrice $\mathbf{M}$ est densité-dépendante

$$\mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \times g(N) & 5 \times g(N) \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

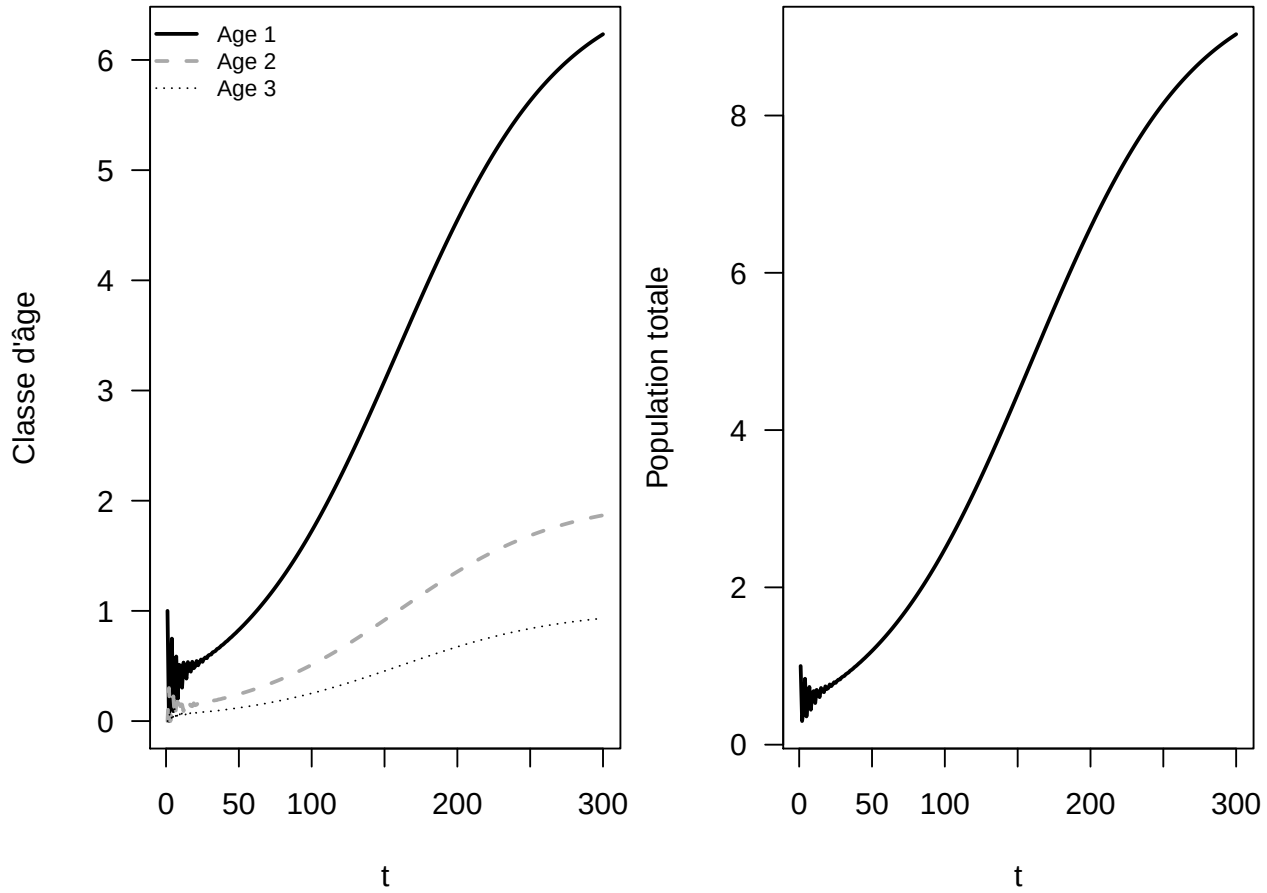
où $N = n_1 + n_2 + n_3$ est la population totale.

$$g(N) = e^{-bN}$$

où b mesure l'importance de la densité-dépendance.

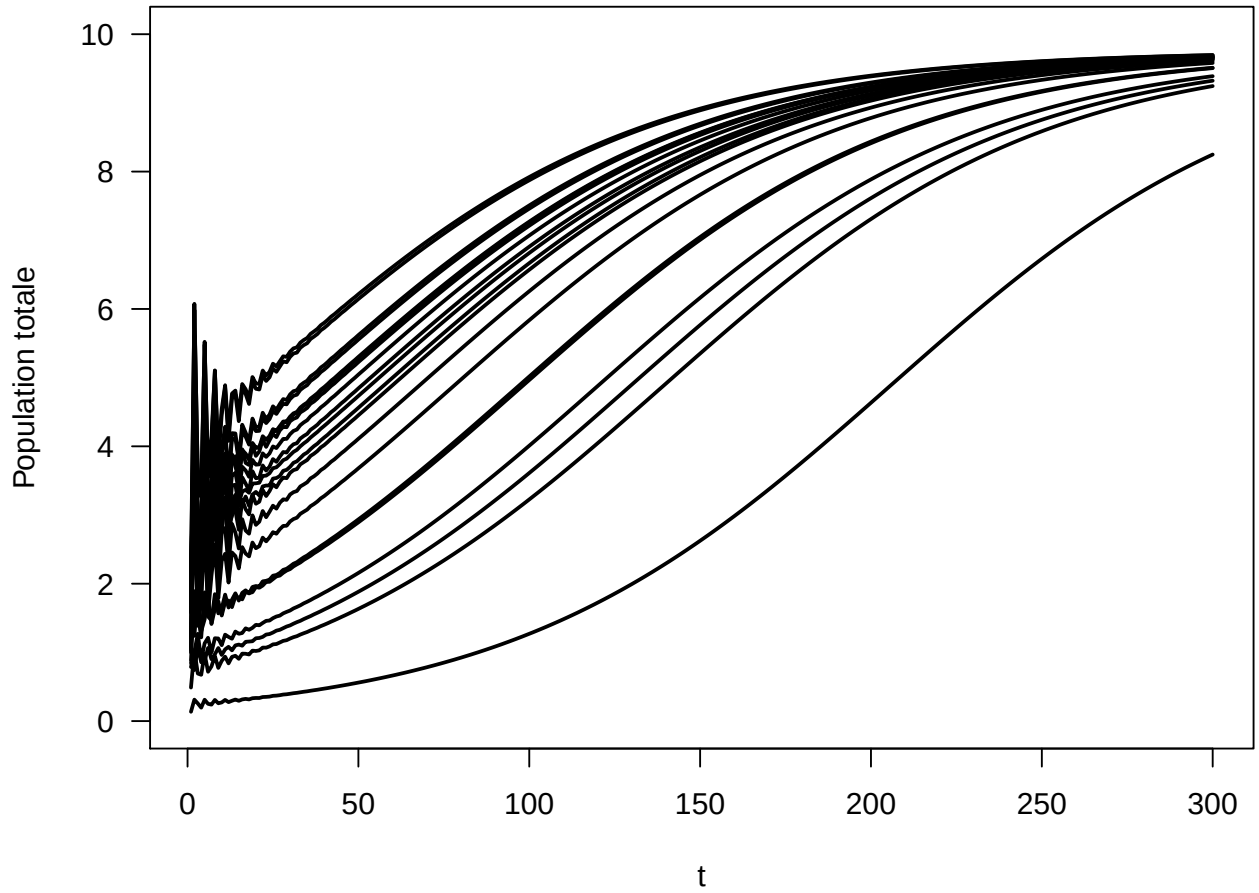
La matrice $\mathbb{M}$ est densité-dépendante

Dynamique temporelle



La matrice $\mathbf{M}$ est densité-dépendante

Dynamique temporelle - influence de la condition initiale



La matrice $\mathbf{M}$ est densité-dépendante

Modification de la fonction de densité-dépendance

$g(N) = Re^{-bN}$ avec $R = 2, 20, 100, 500$

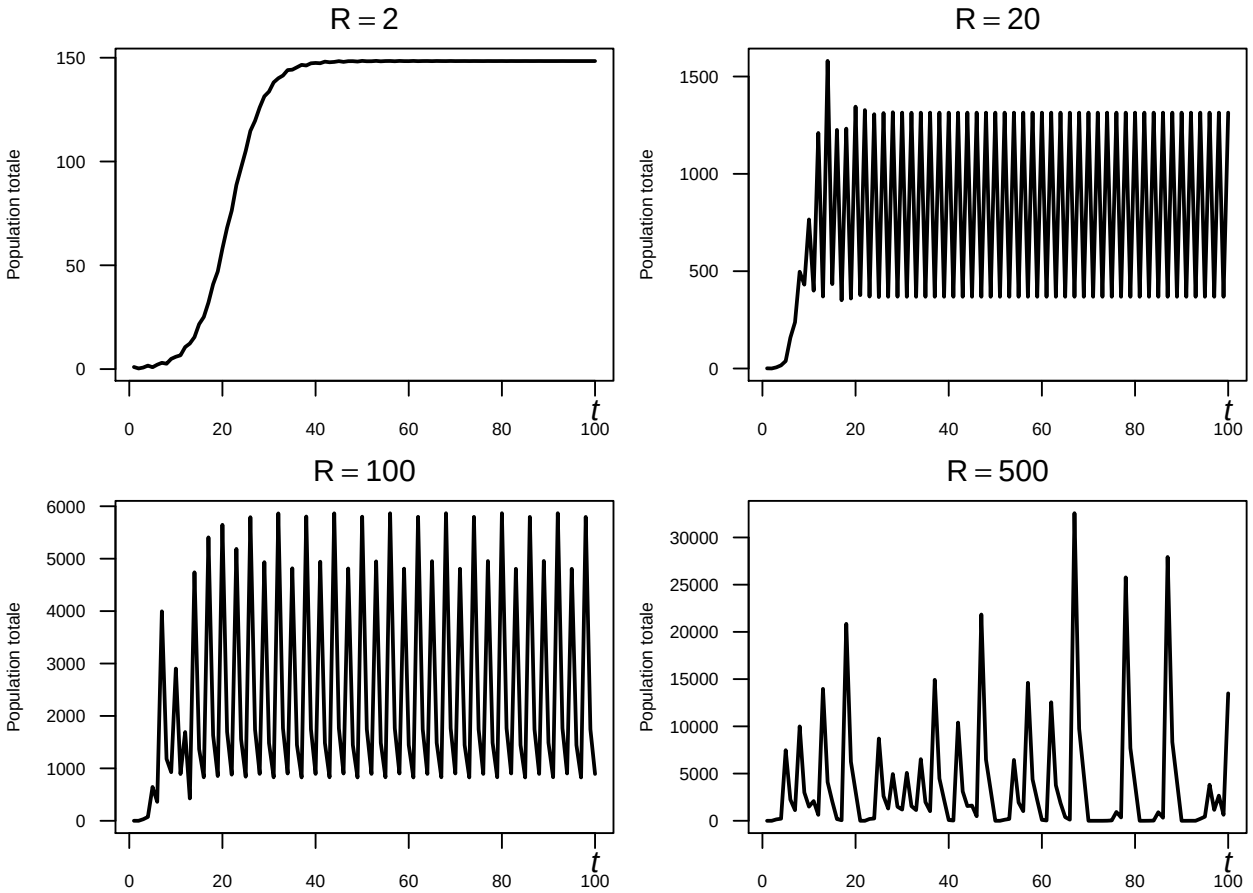


Table des matières

1 Introduction

2 Quelques simulations

3 La théorie

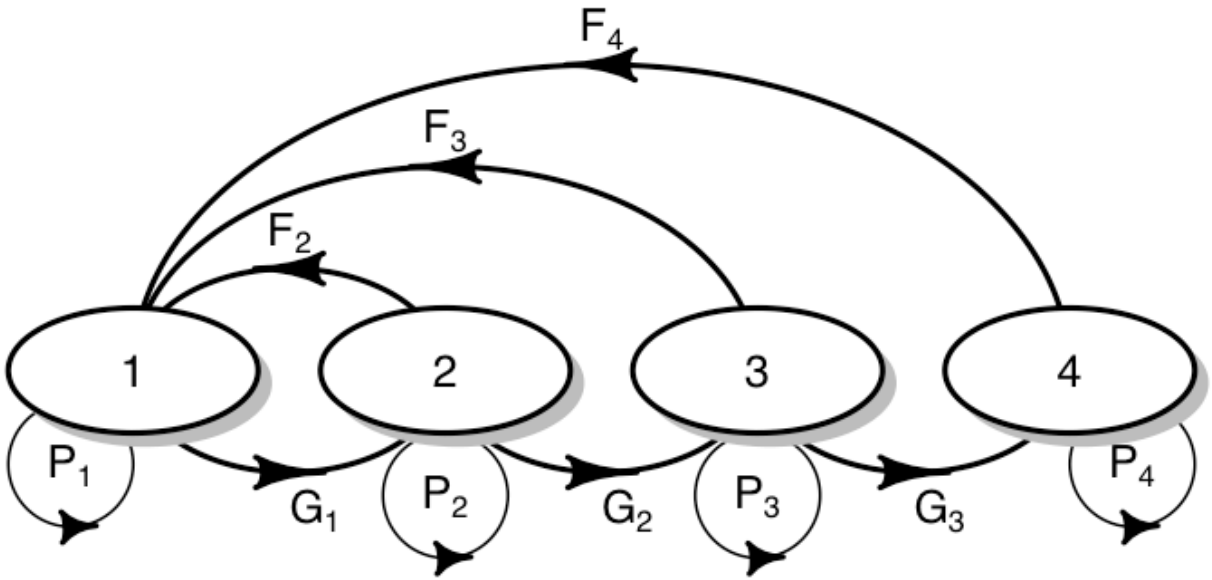
4 Les modèles multirégionaux

5 Références

Plan détaillé

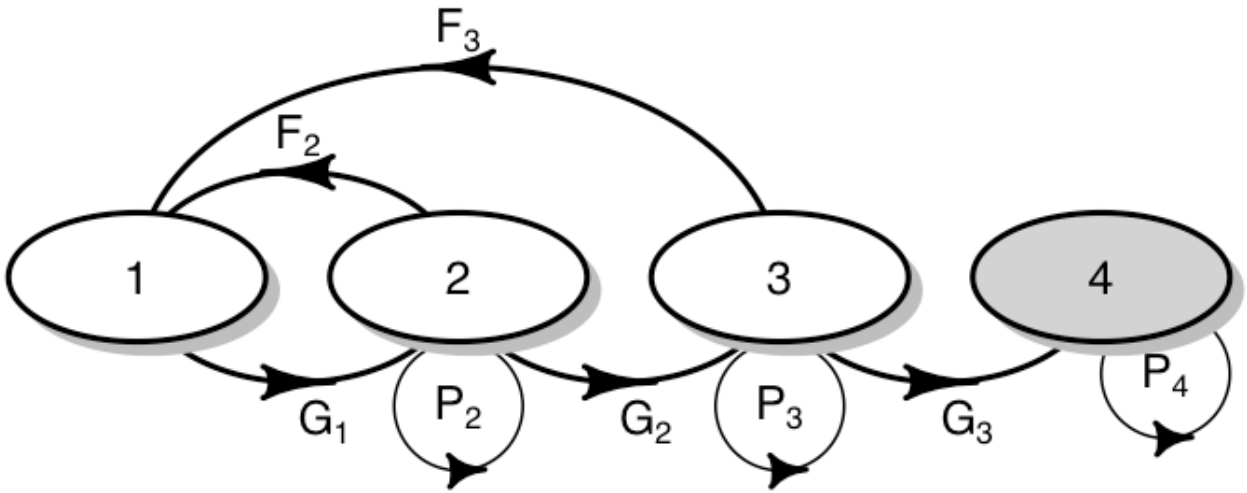
3 La théorie
- Généralisation
- Résolution exacte
- Théorème de Perron-Frobenius
- Caractéristiques démographiques
- La population des États-Unis dans les années 70

Cycle de vie & classes de taille



$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} P_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ G_1 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & P_4 \end{pmatrix}$$

Cycle de vie de l'orque *Orcinus orca*



$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & F_2 & F_3 & 0 \\ G_1 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & P_4 \end{pmatrix}$$

Plan détaillé

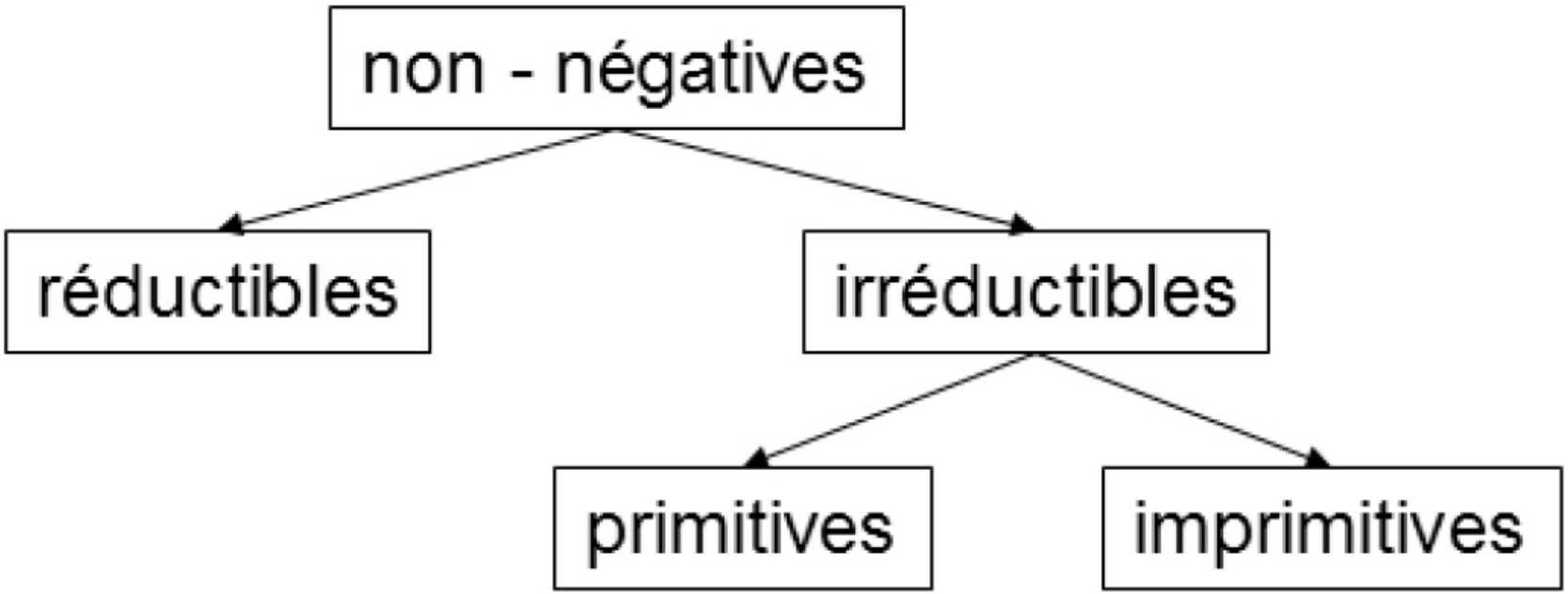
3 La théorie
- Généralisation
- Résolution exacte
- Théorème de Perron-Frobenius
- Caractéristiques démographiques
- La population des États-Unis dans les années 70

Résolution exacte

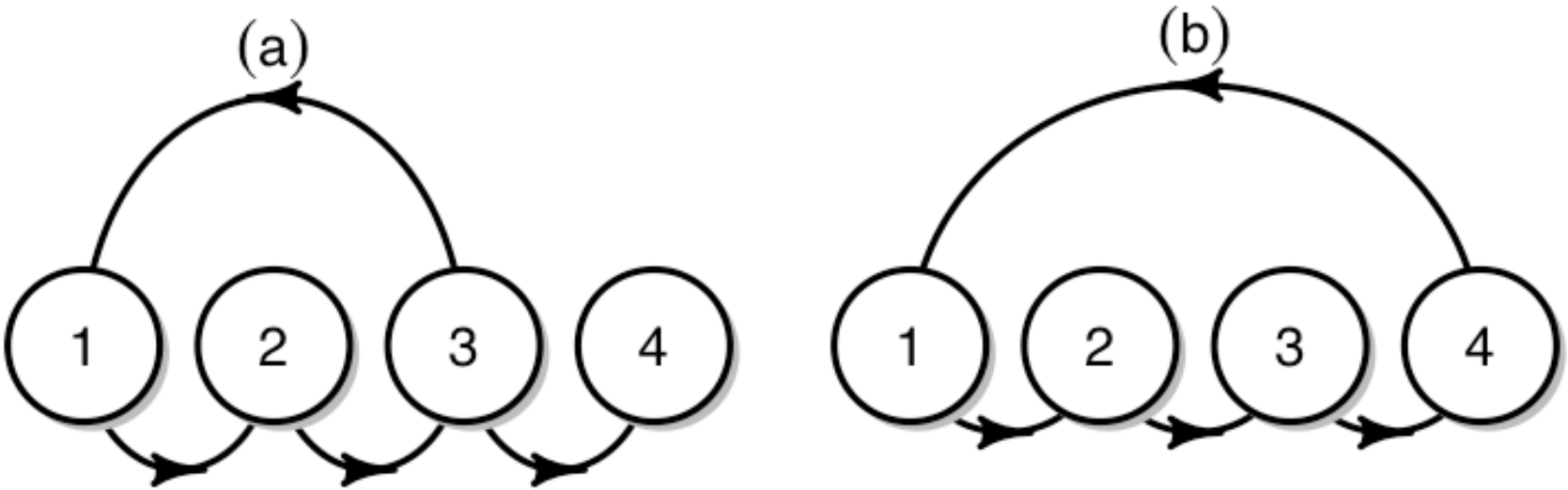
Plan détaillé

3 La théorie
- Généralisation
- Résolution exacte
- Théorème de Perron-Frobenius
- Caractéristiques démographiques
- La population des États-Unis dans les années 70

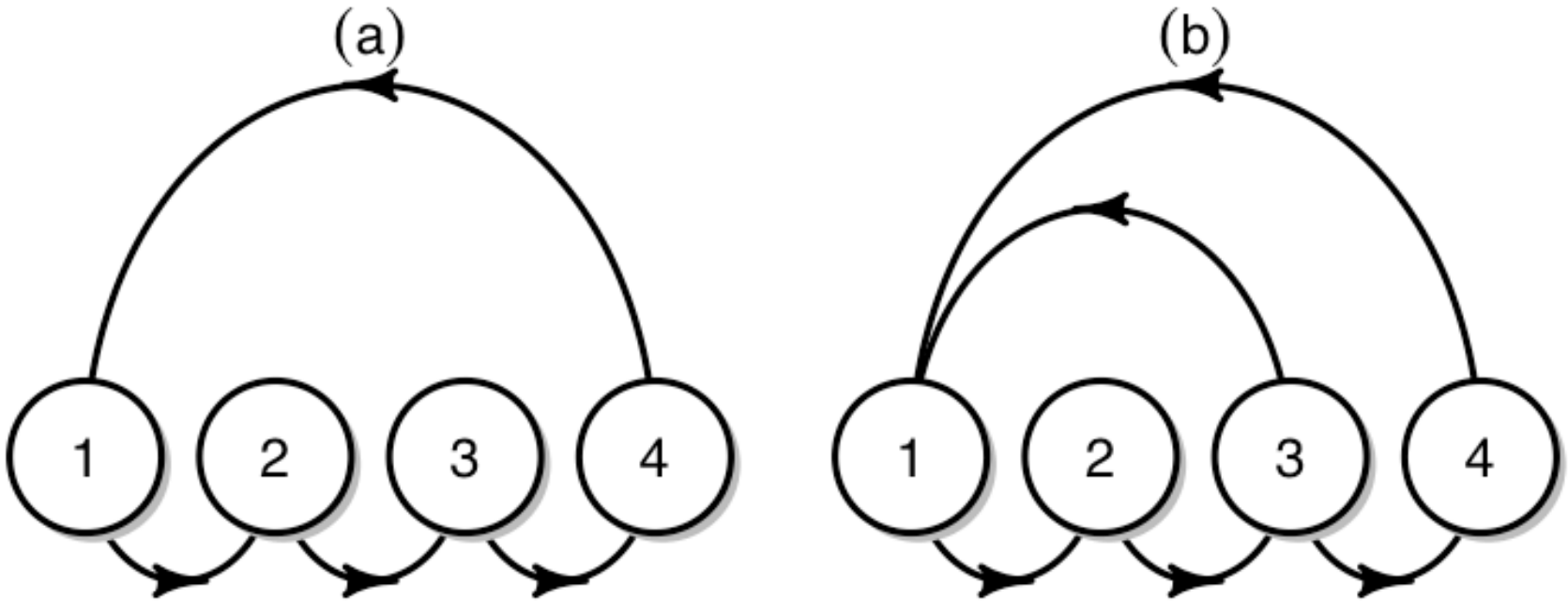
Les matrices non-négatives



Les matrices irréductibles



Les matrices primitives



Une matrice primitive est une matrice irréductible dont le graphe est tel que le plus grand commun diviseur (PGCD) de ses boucles est 1.

Les matrices primitives

Définition mathématique

Supposons que $\mathbf{A}$ soit une matrice non-négative de dimension $\omega \times \omega$. Alors :

- $\mathbf{A}$ est irréductible si et seulement si $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{\omega-1}$ est une matrice positive.
- Si on désigne par b la longueur de la boucle la plus courte du graphe de cycle de vie correspondant à $\mathbf{A}$, alors $\mathbf{A}$ est primitive si et seulement si $\mathbf{A}^{\omega+b(\omega-2)}$ est positive.
- Si on ne connaît pas la longueur des boucles, alors on dira que $\mathbf{A}$ est primitive si et seulement si $\mathbf{A}^{\omega^2-2\omega+2}$ est positive.

Théorème de Perron-Frobenius - Matrice réductible

Theorem (Matrice réductible)

Si **A** *est une matrice* **réductible**, *alors il existe une valeur propre réelle positive* λ_1. *Le module de cette valeur propre est plus grand* **ou égal** *à celui de toutes les autres. Les vecteurs propres à droite et à gauche* $\vec{w}_1$ *et* $\vec{v}_1$ *associés à* λ_1 *ont des composantes réelles et positives.*

Ainsi :

- $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 \geq 0$;
- $\vec{w}_1 \in \mathbb{R}^\omega$ et $\vec{w}_1 \geq 0$;
- $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^\omega$ et $\vec{v}_1 \geq 0$;
- $|\lambda_1| \geq |\lambda_i|$, pour $i > 1$.

Théorème de Perron-Frobenius - Matrice réductible

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est réductible (la classe 3 est isolée des deux autres), et les valeurs propres sont 0, 1.581 (λ_1) et -1.581.

Théorème de Perron-Frobenius - Matrice irréductible

Theorem (Matrice irréductible)

Si **A** *est une matrice* **irréductible**, *avec un indice d'imprimitivité* d *(i.e., PGCD des boucles), alors il existe une valeur propre réelle strictement positive* λ_1, *racine de l'équation caractéristique. Le module de cette valeur propre est plus grand* **ou égal** *à celui de toutes les autres. Les vecteurs propres à droite et à gauche* $\vec{w}_1$ *et* $\vec{v}_1$ *associés à* λ_1 *ont des composantes réelles et strictement positives.*

- Pour $i = 1, \ldots, d$: $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 > 0$, avec $\vec{w}_1 \in \mathbb{R}^\omega$ et $\vec{w}_1 > 0$, avec $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^\omega$ et $\vec{v}_1 > 0$, et $|\lambda_1| = |\lambda_i|$
- Pour $i > d$: $|\lambda_1| > |\lambda_i|$

Théorème de Perron-Frobenius - Matrice irréductible

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

L'indice d'imprimitivité est $d = 3$. Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 1.077$$
$$\lambda_{2,3} = -0.539 + 0.933i$$

Soit en module : $|\lambda_1| = |\lambda_{2,3}| = 1.077$.

Théorème de Perron-Frobenius - Matrice primitive

Theorem (Matrice Primitive)

Si **A** *est une matrice* **primitive**, *il existe une valeur propre réelle strictement positive* λ_1, *racine simple de l'équation caractéristique. Cette valeur propre est strictement plus grande que toutes les autres en module. Les vecteurs propres à droite et à gauche* $\vec{w}_1$ *et* $\vec{v}_1$ *associés à* λ_1 *ont des composantes réelles et strictement positives.*

Il peut exister d'autres valeurs propres réelles, mais $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, $\forall i \in [2; \omega]$, et λ_1 est la seule valeur propre associée à des vecteurs propres $\in \mathbb{R}^\omega$ et strictement positifs :

$$\forall i > 1, \quad \lambda_1 > 0 \quad \vec{w}_1 > 0 \quad \vec{v}_1 > 0 \quad |\lambda_1| > |\lambda_i|$$

Théorème de Perron-Frobenius - Matrice primitive

Exemple (retour aux simulations)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 1.018$$

$$\lambda_2 = -0.509 + 0.691i$$

$$\lambda_3 = -0.509 - 0.691i$$

avec $|\lambda_{2,3}| = 0.858$.

Le vecteur propre à droite de $\mathbf{A}$ associé à λ_1 est $\vec{w}_1 = (0.695, 0.205, 0.100)$.

Le vecteur propre à gauche de $\mathbf{A}$ associé à λ_1 est $\vec{v}_1 = (1.00, 3.39, 4.91)$.

Plan détaillé

3 La théorie
- Généralisation
- Résolution exacte
- Théorème de Perron-Frobenius
- Caractéristiques démographiques
- La population des États-Unis dans les années 70

Caractéristiques démographiques

La matrice $\mathbf{A}$ est primitive

Taux de croissance asymptotique de la population	λ_1
Distribution stable des classes	$\vec{w}_1$
Valeurs reproductives	$\vec{v}_1$
Vitesse de convergence	$\rho = \frac{\lambda_1}{\lvert\lambda_2\rvert}$
Taux de reproduction net	$R_0 = \sum_{i=1}^{\omega} F_i \prod_{j=1}^{i-1} P_j$
Temps de génération	$T = \frac{\ln R_0}{\ln \lambda_1}$

Sensibilités

Soit $\mathbf{S}$ la matrice des sensibilités :

$$\mathbf{S} = \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{ij}}\right) \text{ avec } \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{ij}}\right) = \frac{\vec{v}_1 \vec{w}_1^T}{\vec{v}_1^T \vec{w}_1} \text{ et } \vec{v}_1^T \vec{w}_1 = \vec{v}_1 . \vec{w}_1$$

où $\vec{v}_1$ et $\vec{w}_1$ sont respectivement les vecteurs propres à gauche et à droite associés à la valeur propre dominante λ_1 de la matrice de projection $\mathbf{A}$. Ainsi, la sensibilité de λ_1 à l'un des coefficients a_{ij} est égale à :

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{ij}} = \frac{v_{1i} w_{1j}}{\vec{v}_1^T \vec{w}_1}$$

où v_{1i} est la i^{eme} coordonnée de $\vec{v}_1$ et w_{1j} la j^{eme} coordonnée de $\vec{w}_1$. D'un point de vue géométrique, la sensibilité correspond à la pente de la tangente à la courbe λ_1 au point de valeur a_{ij}.

Élasticités

$$\mathbf{E} = \left(\frac{a_{ij}}{\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{ij}} \right) = \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{S} \circ \mathbf{A}$$

où $\circ$ correspond au produit d'Hadamard.
Si on note $\mathbf{E} = (e_{ij})$, il vient :

$$e_{ij} = \frac{a_{ij}}{\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial \ln \lambda_1}{\partial \ln a_{ij}}$$

ce qui signifie que e_{ij} est la pente de la tangente à la courbe $\ln \lambda_1$ au point de valeur $\ln a_{ij}$. Ainsi, si $e_{ij} = 0.35$, alors une variation de 10% sur a_{ij} correspondra à une variation de 3.5% sur λ_1.

De plus, $\mathbf{E} \geq 0$, $a_{ij} = 0 \Rightarrow e_{ij} = 0$ et $\sum_{i,j} e_{ij} = 1$.

Plan détaillé

3 La théorie
- Généralisation
- Résolution exacte
- Théorème de Perron-Frobenius
- Caractéristiques démographiques
- La population des États-Unis dans les années 70

La population des États-Unis (Keyfitz et Flieger, 1971)

La matrice de projection

Intervalle de projection : 5 ans

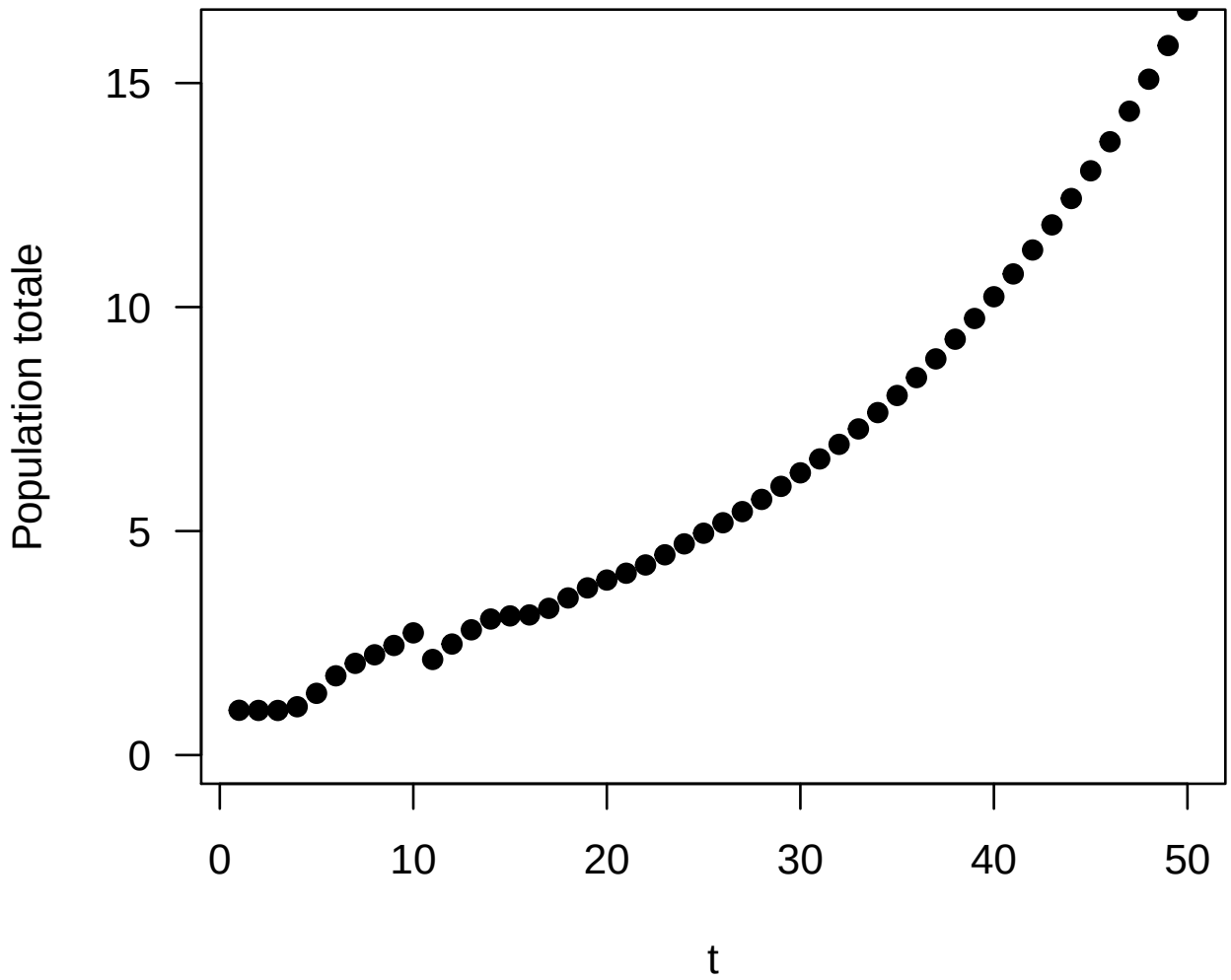
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
0 & 0.00102 & 0.08515 & 0.30574 & 0.40002 & 0.28061 & 0.15260 & 0.06420 & 0.01483 & 0.00089 \\
0.99670 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.99837 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.99780 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.99672 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.99607 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99472 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99240 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98867 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98274 & 0
\end{pmatrix}$$

Caractéristiques démographiques

- $\lambda_1 = 1.05$:une population en croissance de 5% tous les 5 ans (intervalle de projection $=$ 5 ans) ;
- $\rho = 1.3$: convergence rapide vers le régime asymptotique ;
- $R_0 = 1.29$: la population croît ;
- $T = 26.15$ ans.

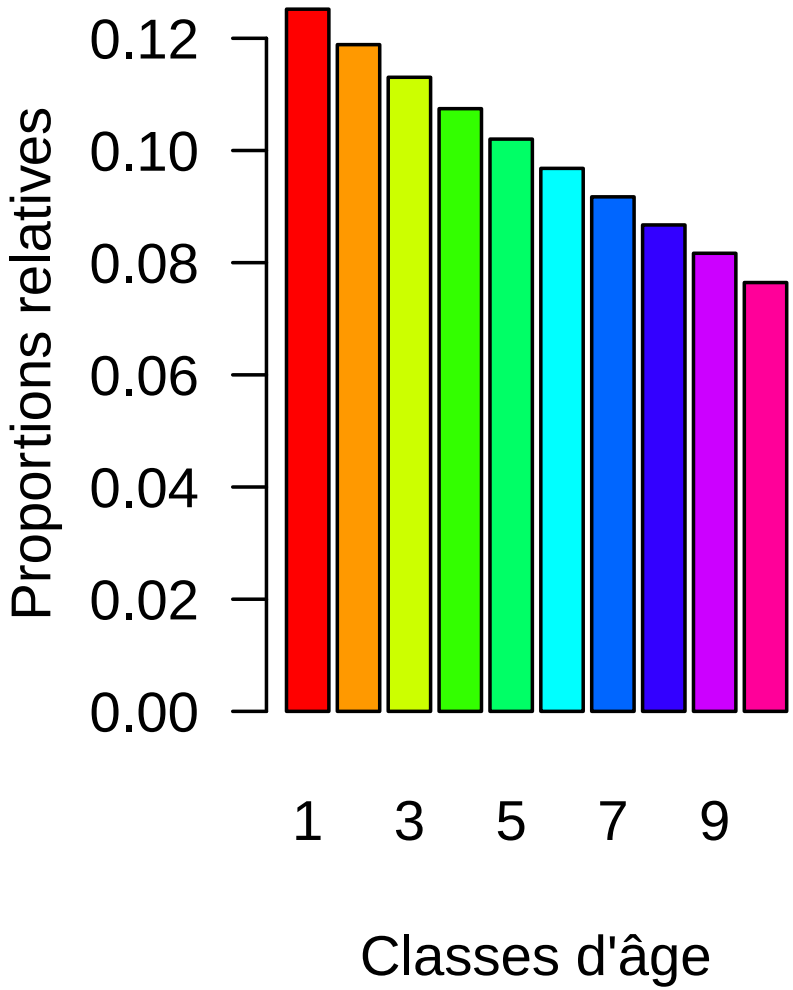
La population des États-Unis

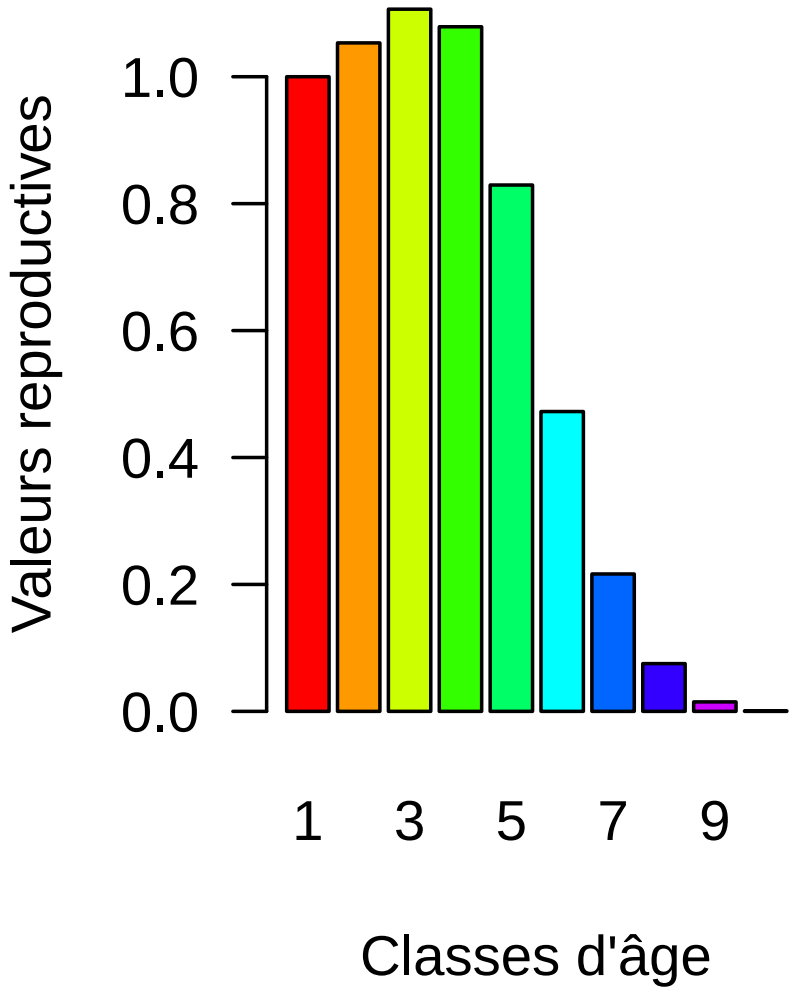
Dynamique temporelle



La population des États-Unis

Distribution d'âge stable ($\vec{w}_1$) et valeurs reproductives ($\vec{v}_1$)





La population des États-Unis

Sensibilités et élasticités

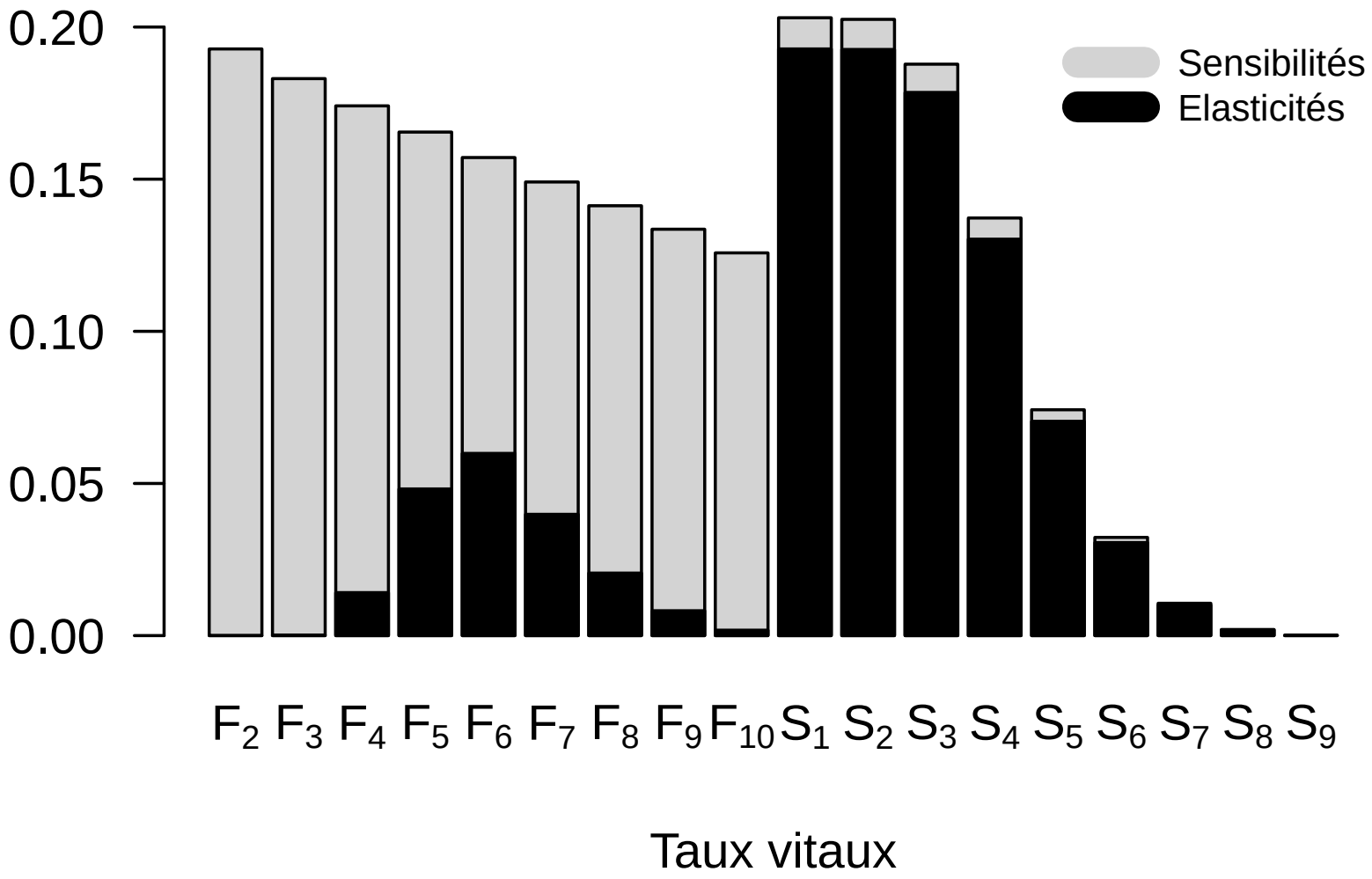


Table des matières

1 Introduction

2 Quelques simulations

3 La théorie

4 Les modèles multirégionaux

5 Références

Plan détaillé

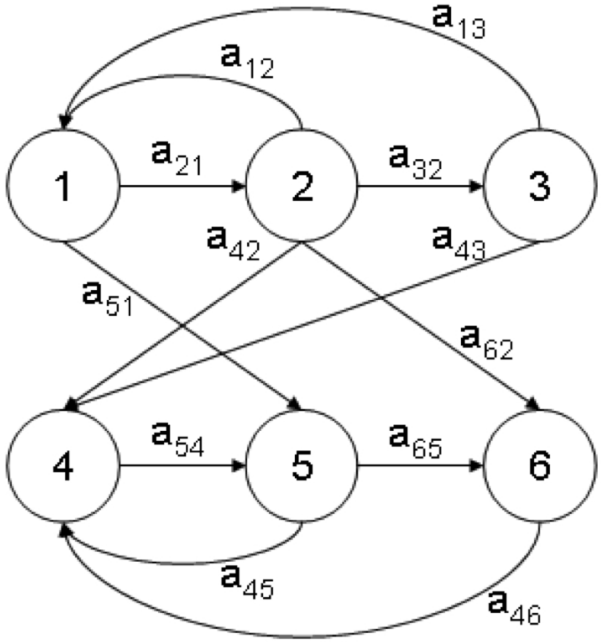
4 Les modèles multirégionaux
- Mise en équations
- L'hirondelle de cheminée

Situation

On considère une population subdivisée en trois classes avec des individus qui se déplacent d'une région 1 vers une région 2.

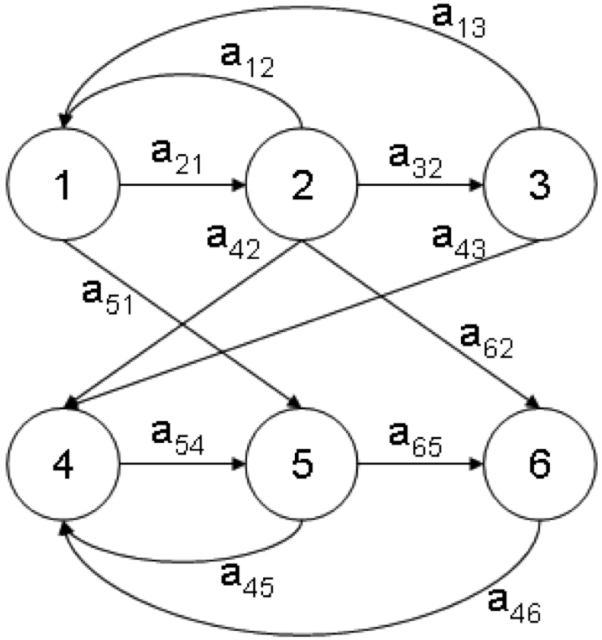
Soit $\vec{N} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \end{pmatrix}^T$ le vecteur population.

Le regroupement par région



$$\vec{N} = \left(\frac{\text{région1}}{\text{région2}} \right) = \left(\begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \hline n_4 \\ n_5 \\ n_6 \end{array} \right)$$

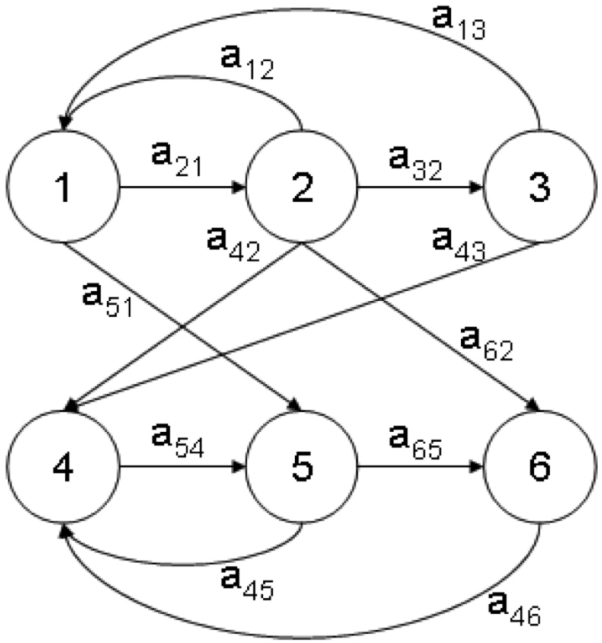
Le regroupement par région



$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{54} & 0 & 0 \\ 0 & a_{62} & 0 & 0 & a_{65} & 0 \end{array}\right)$$

où a_{ij} représente le taux de dispersion du site j vers le site i.

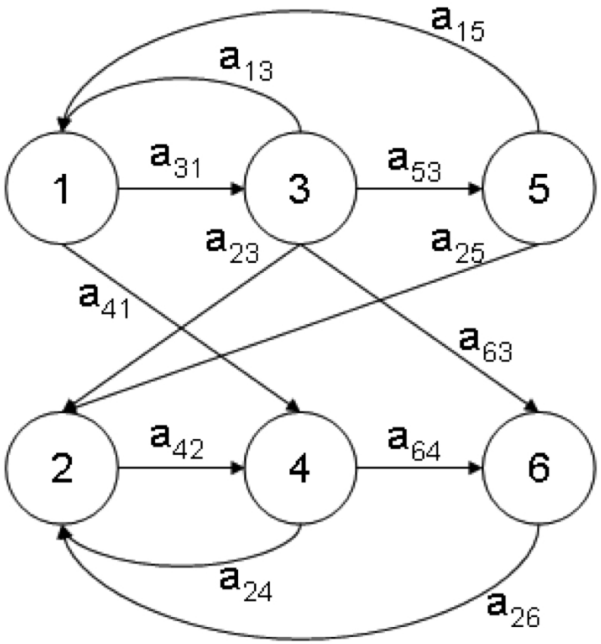
Le regroupement par région



$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{L}_1 & \mathbf{P}_{2\to 1} \\ \hline \mathbf{P}_{1\to 2} & \mathbf{L}_2 \end{array} \right)$$

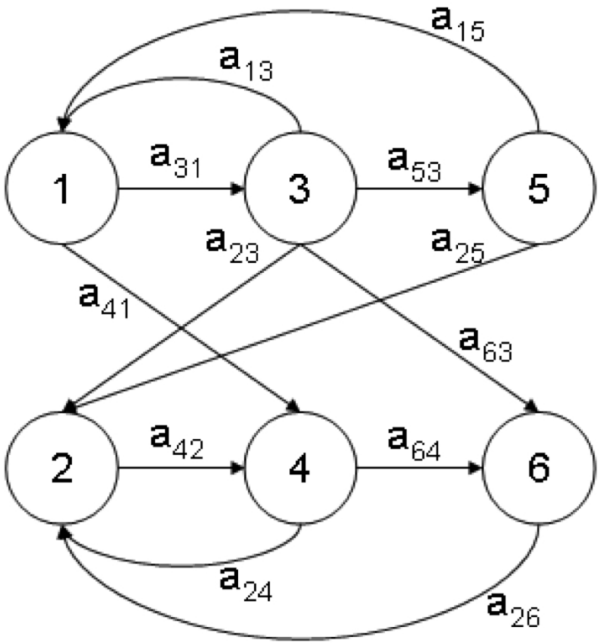
Les sous-matrices $\mathbf{L}_1$ et $\mathbf{L}_2$ sont les matrices de Leslie décrivant la dynamique des classes d'âge à l'intérieur des deux régions, tandis que $\mathbf{P}_{1\to 2}$ et $\mathbf{P}_{2\to 1}$ décrivent le processus de dispersion des individus entre les régions 1 et 2.

Le regroupement par âge



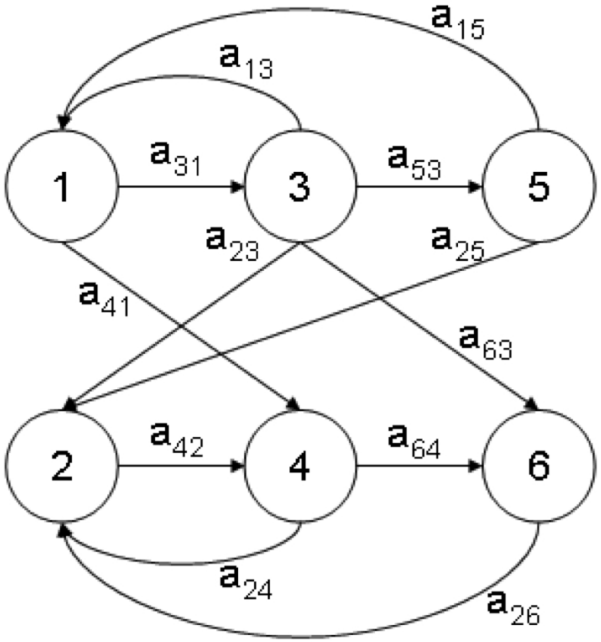
$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \frac{\text{âge1}}{\text{âge2}} \\ \frac{\text{âge3}}{} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ \frac{n_2}{n_3} \\ \frac{n_4}{n_5} \\ n_6 \end{pmatrix}$$

Le regroupement par âge



$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hline a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{53} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{63} & a_{64} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le regroupement par âge



$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \\ \hline \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

Les prédictions des deux modèles seront les mêmes du point de vue de la dynamique de la population, et la théorie des modèles matriciels, comme nous l'avons vue précédemment, s'applique pour les matrices $\mathbf{A}$ écrites selon l'une ou l'autre des formulations.

Plan détaillé

4 Les modèles multirégionaux
- Mise en équations
- L'hirondelle de cheminée

L'hirondelle de cheminée, *Hirundo rustica*

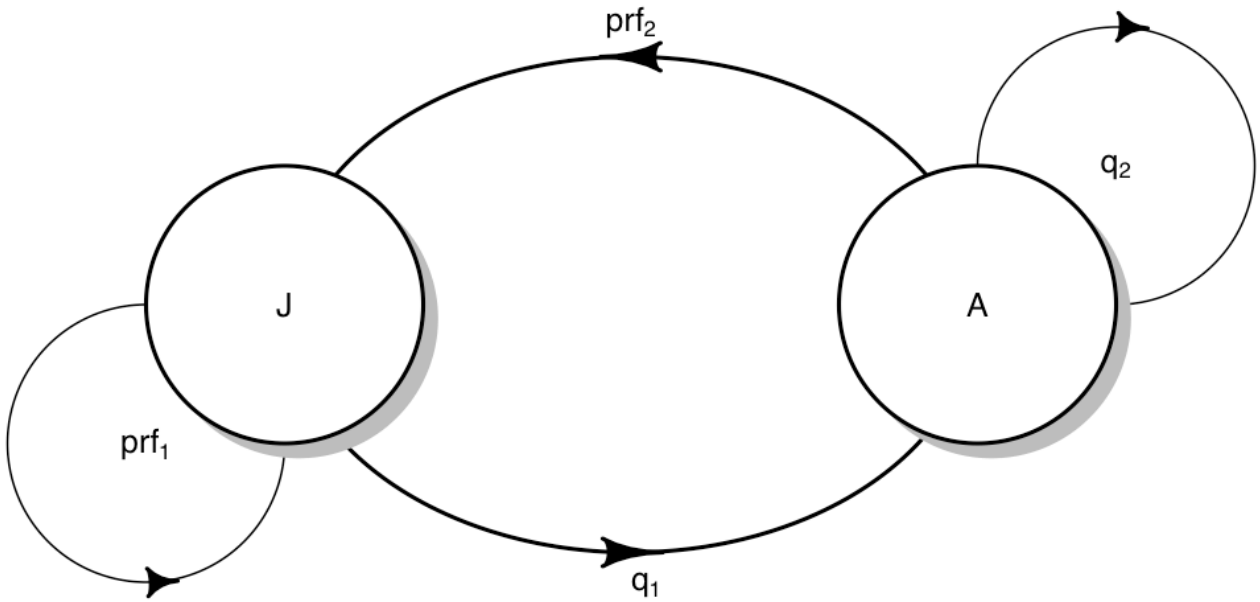
Les hypothèses

- Population des femelles chaque année au printemps, juste avant la reproduction ;
- Deux classes : les jeunes ($\leqslant 1$ an) et les adultes ($\geqslant 1$ an) ;
- Les jeunes donnent naissance à f_1 jeunes ;
- Les adultes donnent naissance à f_2 jeunes ;
- Une fraction p des jeunes survit pour se reproduire ;
- Une fraction q_1 des jeunes devient adultes ;
- Une fraction q_2 des adultes reste adultes ;
- Le sex-ratio est équilibré, $r = 0.5$.

L'hirondelle de cheminée, *Hirundo rustica*

Le cycle de vie

$$\begin{cases} J_{t+1} = pr\,f_1 J_t + pr\,f_2 A_t \\ A_{t+1} = q_1 J_t + q_2 A_t \end{cases}$$



L'hirondelle de cheminée, *Hirundo rustica*

Application numérique

- $f_1 = 3$ et $f_2 = 6$
- $p = 0.2$
- $q_1 = 0.5$ et $q_2 = 0.65$
- $r = 0.5$

Ce qui conduit à

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.65 \end{pmatrix}$$

L'hirondelle de cheminée, *Hirundo rustica*

Caractéristiques démographiques

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.65 \end{pmatrix}$$

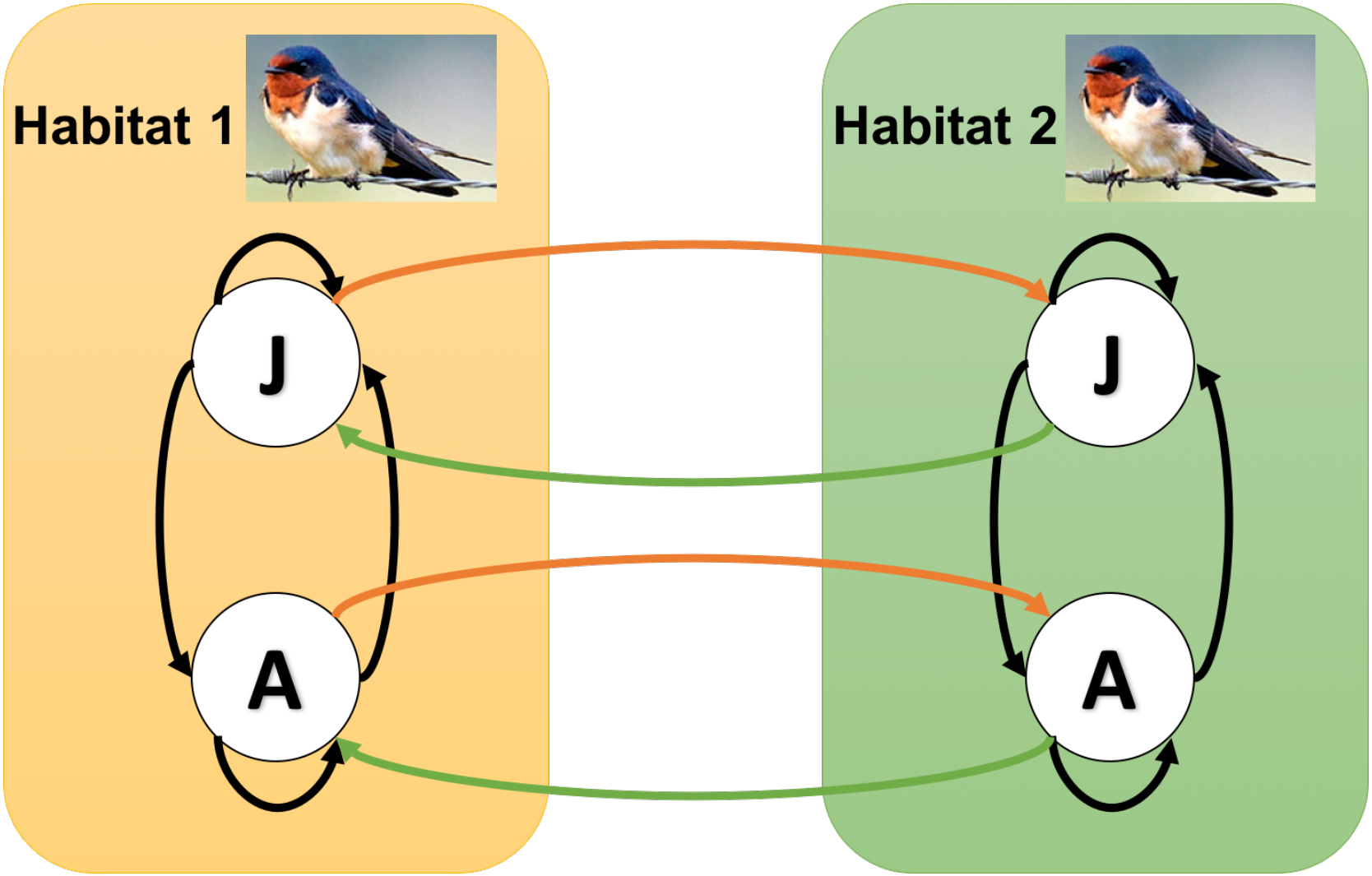
Les valeurs propres de $\mathbf{M}$ sont solutions de
$\lambda^2 - \mathrm{tr}\mathbf{M}\lambda + \det \mathbf{M} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 0.95\lambda - 0.105 = 0$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \mathbf{1.05}$ et $\lambda_2 = -0.1$

Le vecteur propre associé à λ_1 est $W_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0.44} \\ 0.56 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ λ_1 est le taux d'accroissement de la population à long terme.
$\rightarrow$ W_1 contient les proportions relatives des deux classes.

Compétition pour l'espace



Formulation matricielle - **par habitat**

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ A_1 \\ \hline J_2 \\ A_2 \end{pmatrix}_{t+1} = \left(\begin{array}{cc|cc} rpf_{1,1} & rpf_{2,1} & \alpha_{21} & 0 \\ q_{1,1} & q_{2,1} & 0 & \beta_{21} \\ \hline \alpha_{12} & 0 & rpf_{1,2} & rpf_{2,2} \\ 0 & \beta_{12} & q_{1,2} & q_{2,2} \end{array}\right) \begin{pmatrix} J_1 \\ A_1 \\ \hline J_2 \\ A_2 \end{pmatrix}_{t}$$

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ A_1 \\ \hline J_2 \\ A_2 \end{pmatrix}_{t+1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{M_1} & \mathbf{D_{2,1}} \\ \hline \mathbf{D_{1,2}} & \mathbf{M_2} \end{array}\right) \begin{pmatrix} J_1 \\ A_1 \\ \hline J_2 \\ A_2 \end{pmatrix}_{t}$$

- $f_{k,i}$, $q_{k,i}$: fécondité et survie, classe k habitat i
- $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$: dispersion jeunes et adultes, habitat $i \rightarrow$ habitat j
- $\mathbf{M_i}$: matrice de Leslie, habitat i
- $\mathbf{D_{i,j}}$: matrice de dispersion, habitat $i \rightarrow$ habitat j

Formulation matricielle - **par classe**

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \hline A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}_{t+1} = \left(\begin{array}{cc|cc} rpf_{1,1} & \alpha_{21} & rpf_{2,1} & 0 \\ \alpha_{12} & rpf_{1,2} & 0 & rpf_{2,2} \\ \hline q_{1,1} & 0 & q_{2,1} & \beta_{21} \\ 0 & q_{1,2} & \beta_{12} & q_{2,2} \end{array}\right) \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \hline A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}_t$$

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \hline A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}_{t+1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{F_1} & \mathbf{F_2} \\ \hline \mathbf{S_1} & \mathbf{S_2} \end{array}\right) \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \hline A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}_t$$

- $\mathbf{F_k}$: matrice de reproduction-dispersion, classe k
- $\mathbf{S_k}$: matrice de survie-dispersion, classe k

Application numérique

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0.3 & 0.6 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.65 & 0 & 0.1 \\ \hline 0.1 & 0 & 0.3 & 0.6 \\ 0 & 0.1 & 0.5 & 0.65 \end{array}\right)$$

- 10% des individus dispersent ;
- Valeur propre dominante : $\lambda_1 = \mathbf{1.15}$, la population croît ;
- Vecteur propre associé à λ_1 :
  $\mathbf{W_1} = \begin{pmatrix} 0.22 & 0.28 & 0.22 & 0.28 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}}$

  Dans chaque habitat il y a 22% de jeunes et 28% d'adultes.

Table des matières

1 Introduction

2 Quelques simulations

3 La théorie

4 Les modèles multirégionaux

5 Références

Références bibliographiques

- Caswell H. 2001. *Matrix population models : construction, analysis and interpretation*. Sinauer (eds) : 722p.
- Keyfitz, N. et Flieger, W. (1971). *Population : facts and methods of demography*. W.H. Freeman (ed.), San Francisco, California, USA.
- Leslie P. 1945. On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika*. 33 :183–212.
- Lefkovitch L. 1965. The study of population growth in organisms grouped by stages. *Biometrics*. 21 :1–18.
- Leslie P. 1948. Some further notes on the use of matrices in population mathematics. *Biometrika*. 35 :213.
- Usher MB. 1966. A Matrix Approach to the Management of Renewable Resources, with Special Reference to Selection Forests. *Journal of Applied Ecology*. 3 :355–367.