

Chapitre 2 : Bifurcations dans \mathbb{R}^2

Sandrine CHARLES (18/12/2008)

| | |
|--|----|
| 1. Bifurcations dans \mathbb{R}^2 à un paramètre..... | 2 |
| 1.1. Bifurcation selle-noeud (saddle-node)..... | 2 |
| 1.2. Bifurcation fourche (« pitchfork »)..... | 5 |
| 1.3. Bifurcation verticale..... | 9 |
| 2. Bifurcation générique de Poincaré-Andronov-Hopf..... | 11 |
| 2.1. Bifurcation super-critique de Poincaré-Andronov-Hopf..... | 11 |
| 2.2. Bifurcation sous-critique de Poincaré-Andronov-Hopf..... | 14 |
| 2.3. Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf..... | 16 |
| 2.3.1. Utilisation d'une fonction de Lyapunov..... | 19 |
| 2.3.2 Utilisation de l'indice de Marsden-McCracken..... | 21 |
| 2.4. Le modèle de Beddington (A faire en TD)..... | 25 |
| 2.5. Oscillations dans les réactions chimiques..... | 28 |
| 3. Bifurcation selle-nœud de trajectoires périodiques..... | 33 |
| 4. Bifurcation homocline..... | 35 |
| 5. Bifurcation de Hopf en temps discret..... | 37 |

1. Bifurcations dans \mathbb{R}^2 à un paramètre

Nous allons étudier dans ce chapitre des systèmes dynamiques planaires dépendant d'un paramètre réel que nous noterons c , $c \in \mathbb{R}$.

La forme générale des systèmes que nous allons étudier sera donc la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, c) \\ \dot{y} = g(x, y, c) \end{cases} \quad (1)$$

1.1. Bifurcation selle-noeud (saddle-node)

On parle aussi de bifurcation noeud-col.

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + c \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (2)$$

Selon le signe de c , trois cas doivent être considérés :

- $c < 0$

Dans ce cas, le système admet deux points d'équilibre de coordonnées $(-\sqrt{|c|}, 0)$ et $(\sqrt{|c|}, 0)$.

Afin de déterminer la nature de chacun de ces points d'équilibre, calculons la matrice Jacobienne qui, de manière générale, s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour le premier point d'équilibre $(-\sqrt{|c|}, 0)$, \mathbf{A} est la suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{|c|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice admet deux valeurs propres réelles et de signe négatif : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2\sqrt{|c|}$. Par

conséquent le point $(-\sqrt{|c|}, 0)$ est un noeud asymptotiquement stable.

Pour le second point d'équilibre $(\sqrt{|c|}, 0)$, la matrice \mathbf{A} devient :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{|c|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice admet deux valeurs propres réelles et de signe opposé : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2\sqrt{|c|}$. Par conséquent le point $(\sqrt{|c|}, 0)$ est un point selle (instable). Les isoclines verticales $\dot{x} = 0$ sont les deux droites $x = \pm\sqrt{|c|}$ et l'isocline horizontale $\dot{y} = 0$ est la droite $y = 0$. Le portrait de phase peut être facilement construit (Figure 1).

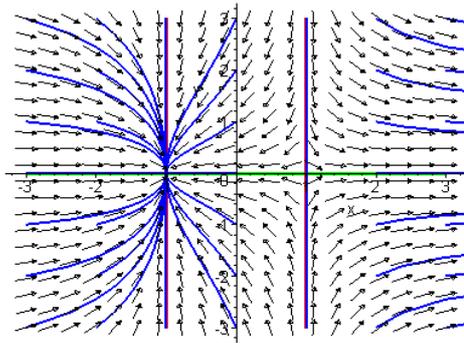


Figure 1 : Portrait de phase de la **bifurcation selle-noeud** pour $c < 0$.

- $c = 0$

Dans ce cas, le système se réduit à :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3)$$

qui admet l'origine comme unique point d'équilibre. Il s'agit d'un point non hyperbolique car la matrice Jacobienne est la suivante :

$$\mathbf{A}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le système est découplé en x et en y . L'étude de la première équation du système (3) montre que $x = 0$ est un point d'équilibre non hyperbolique correspondant à un shunt positif. La seconde équation indique que $y = 0$ est point d'équilibre asymptotiquement stable de la seconde équation. La figure 2 présente le portrait de phase du système (3) :

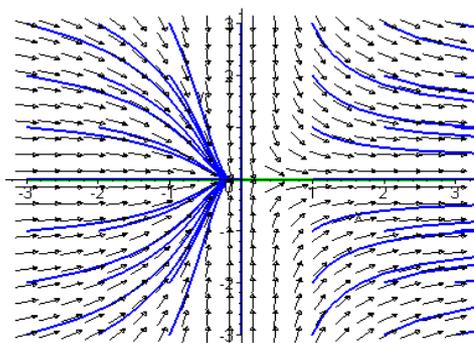


Figure 2 : Portrait de phase de la **bifurcation selle-noeud** pour $c = 0$.

Ce portrait de phase prend l'apparence d'un noeud stable pour les $x < 0$ et d'un point selle pour les $x > 0$.

- $c > 0$

Dans ce cas, le système dynamique devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + c \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (4)$$

Il n'admet aucun point d'équilibre. La variable x est toujours croissante. La variable y est croissante pour les $y < 0$ et décroissante pour les $y > 0$. La figure 3 montre le portrait de phase correspondant.

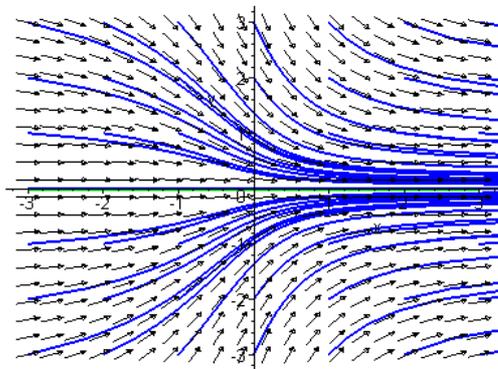


Figure 3 : Portrait de phase de la *bifurcation selle-noeud* pour $c > 0$.

Cette bifurcation est appelée une **bifurcation selle-noeud** et correspond à l'apparition simultanée de deux points d'équilibre, l'un instable (un point selle) et l'autre asymptotiquement stable (un noeud). D'une manière générale, cette bifurcation se produit lorsque deux isoclines de natures différentes, c'est-à-dire l'une verticale $\dot{x} = 0$ et l'autre horizontale $\dot{y} = 0$, initialement disjointes, deviennent tangentes (à la bifurcation) et se coupent ensuite en deux points d'équilibre qui apparaissent.

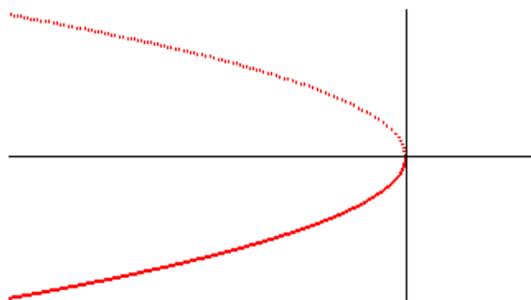


Figure 3bis : Diagramme de la *bifurcation selle-noeud*.

1.2. Bifurcation fourche (« *pitchfork* »)

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-c - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (5)$$

A nouveau, trois cas doivent être distingués selon le signe du paramètre c :

- $c < 0$

Dans ce cas, le système admet trois points d'équilibre, l'origine et deux autres points symétriques de coordonnées $(-\sqrt{|c|}, 0)$ et $(\sqrt{|c|}, 0)$. Afin de déterminer la nature de chacun de ces points d'équilibre, calculons la matrice Jacobienne qui s'écrit de manière générale :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -c - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre origine, cette matrice s'écrit :

$$\mathbf{A}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} |c| & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet deux valeurs propres réelles et de signe opposé : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = |c|$. Par conséquent l'origine est un point selle (instable).

Aux deux autres points d'équilibre $(-\sqrt{|c|}, 0)$ et $(\sqrt{|c|}, 0)$, la matrice Jacobienne prend la même forme :

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -2|c| & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elle admet deux valeurs propres réelles et négatives $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2|c|$. Ainsi, ces deux points d'équilibre sont des noeuds asymptotiquement stables. Les isoclines verticales ($\dot{x} = 0$) correspondent à trois droites : la droite $x = 0$ et les deux droites $x = \pm\sqrt{|c|}$. L'isocline horizontale ($\dot{y} = 0$) est la droite $y = 0$. Le portrait de phase peut alors être construit (Figure 4).

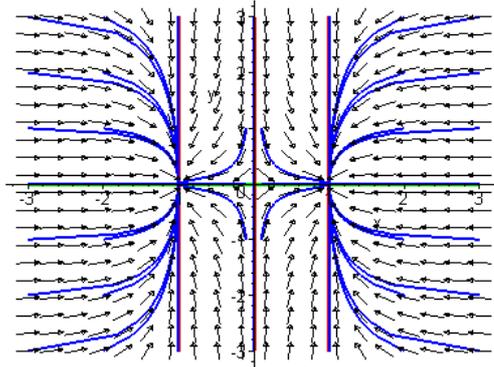


Figure 4 : Portrait de phase de la *bifurcation fourche* pour $c < 0$.

Ce portrait de phase montre un point selle fixe à l'origine entouré de deux noeuds asymptotiquement stables, symétriques autour de l'origine et qui s'en éloignent lorsque $|c|$ augmente.

- $c = 0$

Dans ce cas, le système se réduit à :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (6)$$

Ce système admet l'origine comme point d'équilibre unique ; il est non hyperbolique car la matrice Jacobienne en ce point s'écrit :

$$\mathbf{A}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

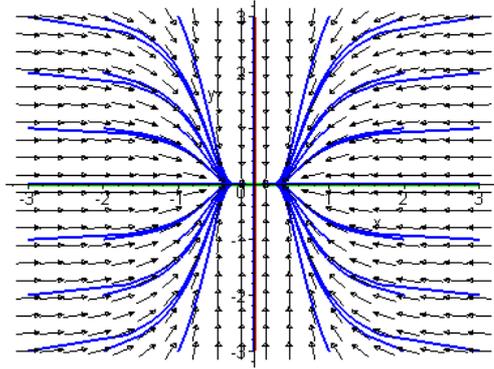
Pour déterminer la stabilité de ce point d'équilibre, considérons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

Calculons \dot{V} . Il vient :

$$\dot{V}(x, y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = -2(x^4 + y^2)$$

Cette expression est strictement négative sur l'ensemble du plan, à l'exception de l'origine. Par conséquent, la fonction $V(x, y)$ est une fonction de Lyapunov forte pour le système (6). Par application du théorème de Lyapunov pour fonction forte, nous pouvons conclure que l'origine est asymptotiquement stable. De plus, le bassin d'attraction de l'origine est \mathbb{R}^2 tout entier (Figure 5).

Figure 5 : Portrait de phase de la *bifurcation fourche* pour $c = 0$.

On peut également regarder ce système (6) sous un autre angle, en le résolvant explicitement.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (7)$$

Ainsi, $y(t) = y_0 e^{-t}$ avec $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

De même :

$$\dot{x} = -x^3 \Leftrightarrow \frac{dx}{x^3} = -dt \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2(t+K)} \Leftrightarrow x(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2(t+K)}}$$

avec $t > K$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

- $c > 0$

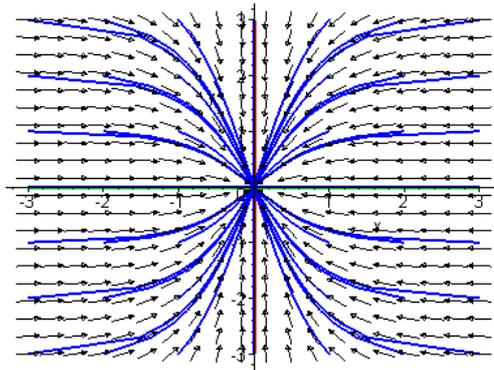
Dans ce cas, le système dynamique devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-c - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (8)$$

Il n'admet qu'un unique point d'équilibre, l'origine. La matrice Jacobienne en ce point s'écrit :

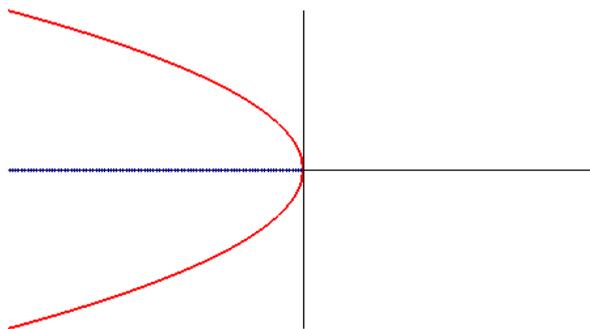
$$\mathbf{A}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elle admet deux valeurs propres réelles et négatives $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -c$. L'origine est donc un noeud asymptotiquement stable (Figure 6).

Figure 6 : Portrait de phase de la *bifurcation fourche* pour $c > 0$.

En résumé, à la valeur du paramètre $c = 0$, le système voit le nombre de points d'équilibre passer de trois à un. Pour $c < 0$, nous avons un point selle entouré de deux noeuds asymptotiquement stables. Pour $c \geq 0$, le système n'admet qu'un seul point d'équilibre asymptotiquement stable, l'origine.

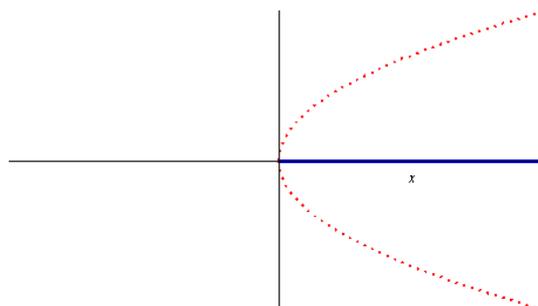
Le diagramme de bifurcation est présenté sur la figure 7.

Figure 7 : Diagramme de bifurcation de la *bifurcation fourche super-critique*.

Il s'agit là de la bifurcation fourche *super-critique*. Le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-c + x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (8\text{bis})$$

correspond par contre à une bifurcation fourche sous-critique dont le diagramme de bifurcation est donné sur la Figure 7bis.

Figure 7bis : Diagramme de bifurcation de la *bifurcation fourche sous-critique*.

1.3. Bifurcation verticale

Soit le système dynamique linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = cx + y \\ \dot{y} = -x + cy \end{cases} \quad (9)$$

On remarque en premier lieu que le système (9) est linéaire, ce qui sera le cas pour toutes les bifurcations verticales. Le cas non linéaire sera traité ultérieurement.

Nous pouvons le réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (10)$$

Sous réserve que le déterminant de la matrice \mathbf{A} soit non nul, ce qui est le cas ici car $\Delta = c^2 + 1 > 0$, ce système admet un point d'équilibre unique à l'origine.

La dynamique du système (10) dépend de la trace et du déterminant de la matrice \mathbf{A} . Selon le signe de c , trois cas doivent être considérés.

- $c < 0$

Dans ce cas, la trace de la matrice est égale à $-2|c|$; elle est négative et le déterminant $c^2 + 1$ est strictement positif. Ceci permet d'affirmer que l'origine est asymptotiquement stable et qu'elle correspond à un foyer. En effet, $\Delta = (-2|c|)^2 - 4(c^2 + 1) = -4 < 0$ (Figure 8).

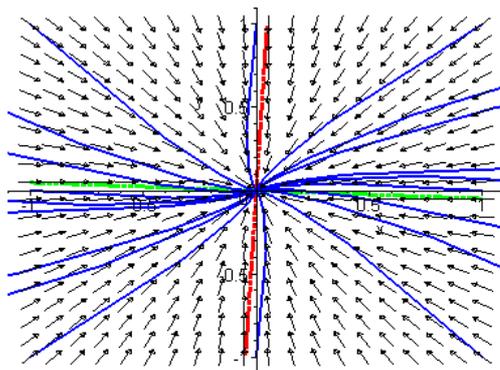


Figure 8 : Portrait de phase de la *bifurcation verticale* pour $c < 0$.

- $c = 0$

Dans ce cas, le système se réduit à :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (11)$$

La forme du système (11) correspond au représentant de la classe d'équivalence topologique des centres (voir Cours de L3-MIV, Chapitre 2, §2.3). Ainsi, l'origine correspond à des

centres car le modèle est linéaire (Figure 9).

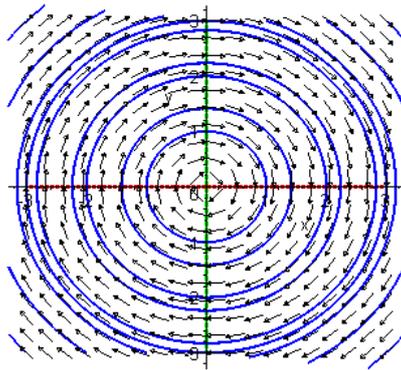


Figure 9 : Portrait de phase de la **bifurcation verticale** pour $c = 0$.

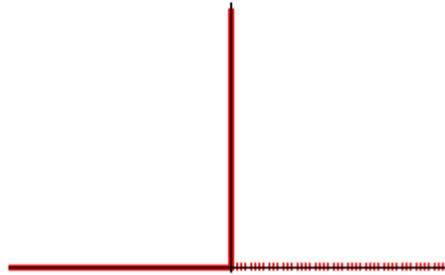
- $c > 0$

Dans ce cas, la trace de la matrice vaut $2c$; elle est cette fois strictement positive.

Le déterminant reste inchangé et strictement positif. L'origine est donc un foyer instable car le discriminant de l'équation caractéristique reste strictement négatif.

Cette bifurcation est appelée verticale. A la bifurcation, pour la valeur du paramètre $c = 0$, le point d'équilibre unique à l'origine change de nature. Pour $c < 0$, nous avons un foyer asymptotiquement stable. Pour $c > 0$, l'origine devient un foyer instable. A la bifurcation, $c = 0$, l'origine correspond à des centres. Cette bifurcation correspond à un système **linéaire** dont le déterminant est toujours positif et dont la trace change de signe.

Une autre manière de considérer cette bifurcation est de calculer les valeurs propres de la matrices \mathbf{A} qui sont complexes conjuguées et égales à $\lambda_{1,2} = c \pm i$. La partie réelle des valeurs propres est $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = c$ et la partie imaginaire est $\text{Im}(\lambda_{1,2}) = \pm 1$. En d'autres termes, les valeurs propres traversent l'axe imaginaire à la bifurcation. Ainsi, lorsque $c = 0$, la partie réelle des valeurs propres s'annule donnant des centres et change de signe avec le paramètre c , ce qui correspond au passage d'un foyer asymptotiquement stable ($c < 0$) à un foyer instable ($c > 0$). Le diagramme de bifurcation est présenté sur la figure 10.

Figure 10 : Diagramme de la *bifurcation verticale*.

La barre verticale en $c = 0$ signifie que le point d'équilibre peut prendre n'importe quelle valeur, on aura toujours des centres.

La bifurcation verticale correspond à un système linéaire dont la trace de la matrice change de signe à déterminant positif. Nous allons maintenant étudier le cas d'un système non linéaire dont la partie linéaire se comporte de la même manière que précédemment. Cette situation correspond à la bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf.

2. Bifurcation générique de Poincaré-Andronov-Hopf

2.1. Bifurcation super-critique de Poincaré-Andronov-Hopf

Considérons le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Partie linéaire}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -x(x^2 + y^2) \\ -y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}}_{\text{Partie non linéaire}} \quad (12)$$

Ce système admet un point d'équilibre unique à l'origine. Il est écrit sous la forme d'une somme de deux termes : une partie linéaire (identique au système linéaire de la bifurcation verticale) et une partie non linéaire. La partie linéaire est donc caractérisée par la matrice :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix}$$

La trace de la matrice est égale à $2c$, le déterminant à $c^2 + 1$ et le discriminant de l'équation caractéristique vaut -4 .

Comme nous l'avons vu précédemment, les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} sont complexes conjuguées et égales à $\lambda_{1,2} = c \pm i$. La partie réelle des valeurs propres est $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = c$ et la partie imaginaire est $\text{Im}(\lambda_{1,2}) = \pm 1$. Lorsque le paramètre c change de signe, l'origine passe

de foyer asymptotiquement stable à foyer instable.

Le système linéarisé prévoit des centres lorsque le paramètre c est égal à zéro. Du fait de la non linéarité du système, nous allons voir que ces centres ne sont en fait pas conservés.

Pour déterminer la stabilité de l'origine, considérons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

La dérivée \dot{V} s'écrit :

$$\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = -(x^2 + y^2)^2$$

\dot{V} est strictement négative sur l'ensemble du plan à l'exception de l'origine. Par conséquent, la fonction $V(x, y)$ est une fonction de Lyapunov forte pour le système (12). Ainsi, les centres prévus par la linéarisation ne sont pas conservés et par le théorème de Lyapunov pour fonctions fortes, nous pouvons conclure que l'origine est asymptotiquement stable lorsque $c = 0$. Par ailleurs, le domaine d'attraction de l'origine est \mathbb{R}^2 .

Afin de préciser l'allure du portrait de phase, effectuons le changement en coordonnées polaires (r, θ) . Les coordonnées polaires sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (13)$$

Ces relations permettent d'effectuer le passage inverse c'est-à-dire des coordonnées polaires vers les coordonnées rectangulaires :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (13\text{bis})$$

Dérivons la première des équations (13) par rapport au temps, il vient :

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = r^2(c - r^2)$$

Dérivons maintenant la seconde équation par rapport au temps :

$$\frac{d \tan \theta}{dt} = \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} = \frac{-r^2}{r^2 \cos^2 \theta}$$

Finalement, en coordonnées polaires, le système s'écrit sous la forme des deux équations découplées suivantes :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(c - r^2) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad (14)$$

La seconde équation admet la solution suivante :

$$\theta(t) = -t + \theta(0)$$

où $\theta(0)$ est la valeur de l'angle à $t = 0$. Cette équation montre que l'angle varie avec une vitesse angulaire constante $\omega = -1$. Les trajectoires vont tourner autour de l'origine.

La première équation gouverne la variation de la distance à l'origine. Selon le signe du paramètre c , le nombre de points d'équilibre varie :

- $c \leq 0$

L'équation admet un seul point d'équilibre $r = 0$ qui est asymptotiquement stable (Figure 11).

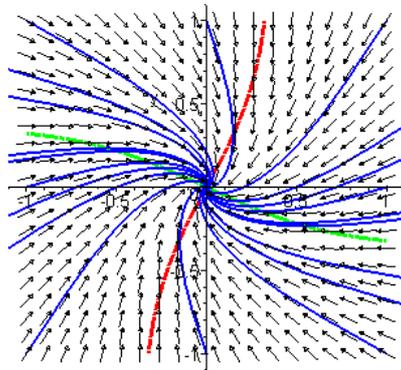


Figure 11 : Portrait de phase de la *bifurcation de PAH super-critique* pour $c \leq 0$.

- $c > 0$

L'équation (14-1) admet deux points d'équilibre positifs $r = 0$ et $r = \sqrt{c}$. Le premier est instable et le second est asymptotiquement stable. Le second point d'équilibre de l'équation (14-1) correspond donc à un cercle de rayon $r = \sqrt{c}$ qui est une trajectoire fermée isolée parcourue à la vitesse angulaire $\omega = -1$. Il s'agit d'un cycle limite asymptotiquement stable (Figure 12).

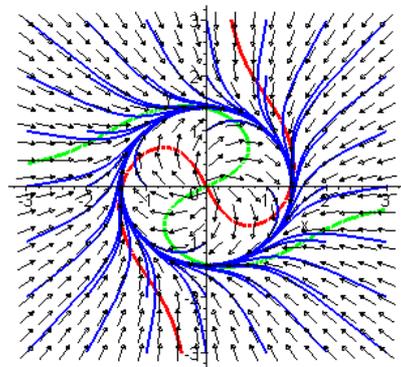


Figure 12 : Portrait de phase de la *bifurcation de PAH super-critique* pour $c > 0$.

En résumé, nous pouvons conclure que lorsque :

- $c < 0$, l'origine est point d'équilibre unique et est un foyer stable.

- $c = 0$, l'origine est point d'équilibre unique et est asymptotiquement stable.
- $c > 0$, l'origine est un foyer instable entouré d'un cycle limite asymptotiquement stable de rayon $r = \sqrt{c}$.

Nous pouvons maintenant tracer le diagramme de bifurcation en faisant apparaître les points d'équilibre, leur nature mais aussi les cycles limites dont l'amplitude est représentée en ordonnée (Figure 13). On utilisera la même notation pour les cycles limites que pour les points d'équilibre : stabilité asymptotique en trait plein et instabilité en pointillés.

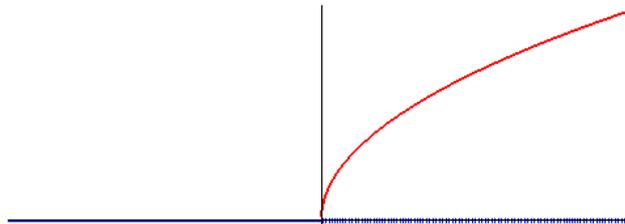


Figure 13 : Diagramme de la *bifurcation de PAH super-critique*.

Cette bifurcation s'appelle une bifurcation de *Poincaré-Andronov-Hopf*. A la bifurcation, le point d'équilibre à l'origine devient instable et s'entoure d'un cycle limite stable dont l'amplitude (le rayon) augmente avec la racine carrée du paramètre de bifurcation. Lorsque le cycle limite créé à la bifurcation est asymptotiquement stable, on parle de *bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf super-critique*.

2.2. Bifurcation sous-critique de Poincaré-Andronov-Hopf

On considère cette fois le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Partie linéaire}} + \underbrace{\begin{pmatrix} x(x^2 + y^2) \\ y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}}_{\text{Partie non linéaire}} \quad (15)$$

La partie linéaire de ce système est identique au cas précédent avec les mêmes conclusions.

Cependant, à la bifurcation, la dérivée \dot{V} s'écrit maintenant de la manière suivante :

$$\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2 + y^2)^2$$

\dot{V} est strictement positive sur l'ensemble du plan à l'exception de l'origine. Ainsi, par le théorème de Lyapunov, l'origine est cette fois instable lorsque $c = 0$.

Le passage en coordonnées polaires conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(c + r^2) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad (16)$$

L'angle varie avec une vitesse angulaire constante $\omega = -1$. Selon le signe du paramètre c , le nombre de points d'équilibre de l'équation (16-1) varie :

- $c < 0$

L'équation admet deux points d'équilibre positifs $r = 0$ et $r = \sqrt{|c|}$. Le premier point d'équilibre est asymptotiquement stable et le second est instable. Celui-ci correspond à un cercle de rayon $r = \sqrt{|c|}$ qui est une trajectoire fermée isolée parcourue à la vitesse angulaire $\omega = -1$ et entourant un foyer asymptotiquement stable. Il s'agit donc d'un cycle limite instable (Figure 14).

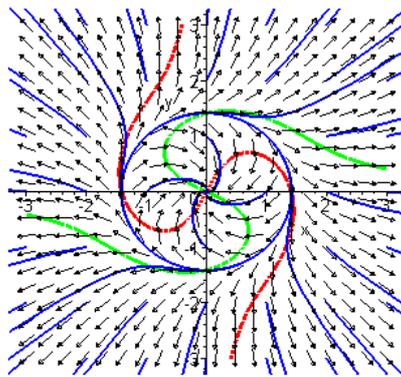


Figure 14 : Portrait de phase de la *bifurcation de PAH sous-critique* pour $c < 0$.

- $c \geq 0$

L'équation admet un seul point d'équilibre $r = 0$ qui est instable (Figure 14).

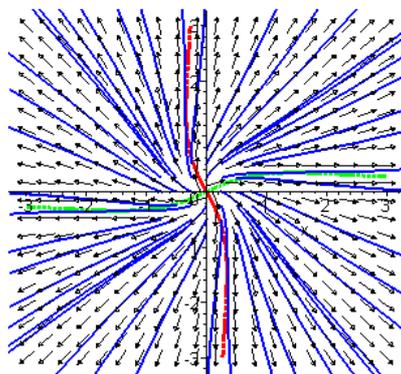


Figure 15 : Portrait de phase de la *bifurcation de PAH sous-critique* pour $c \geq 0$.

En résumé, nous pouvons conclure que lorsque :

- $c < 0$, l'origine est point d'équilibre unique et est un foyer stable entouré d'un

cycle limite instable de rayon $r = \sqrt{|c|}$.

- $c = 0$, l'origine est point d'équilibre unique et est instable.
- $c > 0$, l'origine est un foyer stable.

Nous pouvons maintenant tracer le diagramme de bifurcation (Figure 16).

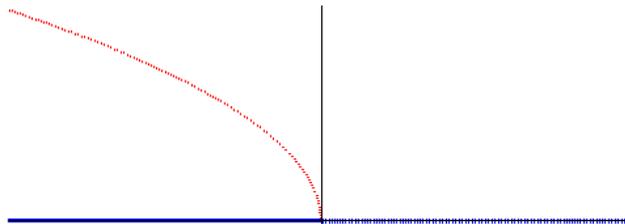


Figure 16 : Diagramme de la *bifurcation de PAH sous-critique*.

Cette bifurcation s'appelle la bifurcation sous-critique de *Poincaré-Andronov-Hopf*. Lorsque le cycle limite créé à la bifurcation est instable, on parle de bifurcation de *Poincaré-Andronov-Hopf sous-critique*.

Dans les deux exemples précédents, nous avons utilisé le système sous la *forme générique*. Lors de l'étude d'un système non linéaire quelconque, le système n'est pas nécessairement sous cette forme initialement. Cependant, après quelques changements de variables, il est possible de le mettre sous une forme adaptée permettant d'appliquer un théorème pour prévoir l'existence de cycle limite.

2.3. Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf

Le théorème de Poincaré-Bendixson n'est pas toujours facilement applicable. Aussi, le théorème de Poincaré-Andronov-Hopf (P-A-H) permet-il de démontrer plus aisément l'existence de solutions périodiques correspondant à un cycle limite. De plus, contrairement au théorème de Poincaré-Bendixson qui n'est valable que dans le plan, Le théorème de P-A-H est applicable en dimension supérieure à deux.

Théorème (Dimension 2)

Soit le système dynamique suivant gouvernant les variables réelles $x(t)$ et $y(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, c) \\ \dot{y} = g(x, y, c) \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}$$

Supposons que le système admet un point d'équilibre de coordonnées $(x^*(c), y^*(c))$.

Soit $A(x^*(c), y^*(c))$ la matrice Jacobienne calculée au point d'équilibre. Supposons que les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont complexes conjuguées et s'écrivent sous la forme $\lambda_{1,2} = a(c) \pm ib(c)$ avec $a(c)$ la partie réelle et $b(c)$ la partie imaginaire.

Soit c^* une valeur particulière du paramètre c pour laquelle on a $a(c^*) = 0$, $b(c^*) \neq 0$

et $\left. \frac{da}{dc} \right|_{c^*} \neq 0$. Alors, si $\left. \frac{db}{dc} \right|_{c^*} > 0$, trois cas sont possibles :

- ❖ Lorsque $c = c^*$ (à la bifurcation), il existe des trajectoires concentriques autour de $(x^*(c^*), y^*(c^*))$. Le point d'équilibre $(x^*(c^*), y^*(c^*))$ correspond alors à des centres.

On parle de **bifurcation de Hopf dégénérée**

- ❖ Lorsque $c = c^*$ (à la bifurcation), le point d'équilibre $(x^*(c^*), y^*(c^*))$ est *asymptotiquement stable*, et $\exists \tilde{c} > c^* / \forall c$ vérifiant $c^* < c < \tilde{c}$ tel qu'il existe, autour de $(x^*(c), y^*(c))$ qui est instable, un cycle limite *asymptotiquement stable* dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{c - c^*}$.

On parle de **bifurcation de Hopf super-critique**

- ❖ Lorsque $c = c^*$ (à la bifurcation), le point d'équilibre $(x^*(c^*), y^*(c^*))$ est *instable*, et $\exists \tilde{c} < c^* / \forall c$ vérifiant $\tilde{c} < c < c^*$ tel qu'il existe, autour de $(x^*(c), y^*(c))$ qui est asymptotiquement stable, un cycle limite *instable* dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{|c - c^*|}$.

On parle de **bifurcation de Hopf sous-critique**

Remarque importante : Dans le cas où $\left. \frac{db}{dc} \right|_{c^*} < 0$, il faut inverser les conclusions, c'est-à-dire que le cycle limite asymptotiquement stable (resp. instable) apparaît pour des valeurs du

paramètre inférieures (resp. supérieures) à c^* .

En résumé, voici les quatre cas de figure possibles :

| | $\left. \frac{da}{dc} \right _{c^*} > 0$ | $\left. \frac{da}{dc} \right _{c^*} < 0$ |
|---------------------|--|--|
| Hopf super-critique | | |
| Hopf sous-critique | | |

Une bifurcation de Hopf se produit donc lorsque les valeurs propres du système linéaire traversent l'axe imaginaire, autrement dit que leur partie réelle peut s'annuler. Le système linéaire pour $c = c^*$ prévoit donc des centres.

Dans le premier cas, les centres sont conservés, il s'agit de la bifurcation de P-A-H dégénérée. Dans le second cas, le théorème prévoit l'existence d'un cycle limite asymptotiquement stable pour des valeurs du paramètre supérieures à c^* . Il s'agit d'une bifurcation de P-A-H super-critique.

Enfin, dans le troisième cas, le théorème prévoit un cycle limite instable pour des valeurs du paramètre inférieures à c^* . Il s'agit d'une bifurcation de P-A-H sous-critique.

Lorsqu'un cycle limite existe, son amplitude est nulle à la bifurcation et augmente en racine carrée de l'écart entre le paramètre c et la valeur de bifurcation c^* . L'existence d'un cycle limite est garantie jusqu'à une valeur \tilde{c} qui dépendra de chaque cas ; cette valeur assure que les valeurs propres sont complexes conjuguées.

Dans le cas où il existe des centres à la bifurcation (cas 1), il est nécessaire de mettre en évidence une *intégrale première* présentant un extremum au point d'équilibre.

Le théorème ne permet pas de déterminer lequel des trois cas est le bon. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser d'autres méthodes.

2.3.1. Utilisation d'une fonction de Lyapunov

Dans le cas de la bifurcation de P-A-H super-critique générique de la section 2.1, on se rappelle que l'origine (point d'équilibre unique) est asymptotiquement stable à la bifurcation. Une première méthode pour démontrer que la bifurcation est super-critique (c'est-à-dire que le cycle limite est asymptotiquement stable) consiste à rechercher une fonction de Lyapunov permettant de démontrer la stabilité asymptotique du point d'équilibre $(x^*(c), y^*(c))$ pour $c = c^*$.

Exemple

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - cy - \frac{y^3}{3} \end{cases} \quad (17)$$

L'origine est point d'équilibre unique. La partie linéaire conduit à la matrice Jacobienne suivante :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm i \frac{\sqrt{|4 - c^2|}}{2} = a(c) \pm i b(c)$$

Elles sont complexes conjuguées si $-2 < c < 2$. La partie réelle $a(c) = -\frac{c}{2}$ s'annule lorsque

$c = c^* = 0$. Par contre, la partie imaginaire ne s'annule pas et est égale à $b(0) = 1$ lorsque

$c = 0$. De plus, nous avons $\frac{da}{dc}(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$. Nous sommes dans un cas d'application du

théorème de P-A-H.

L'origine est un foyer instable pour $c < 0$ et un foyer stable pour $c > 0$. Pour déterminer s'il existe un cycle limite asymptotiquement stable, utilisons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

Calculons sa dérivée par rapport au temps le long des trajectoires du système :

$$\dot{V} = -cy^2 - \frac{y^4}{3}$$

Lorsque $c = 0$, c'est-à-dire à la bifurcation, cette expression se réduit à $\dot{V} = -\frac{y^4}{3} \leq 0$ qui est partout négative à l'exception de l'axe $y = 0$. La fonction V est donc une fonction de Lyapunov faible pour notre système. Cependant, le système n'est pas identiquement nul sur l'axe $y = 0$ car l'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Par conséquent, en utilisant le théorème de Lyapunov pour fonction faible, nous pouvons conclure à la stabilité asymptotique de l'origine à la bifurcation.

Il est maintenant possible de conclure qu'il existe un cycle limite asymptotiquement stable

entourant l'origine et que puisque $\frac{da}{dc}(0) = -\frac{1}{2} < 0$, le cycle limite apparaît pour les valeurs négatives du paramètre. Il s'agit d'une **bifurcation de Hopf super-critique**.

Traçons le portrait de phase pour $c < 0$.

L'isocline verticale $\dot{x} = 0$ est la droite $y = 0$. L'isocline horizontale $\dot{y} = 0$ est une cubique

d'équation $x = -cy - \frac{y^3}{3}$ passant par l'origine et par les points $(0, \pm\sqrt{3|c|})$. L'origine est

l'unique point d'équilibre et correspond à un foyer instable s'entourant d'un cycle limite asymptotiquement stable. La figure 17 présente le portrait de phase lorsque $c < 0$.

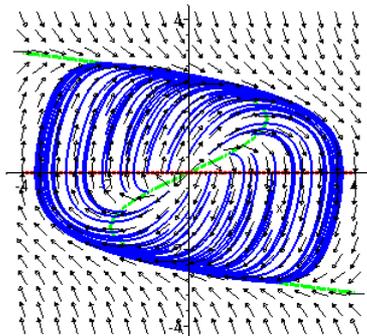


Figure 17 : Portrait de phase pour une valeur de c strictement négative.

2.3.2 Utilisation de l'indice de Marsden-McCracken¹

Cette méthode nécessite la manipulation du système pour le mettre sous une forme adéquate. Les étapes à suivre sont les suivantes :

- Ramener le point d'équilibre $(x^*(c), y^*(c))$ à l'origine par le changement de variables :

$$\begin{cases} z = x - x^*(c) \\ w = y - y^*(c) \end{cases}$$

Pour simplifier les notations, nous continuerons par la suite à utiliser les variables x et y en supposant que l'origine est point d'équilibre.

- Faire un changement de variables pour mettre la matrice Jacobienne à l'origine sous sa forme de Jordan lorsque $c = c^*$:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \omega^* \\ -\omega^* & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculer l'indice I de Marsden-McCracken comme suit :

$$I = \omega^* (f_{xxx} + f_{yyy} + g_{xxy} + g_{yyx}) + g_{xy} (g_{xx} + g_{yy}) - f_{xy} (f_{xx} + f_{yy}) + f_{xx} g_{xx} - f_{yy} g_{yy}$$

où $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est calculée au point d'équilibre (l'origine) pour $c = c^*$ et ainsi de suite.

Trois cas peuvent se produire :

- $I < 0$: le point d'équilibre est stable.
- $I > 0$: le point d'équilibre est instable.
- $I = 0$: on ne peut rien conclure par cette méthode.

Retour à l'exemple précédent

Le système dynamique s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = y = f(x, y, c) \\ \dot{y} = -x - cy - \frac{y^3}{3} = g(x, y, c) \end{cases} \quad (17)$$

Le point d'équilibre est l'origine et la matrice Jacobienne à la bifurcation s'écrit :

¹ Marsden, Jerrold Eldon, PhD en 1968. Marjorie Frost McCracken passe son doctorat en 1975 sous la direction de JE Marsden. **Publication:** Marsden, JE ; McCracken, M. (1976) *The Hopf Bifurcation and its applications*. New York : Springer-Verlag, XIII-408.

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, dans ce cas, $\omega^* = 1$. Pour calculer l'indice, nous avons besoin de :

$$f_{xy} = f_{xx} = f_{yy} = f_{xxx} = f_{yyy} = 0$$

$$g_{xy} = g_{xx} = g_{yy} = g_{xyy} = 0$$

$$g_{yyy} = -2$$

Finalement, il vient $I = -2$.

L'indice est strictement négatif, ce qui confirme que le point d'équilibre est asymptotiquement stable à la bifurcation, l'existence d'une bifurcation super-critique et d'un cycle limite asymptotiquement stable.

Exemple : L'oscillateur de Van der Pol

Principe²

L'amplitude des oscillations d'un oscillateur harmonique amorti diminue avec le temps (voir le [pendule](#) de torsion). Pour obtenir une amplitude d'oscillation constante x_c , il faut forcer le coefficient d'amortissement à changer de signe lorsque l'amplitude s'écarte de la valeur x_c de la consigne choisie. Une façon d'y parvenir est d'utiliser un oscillateur de Van der Pol qui obéit à l'équation :

$$\ddot{x} - (2c - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (18)$$

Cette équation peut être transformée en un système de deux équations du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 2cy - x^2y \end{cases} \quad (19)$$

L'origine est point d'équilibre unique. Considérons la partie linéaire avec la matrice Jacobienne suivante :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2c \end{pmatrix}$$

On a $\text{tr}\mathbf{A} = 2c$ et $\det \mathbf{A} = 1$. L'équation caractéristique est la suivante :

$$\lambda^2 - 2c\lambda + 1 = 0$$

² <http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/vanderpol.html>

Le discriminant **réduit** de cette équation est $\Delta' = c^2 - 1$. Si $-1 < c < +1$, le discriminant est négatif et les valeurs propres sont complexes conjuguées égales à :

$$\lambda_{1,2} = c \pm i \sqrt{1 - c^2}$$

La partie réelle $a(c) = c$ s'annule lorsque $c = c^* = 0$. Par contre, la partie imaginaire ne

s'annule pas et est égale à $b(0) = 1$ lorsque $c = 0$. De plus, nous avons $\frac{da}{dc}(0) = 1 \neq 0$. Nous

sommes donc à nouveau dans un cas d'application du théorème de P-A-H.

L'origine est un foyer stable pour $c < 0$ et un foyer instable pour $c > 0$. Pour déterminer s'il existe un cycle limite stable, utilisons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

Calculons la dérivée de cette fonction le long des trajectoires du système :

$$\dot{V} = 2cy^2 - x^2y^2$$

Lorsque $c = 0$, cette expression se réduit à $\dot{V} = -x^2y^2 \leq 0$. \dot{V} s'annule pour $x = 0$ ou pour $y = 0$. La fonction V est donc une fonction de Lyapunov faible pour le système (19). En vérifiant que pour $x = 0$ ou pour $y = 0$ il y a une dynamique (que la trajectoire ne s'arrête sur un point d'équilibre), le théorème de **Barbashin-Krasovskii-LaSalle pour fonctions faibles** permet de conclure que l'origine est asymptotiquement stable.

Nous pouvons ainsi conclure à l'existence d'un cycle limite asymptotiquement stable et à une bifurcation de Hopf super-critique.

De plus, $\frac{da}{dc}(0) = 1 > 0$, par conséquent le cycle limite apparaît pour des valeurs positives du paramètre de bifurcation.

Nous pouvons également procéder en calculant l'indice de Marsden-McCracken. Dans ce cas, $\omega^* = 1$ et :

$$f_{xy} = f_{xx} = f_{yy} = f_{xxx} = f_{xyy} = 0,$$

$$g_{xx} = g_{yy} = g_{xy} = g_{yyy} = 0$$

$$g_{xy} = -2$$

Finalement, nous obtenons la valeur suivante de l'indice $I = -2$.

L'indice est négatif, ce qui signifie que le point d'équilibre est asymptotiquement stable à la bifurcation et qu'on a donc à faire à une bifurcation super-critique.

La figure 18 présente les portraits de phase de l'équation de Van der Pol pour différentes valeurs du paramètre de bifurcation.

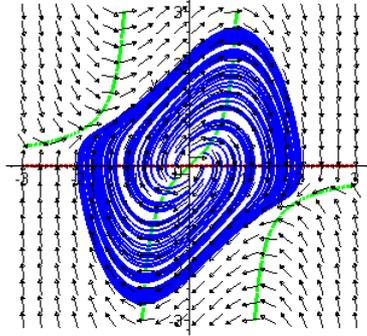


Figure 18a : Portrait de phase du modèle de Van der Pol pour $c = 0.5$.

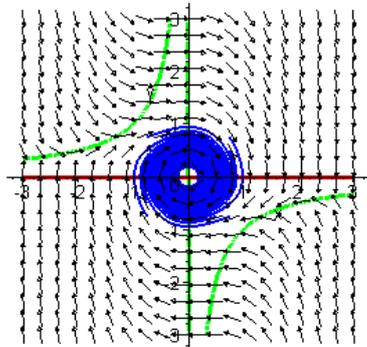


Figure 18b : Portrait de phase du modèle de Van der Pol pour $c = 0$.

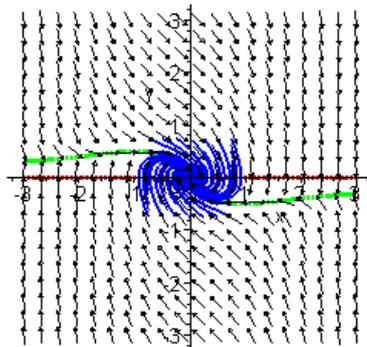


Figure 18c : Portrait de phase du modèle de Van der Pol pour $c = -0.5$.

2.4. Le modèle de Beddington³ (A faire en TD)

Beddington a proposé le modèle suivant pour décrire la dynamique d'une population de proies et de prédateurs :

$$\begin{cases} \dot{x} = rx - \frac{axy}{1+bx+cy} \\ \dot{y} = -\mu y + \frac{eaxy}{1+bx+cy} \end{cases} \quad (20)$$

$x(t)$ et $y(t)$ sont respectivement les densités de proies et de prédateurs à l'instant t . r est le taux de croissance de la proie et μ le taux de mortalité du prédateur. a, b, c sont les paramètres de prédation. La fonction réponse, c'est-à-dire le nombre de proies mangées par prédateur et par unité de temps est la fonction réponse FR de Beddington :

$$FR(x) = \frac{ax}{1+bx+cy}$$

e est le taux de conversion de biomasse des proies en biomasse de prédateurs. Tous les paramètres sont strictement positifs.

Le cadran positif est positivement invariant car les droites $x = 0$ et $y = 0$ sont respectivement isoclines verticale et horizontale. L'origine est donc un point d'équilibre. Il existe un autre point d'équilibre (x^*, y^*) tel que :

$$\begin{cases} r - \frac{ay}{1+bx+cy} = 0 \\ -\mu + \frac{eax}{1+bx+cy} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+bx+cy = \frac{a}{r}y \\ 1+bx+cy = \frac{ea}{\mu}x \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a}{r}y = \frac{ea}{\mu}x \Leftrightarrow \boxed{y^* = \frac{er}{\mu}x^*}$$

D'autre part, on a :

$$1+bx+cy = \frac{ea}{\mu}x \Leftrightarrow 1+bx+c\frac{er}{\mu}x = \frac{ea}{\mu}x \Leftrightarrow \boxed{x^* = \frac{\mu}{ea - (b\mu + cer)}}$$

Ce point d'équilibre appartient au cadran positif si :

$$ae > b\mu + cer$$

La matrice Jacobienne du système s'écrit :

³ Beddington (1975, J. Anim. Ecol., 44, 331-340).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r - \frac{ay(1+cy)}{(1+bx+cy)^2} & -\frac{ax(1+bx)}{(1+bx+cy)^2} \\ \frac{eay(1+cy)}{(1+bx+cy)^2} & -\mu + \frac{eax(1+bx)}{(1+bx+cy)^2} \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre $(0,0)$, la matrice Jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

L'origine est donc un point selle.

Au point d'équilibre non trivial, on utilise les relations d'équilibre :

$$\begin{cases} \frac{ay}{1+bx+cy} = r \\ \frac{eax}{1+bx+cy} = \mu \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} r - r \frac{1+cy}{1+bx+cy} & -\frac{\mu}{e} \frac{1+bx}{1+bx+cy} \\ er \frac{1+cy}{1+bx+cy} & -\mu + \mu \frac{1+bx}{1+bx+cy} \end{pmatrix}$$

On simplifie ensuite chacun des termes comme suit :

$$\begin{aligned} \diamond r - r \frac{1+cy}{1+bx+cy} &= r \left(1 - \frac{1+cy}{1+bx+cy} \right) = r \frac{bx}{1+bx+cy} = \frac{rbx}{eax/\mu} = \frac{rb\mu}{ea} \\ \diamond -\frac{\mu}{e} \frac{1+bx}{1+bx+cy} &= -\frac{\mu}{e} \frac{(a/r - c)y}{ay/r} = \frac{\mu}{ea} (rc - a) \\ \diamond er \frac{1+cy}{1+bx+cy} &= er \frac{(ea/\mu - b)x}{eax/\mu} = \frac{r}{a} (ea - b\mu) \\ \diamond -\mu + \mu \frac{1+bx}{1+bx+cy} &= \mu \left(-1 + \frac{1+bx}{1+bx+cy} \right) = -\mu \frac{cy}{1+bx+cy} = -\frac{\mu cy}{ay/r} = -\frac{\mu cr}{a} \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice Jacobienne au point d'équilibre non trivial s'écrit :

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{rb\mu}{ea} & \frac{\mu}{ea} (rc - a) \\ \frac{r}{a} (ea - b\mu) & -\frac{\mu rc}{a} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \det \mathbf{A}^* &= -\frac{rb\mu}{ea} - \frac{\mu rc}{a} - \frac{\mu r}{ea} (rc - a)(ea - b\mu) \\
 &= -\frac{r\mu}{ea^2} (b\mu rc + rcea - b\mu rc - ea^2 + ab\mu) \\
 &= \frac{r\mu}{ea} (ea - rce - b\mu)
 \end{aligned}$$

Du fait de la condition d'existence du point d'équilibre non trivial dans le cadran positif, $ae > b\mu + cer$, le déterminant est strictement positif. La trace de la matrice est donnée par :

$$tr \mathbf{A}^* = \frac{rb\mu}{ea} - \frac{\mu rc}{a} = \frac{\mu r}{ea} (b - ec)$$

La trace s'annule lorsque $b = ec$; elle est positive si $b > ec$ et négative si $b < ec$. Ainsi, lorsque le paramètre b varie, la trace change de signe à déterminant strictement positif, ce qui conduit à la bifurcation de Hopf.

Vérifions que nous sommes dans les conditions d'application du théorème de P-A-H :

$$\begin{aligned}
 \Delta^* &= \left(\frac{\mu r}{ea} \right)^2 (b - ec)^2 - 4 \frac{r\mu}{ea} (ea - rce - b\mu) \\
 &= \frac{r\mu}{e^2 a^2} \left[r\mu (b^2 - 2bec + e^2 c^2) - 4ea(ea - rce - b\mu) \right]
 \end{aligned}$$

Difficile de trouver le signe de cette quantité ! Supposons que $\Delta^* < 0$; alors les valeurs propres s'écrivent :

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr \mathbf{A}^*}{2} \pm i \frac{\sqrt{|\Delta^*|}}{2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \Re e(\lambda_i) &= \frac{tr \mathbf{A}^*}{2} = \frac{\mu r}{2ea} (b - ec) \\
 \text{Im}(\lambda_i) &= \frac{\sqrt{|\Delta^*|}}{2} = \frac{r\mu}{2e^2 a^2} \left[r\mu (b^2 - 2bec + e^2 c^2) - 4ea(ea - rce - b\mu) \right]
 \end{aligned}$$

En prenant comme paramètre de bifurcation le paramètre b , la valeur de bifurcation est $b^* = ec$, et il vient :

$$\begin{aligned}
 \Re e(b^*) &= 0 \\
 \frac{d \Re e(\lambda_i)}{db} &= \frac{\mu r}{2ea} > 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Im}(b^*) = -2 \frac{r\mu}{ea} [ea - rce - b\mu] \neq 0$$

Les conditions du théorème de P-A-H étant réunies, il reste à étudier la stabilité du point d'équilibre non trivial à la bifurcation, *i.e.*, pour $b^* = ec$.

Dans ce cas, on peut montrer qu'il existe une intégrale première $H(x, y)$ qui est égale à :

$$H(x, y) = (ea - b\mu) x - \mu \ln x + (a - rc) y - r \ln y + ???$$

Ce n'est pas fini mais comment trouver cette fonction IP ??? !!!

Par simulation, on vérifie qu'il y a de centres à la bifurcation et qu'il s'agit donc d'une bifurcation de P-A-F dégénérée (Figure 19b).

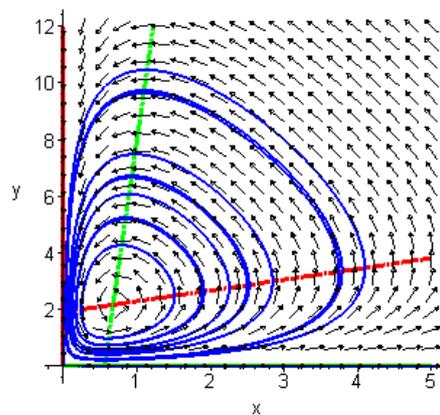
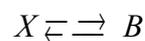
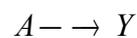
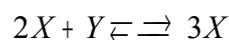


Figure 19b : Portrait de phase du modèle de Beddington à la bifurcation, pour $b = ec$

2.5. Oscillations dans les réactions chimiques

Pour illustrer la possibilité d'oscillations dans une réaction chimique, Schnakenberg (1979)⁴ propose de considérer le système suivant :



Il s'agit d'une réaction chimique trimoléculaire qui peut être modélisée de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 y - x + b \\ \frac{dy}{dt} = -x^2 y + a \end{cases} \quad (21)$$

Avec $x(t)$ la concentration en produit X , $y(t)$ la concentration en produit Y , a la

⁴ Schnakenberg, J. (1979) Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour. *J. Theor. Biol.*, 81, 389-400.

concentration en produit A et b la concentration en produit B .

Les points d'équilibre sont solutions de :

$$\begin{cases} x^2 y - x + b = 0 \\ -x^2 y + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + b \\ x^2 y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^* = a + b \\ y^* = a / (a + b)^2 \end{cases}$$

Pour commencer, faisons un changement de variable pour ramener le point d'équilibre à l'origine :

$$\begin{cases} u = x - x^* \\ v = y - y^* \end{cases}$$

Après quelques lignes de calculs, en remplaçant x par $u + a + b$ et y par $v + a / (a + b)^2$, on obtient finalement :

$$\begin{cases} \dot{u} = \left(\frac{a-b}{a+b} \right) u + (a+b)^2 v + u^2 v + 2(a+b) uv + \frac{au^2}{(a+b)^2} \\ \dot{v} = -\frac{2a}{a+b} u - (a+b)^2 v - u^2 v - 2(a+b) uv - \frac{au^2}{(a+b)^2} \end{cases}$$

L'origine est bien sûr point d'équilibre de ce nouveau système. On peut identifier clairement la partie linéaire du système, ce qui conduit à :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{a+b} & (a+b)^2 \\ -\frac{2a}{a+b} & -(a+b)^2 \end{pmatrix}$$

On obtient $\det \mathbf{A}_0 = -(a-b)(a+b) + 2a(a+b) = (a+b)^2 > 0$ et $tr \mathbf{A}_0 = \left(\frac{a-b}{a+b} \right) - (a+b)^2$. A

déterminant strictement positif, la trace change de signe, ce qui laisse soupçonner une bifurcation de Hopf.

$$tr \mathbf{A}_0 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a-b}{a+b} \right) - (a+b)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a-b = (a+b)^3}$$

Il nous faut étudier la stabilité de l'origine à la bifurcation. Utilisons l'indice de Marsden-McCracken. Faisons d'abord un changement de paramètre :

$$\begin{cases} p = a + b \\ q = a - b \end{cases}$$

La bifurcation apparaît alors pour $q = p^3$. Il vient :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \frac{q}{p} & p^2 \\ -\frac{p+q}{p} & -p^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} p^2 & p^2 \\ -1-p^2 & -p^2 \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique de cette matrice est :

$$\lambda^2 + \left(\frac{q}{p} - p^2 \right) \lambda + p^2 = 0 \text{ avec } \Delta = \left(\frac{q}{p} - p^2 \right)^2 - 4p^2 = \frac{1}{p^2} (q - p^3) - 4p^2$$

$$\Delta = \frac{1}{p^2} (q - p^3 - 4p^4)$$

Ainsi, à la bifurcation, les valeurs propres sont bien imaginaires pures, de la forme $\lambda = \pm i p$.

En supposant qu'on se place dans le cas où $\Delta < 0$, on a :

$$\Re e(\lambda_i) = \frac{1}{2p} (q - p^3)$$

$$\text{Im}(\lambda_i) = \frac{\sqrt{|\Delta^*|}}{2} = \frac{1}{2p} \sqrt{|q - p^3 - 4p^4|}$$

A la bifurcation $q = p^3$, il vient :

$$\Re e(q = p^3) = 0$$

$$\frac{d\Re e(\lambda_i)}{dq} = \frac{1}{2p} > 0$$

$$\text{Im}(q = p^3) = p \neq 0$$

Les conditions d'application du théorème de P-A-H sont donc réunies.

Par contre, il faut mettre la matrice sous forme de Jordan pour pouvoir utiliser l'indice de Marsden-McCracken : il faut faire de nouveau un changement de variables dans la base de Jordan. Il nous faut donc chercher les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda = \pm i p$.

Soit $\lambda = i p$ et $V = (\alpha \quad \beta)$ le vecteur propre associé. Il vient :

$$\begin{pmatrix} p^2 - ip & p^2 \\ -1 - p^2 & -p^2 - ip \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (p^2 - ip)\alpha + p^2\beta = 0$$

En choisissant $\alpha = 1$, on obtient $\beta = -1 + \frac{i}{p}$, soit $V = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1/p \end{pmatrix}$.

On prend alors la matrice de passage comme suit :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/p \end{pmatrix}$$

Les nouvelles coordonnées de u et v sont maintenant w et z avec les relations :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & p \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u = w \\ v = -w + z/p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = u \\ z = pu + pv \end{cases}$$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} \dot{w} = \left(\frac{q}{p} - p^2 \right) w + pz + \left(\frac{p+q-4p^3}{2p^2} \right) w^2 + 2wz - w^3 + \frac{w^2z}{p} \\ \dot{z} = -pw \end{cases}$$

Alors :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \frac{q-p^3}{p} & p \\ -p & 0 \end{pmatrix}, \text{ soit à la bifurcation } \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\omega^* = p$ et l'indice de Marsden-McCracken est égal à $I = -\frac{2}{p}$.

On peut donc en conclure, qu'à la bifurcation, l'origine est *asymptotiquement stable*, et qu'il s'agit d'une bifurcation de **Hopf super-critique**.

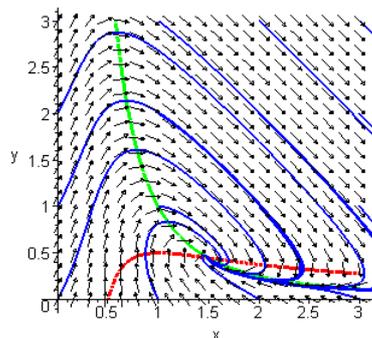


Figure 20a : Portrait de phase du modèle de réaction chimique lorsque $a - b < (a + b)^3$.

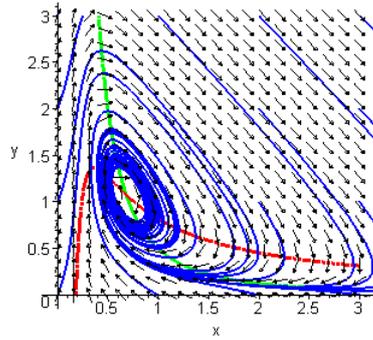


Figure 20b : Portrait de phase du modèle de réaction chimique lorsque $a - b = (a + b)^3$.

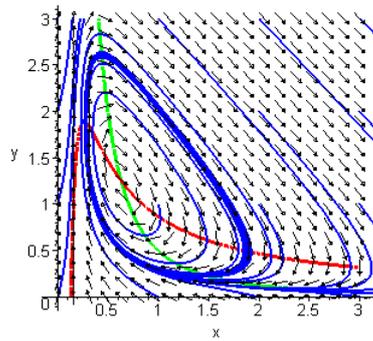


Figure 20c : Portrait de phase du modèle de réaction chimique lorsque $a - b > (a + b)^3$.

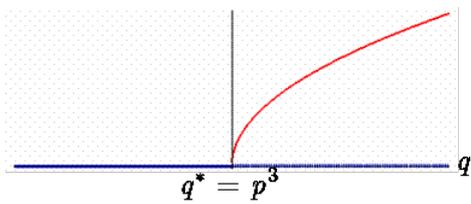


Figure 21 : Diagramme de bifurcation du modèle de réaction chimique.

3. Bifurcation selle-nœud de trajectoires périodiques

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \sin c - y \cos c + (1 - x^2 - y^2)^2 (x \cos c - y \sin c) \\ \dot{y} = x \cos c - y \sin c + (1 - x^2 - y^2)^2 (x \sin c - y \cos c) \end{cases} \text{ avec } c \in \mathbb{R} \quad (22)$$

On constate que l'origine est un point d'équilibre. Le calcul de la matrice Jacobienne au point $(0,0)$ conduit à l'expression suivante :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -\sin c + \cos c & -\cos c - \sin c \\ \cos c + \sin c & -\sin c + \cos c \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A}_0 = (\cos c - \sin c)^2 + (\cos c + \sin c)^2 = 2 > 0$$

$$\text{tr} \mathbf{A}_0 = 2 \cos c - 2 \sin c = 2 \cos c (1 - \tan c) \text{ change de signe pour } c = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4 \cos^2 c (1 - \tan c)^2 - 8 \\ &= 4 \left[\cos^2 c (1 - 2 \tan c + \tan^2 c) - 2 \right] \\ &= 4 (\cos^2 c - 2 \sin c \cos c + \sin^2 c - 2) \\ &= -4 (\sin 2c + 1) \leq 0 \end{aligned}$$

Passons en polaires :

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= -x^2 \sin c - xy \cos c + (1 - r^2)^2 (x^2 \cos c - xy \sin c) \\ &\quad + xy \cos c - y^2 \sin c + (1 - r^2)^2 (xy \sin c + y^2 \cos c) \\ &= -r^2 \sin c + (1 - r^2)^2 r^2 \cos c \\ &= r^2 \left(-\sin c + (1 - r^2)^2 \cos c \right) \\ \dot{r} &= r \left(-\sin c + (1 - r^2)^2 \cos c \right) \end{aligned}$$

On peut démontrer de même que $\dot{\theta} = (1 - r^2)^2 \sin c + \cos c$.

Plaçons-nous à $-\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}$.

Les points d'équilibre sont solutions de $\dot{r} = 0$, c'est-à-dire $r = 0$ ou $(1 - r^2)^2 = \tan c$.

❖ Si $-\frac{\pi}{2} < c < 0$, alors $\tan c < 0$: il n'y a pas de cycle limite.

Pour l'origine, on a $\text{tr}\mathbf{A}_0 > 0$: l'origine est donc un *foyer instable*.

❖ Si $c = 0$, alors $(1 - r^2)^2 = 0$: le cercle $r = 1$ est cycle limite. De plus $\dot{r} = r(1 - r^2)^2 > 0$: le cycle limite $r = 1$ n'est ni stable ni instable.

Pour l'origine, on a $\text{tr}\mathbf{A}_0 = 1$: l'origine reste un *foyer instable*.

❖ Si $0 < c < \frac{\pi}{4}$, alors $1 - r^2 = \pm \sqrt{\tan c} \Leftrightarrow r_1 = \sqrt{1 + \sqrt{\tan c}}$ et $r_2 = \sqrt{1 - \sqrt{\tan c}}$ qui n'existe que pour $0 < c < \frac{\pi}{4}$. On a donc deux candidats cycle limite lorsque $0 < c < \frac{\pi}{4}$.

Pour l'origine, on a $\text{tr}\mathbf{A}_0 > 0$: l'origine est toujours un *foyer instable*.

❖ Si $c = \pi/4$, alors on n'a qu'un seul cycle limite en $r = \sqrt{2}$. $\dot{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} r^3 (r^2 - 2)$ est strictement positif pour $r > \sqrt{2}$ et strictement négatif pour $r < \sqrt{2}$; le cycle limite est donc *instable*.

Pour l'origine, on a $\text{tr}\mathbf{A}_0 = 0$: on ne peut pas conclure.

❖ Enfin, si $\frac{\pi}{4} < c < \frac{\pi}{2}$, on a plus qu'un seul cycle limite $r = \sqrt{1 + \sqrt{\tan c}}$.

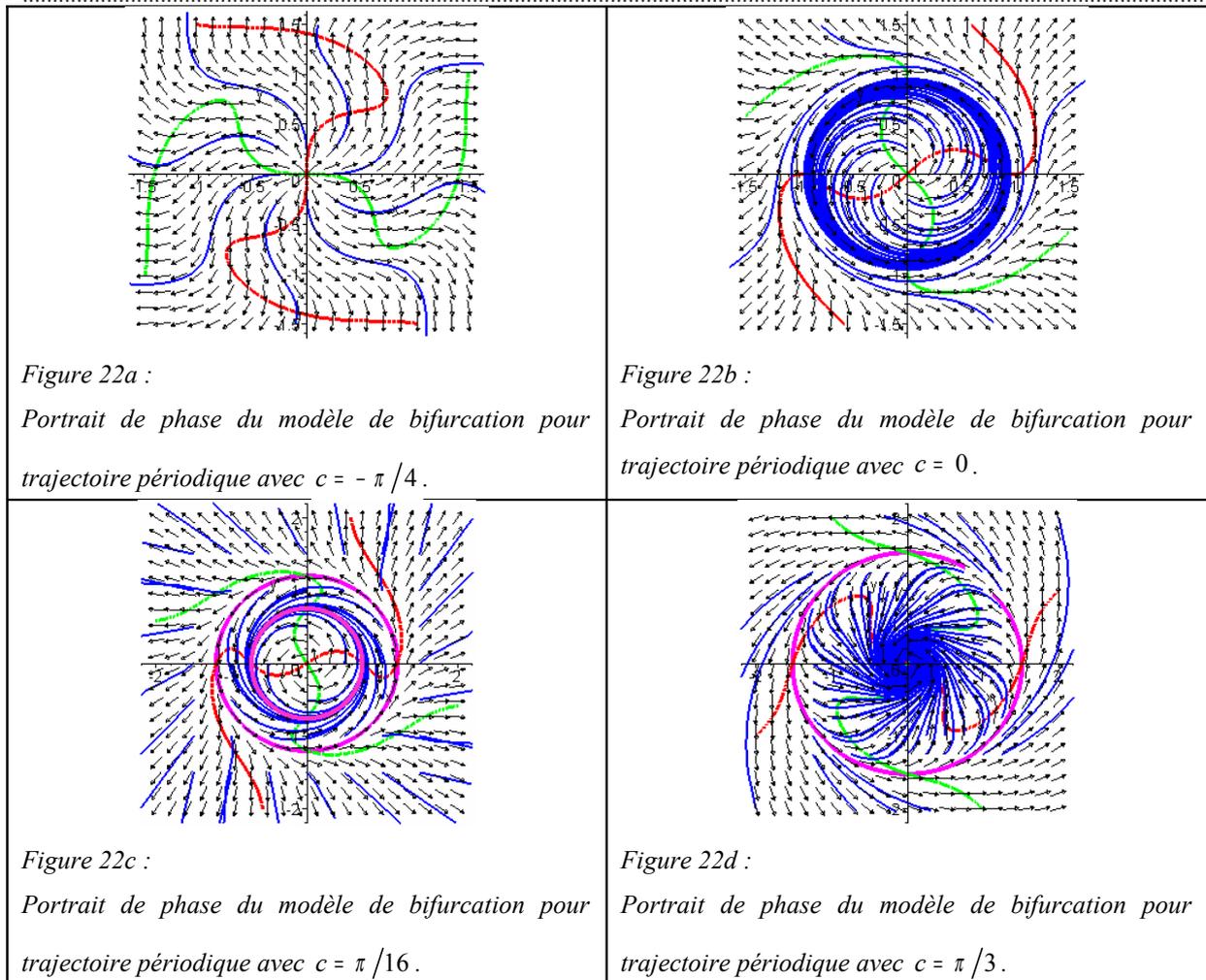
Pour l'origine, on a cette fois $\text{tr}\mathbf{A}_0 < 0$: l'origine est un *foyer asymptotiquement stable*.

Reste à étudier la stabilité des deux cycles limites pour $0 < c < \frac{\pi}{4}$, en étudiant le signe de \dot{r} :

$$\dot{r} = r \cos c \left((1 - r^2)^2 - \tan c \right) = r \cos c \left(1 - r^2 - \sqrt{\tan c} \right) \left(1 - r^2 + \sqrt{\tan c} \right)$$

Pour $0 < c < \frac{\pi}{4}$, on a $r \cos c > 0$ et $\tan c < 1$, ce qui conduit au tableau de signe suivant :

| | | | | |
|---------------------------|---|--------------------------------|--------------------------------|----------|
| r | 0 | $r = \sqrt{1 - \sqrt{\tan c}}$ | $r = \sqrt{1 + \sqrt{\tan c}}$ | ∞ |
| $1 - r^2 - \sqrt{\tan c}$ | + | 0 | - | - |
| $1 - r^2 + \sqrt{\tan c}$ | + | | 0 | - |
| \dot{r} | + | 0 | 0 | + |



4. Bifurcation homocline

Définition 1 :

Une trajectoire **hétérocline** relie deux points d'équilibre différents.

Une trajectoire **homocline** part d'un point d'équilibre et y revient. Attention, ne pas confondre avec un cycle limite qui ne contient aucun point d'équilibre.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + cy - x^2 \end{cases} \text{ avec } c \in \mathbb{R} \quad (23)$$

Les points d'équilibre sont $(0,0)$ et $(1,0)$. La matrice Jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2x & c \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} \text{ avec } \det = -1 < 0 : \text{l'origine est un point selle.}$$

$$\mathbf{A}_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \text{ avec } \det = 1, \text{ tr} = c \text{ et } \Delta = c^2 - 4$$

Donc, pour $-2 < c < 2$, le point d'équilibre $(1,0)$ est un foyer : asymptotiquement stable si $-2 < c < 0$, instable si $0 < c < 2$. Notre valeur de bifurcation est donc $c^* = 0$.

On vérifie aisément que les conditions du théorème de P-A-H sont réunies.

Question : que se passe-t-il à la bifurcation, soit $c = 0$?

Soit $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ une fonction définie positive.

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} \Leftrightarrow \dot{V} = xy + yx - x^2y \Leftrightarrow \dot{V} = 2xy - x^2y$$

Le signe n'est pas clair. On peut alors soit calculer l'indice de Marsden-McCraken, soit rechercher la possibilité de centres par une intégrale première.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - x^2}{y} \Leftrightarrow ydy = (x - x^2) dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$$

On peut proposer $H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ comme fonction intégrale première. Si des centres

existent-ils sont concentriques autour de $(1,0)$, car l'origine est point-selle. Montrons que

$H(x, y)$ admet un extremum en $(1,0)$:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -x + x^2 \Rightarrow \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{(1,0)} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial y} = y \Rightarrow \left. \frac{\partial H}{\partial y} \right|_{(1,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -1 + 2x \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_{(1,0)} = 1 \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 1 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right|_{(1,0)} = 1 \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0$$

D'après le développement en séries de Taylor à l'ordre 2, on obtient :

$$H(x, y) \simeq H(1,0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_{(1,0)} (x-1)^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right|_{(1,0)} y^2$$

$$H(x, y) - H(1,0) \simeq \frac{(x-1)^2}{2} + y^2 > 0$$

La fonction $H(x, y)$ présente donc un minimum en $(1,0)$, et les courbes de niveaux

$H(x, y) = C$ se referment autour de $(1,0)$: on a donc des centres à la bifurcation ; il s'agit

d'une *bifurcation de Hopf dégénérée*. Toutefois, on remarque, parmi les courbes de niveaux de la fonction $H(x, y)$, que la courbe $H(x, y) = 0$ est une trajectoire homocline : on parlera de *bifurcation homocline* :

$$H(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = 0 \Leftrightarrow y = \pm x \sqrt{\left|1 - \frac{2}{3}x\right|} \text{ avec } 1 - \frac{2}{3}x > 0$$

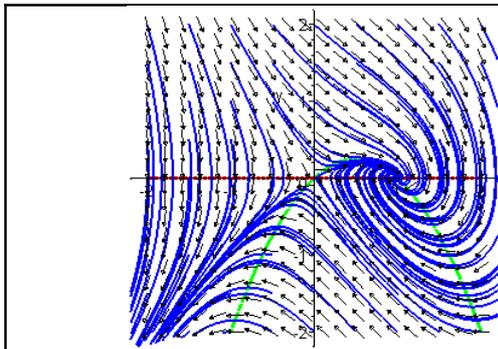


Figure 23a : Portrait de phase du modèle de bifurcation homocline avec $c = -1$.

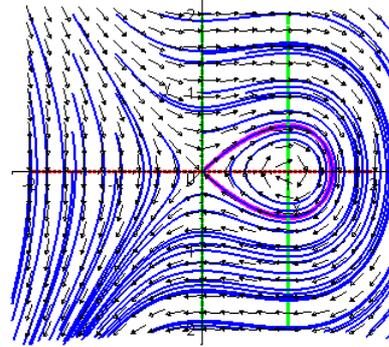


Figure 23b : Portrait de phase du modèle de bifurcation homocline avec $c = 0$.

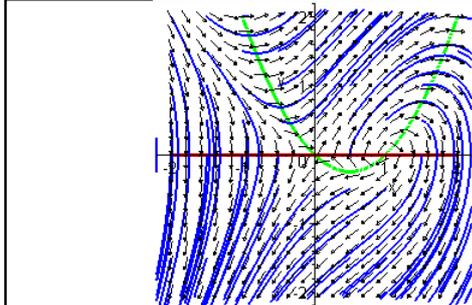


Figure 23c : Portrait de phase du modèle de bifurcation homocline avec $c = 1$.

5. Bifurcation de Hopf en temps discret

A finir...