Biologie Mathématique et Modélisation (M1 – aMIV)

Chapitre 1 : Bifurcations dans R

Sandrine CHARLES (04/07/2007)

1. Bifurcations dans R à un paramètre

Soit une fonction réelle d'une variable réelle $x(t)$ dépendant d'un paramètre réel *c*, $c \in \mathbb{R}$.

La forme générale de l'équation différentielle gouvernant la variable x est la suivante :

$$\dot{x} = f(x,c) \tag{1.0}$$

Pour chaque valeur du paramètre *c*, il est possible de déterminer les points d'équilibre et leurs propriétés de stabilité. Ainsi, à chaque valeur de *c* correspondra un portrait de phase de l'équation (1.1). Le nombre de points d'équilibre peut varier avec la valeur du paramètre *c*. Un point d'équilibre asymptotiquement stable pour un certain domaine de valeur du paramètre *c* peut devenir instable sur un autre domaine. Les changements qualitatifs du portrait de phase sont appelés des ***bifurcations*** et se produisent pour des valeurs particulières du paramètre c^*, appelée valeur de bifurcation.

Nous allons maintenant présenter les principales bifurcations se produisant pour une équation du type (1.1).

1.1. La bifurcation selle-noeud (« saddle-node »)

Soit l'équation différentielle suivante dépendant d'un paramètre réel *c :*

$$\dot{x} = f(x,c) = c + x^2 \tag{1.1}$$

Recherchons les points d'équilibre de cette équation. Trois cas doivent être distingués :

1. $c < 0$

Dans ce cas, nous pouvons écrire $c = -|c|$. Les points d'équilibre sont solutions de l'équation suivante :

$$\dot{x} = x^2 - |c| = 0 \quad \text{soit} \quad x^2 = |c|$$

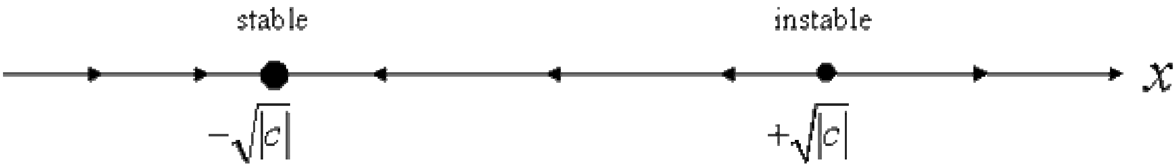
Ainsi, si $c < 0$, il existe deux points d'équilibre de coordonnées respectives $x_1^*(c) = -\sqrt{|c|}$ et $x_2^*(c) = +\sqrt{|c|}$. L'équation (1.2) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\dot{x} = \left(x + \sqrt{|c|}\right)\left(x - \sqrt{|c|}\right) = \left(x - x_1^*(c)\right)\left(x - x_2^*(c)\right)$$

Le signe de $\dot{x}$ est celui du premier coefficient à l'extérieur des racines ; il est donc le suivant :

- Si $x_2^*(c) < x < x_1^*(c)$, alors $\dot{x} < 0$, c'est-à-dire que la variable *x* est une fonction décroissante du temps *t*.
- Si $x < x_2^*(c)$ ou $x > x_1^*(c)$, alors $\dot{x} > 0$, c'est-à-dire que la variable *x* est une fonction croissante du temps *t*.

Les résultats précédents montrent que pour toute valeur du paramètre $c < 0$ le point d'équilibre $x_2^*(c)$ est stable et le point d'équilibre $x_1^*(c)$ est instable. Voici le portrait de phase correspondant.



2. $c = 0$

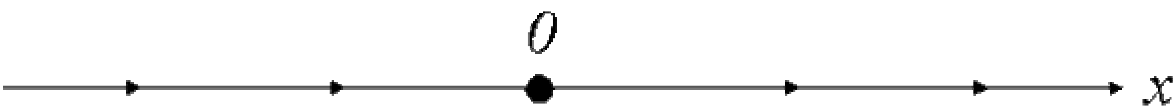
Dans ce cas, l'équation (1.2) se réduit à l'expression suivante :

$$\dot{x} = x^2$$

admettant un point d'équilibre unique $x^* = 0$.

Ce point d'équilibre est non hyperbolique car $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*=0} = [2x]_{x^*=0} = 0$.

Cependant, $\forall x \in R - \{0\}$, $\dot{x} > 0$, ainsi la variable *x* est une fonction croissante du temps de part et d'autre du point d'équilibre $x^* = 0$, qui est donc un shunt positif. Ci-dessous le portrait de phase dans le cas $c = 0$:



3. $c > 0$

Les points d'équilibre doivent être solutions de l'équation suivante

$$x^2 = -c > 0$$

qui n'admet pas de solutions réelles. De plus, pour toutes valeurs de *x*, $\dot{x} > 0$, ainsi la variable *x* est toujours croissante avec le temps.

L'ensemble des résultats précédents se résume dans un diagramme de bifurcation. Ce diagramme porte en abscisse le paramètre c et en ordonnées les coordonnées des points d'équilibre (Figure 1).

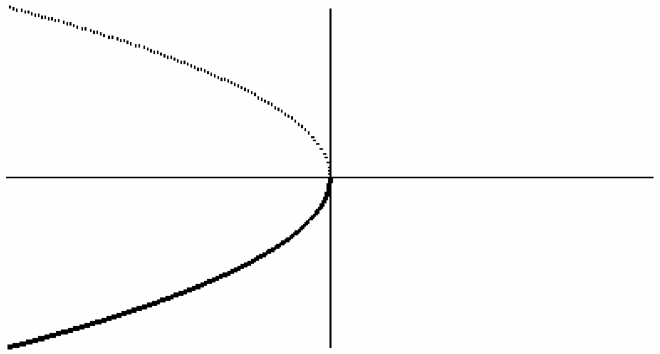


Figure 1 : Bifurcation selle-nœud

Pour les valeurs de $c<0$, on observe deux branches correspondant respectivement au point d'équilibre $x_2^*(c)$ qui est stable et à $x_1^*(c)$ qui est instable. Pour préciser la stabilité de chaque point fixe, on trace une branche en trait plein (resp. tireté) lorsque le point d'équilibre correspondant est stable (resp. instable). Pour $c=0$, les deux points d'équilibre viennent se confondre avec l'origine qui est point d'équilibre unique non hyperbolique (shunt positif). Enfin, pour $c>0$ il n'existe pas de points d'équilibre.

On voit dans cet exemple que pour la valeur particulière $c^*=0$, le portrait de phase change qualitativement. En traversant la valeur $c^*=0$, le nombre de points d'équilibre passe de deux à zéro. Cette valeur particulière du paramètre c est la *valeur de bifurcation* pour laquelle se produit une bifurcation appelée *bifurcation selle-noeud*.

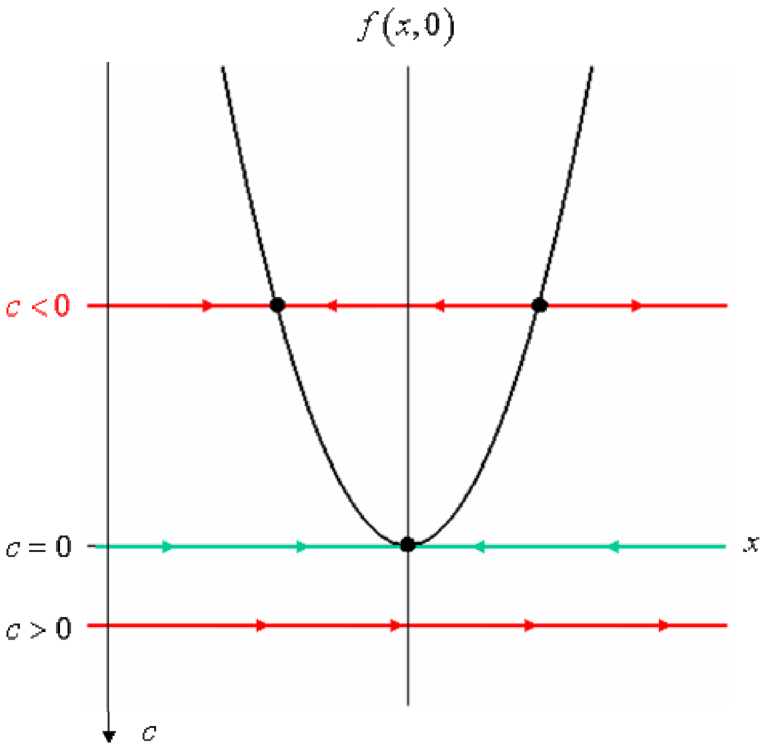
Remarque : Dans le cas où le paramètre c est additif, il est facile de procéder en écrivant l'équation sous la forme suivante :

$$\dot{x}=f(x,0)+c$$

avec des points d'équilibre solutions de $f(x,0)=-c$.

Ainsi, d'une manière générale, les points d'équilibre se trouvent à l'intersection de la courbe $f(x,0)$ et de la droite horizontale $y=-c$.

Dans l'exemple précédent, $f(x,0)=x^2$. La figure suivante permet de retrouver facilement les trois cas possibles selon le signe du paramètre c :



Les propriétés de stabilité de chaque point d'équilibre s'obtiennent en recherchant le signe de $\dot{x}$. D'une manière générale, la position de la courbe $f(x,0)$ par rapport à la droite horizontale $y=-c$ permet de déterminer la stabilité de chaque point fixe. En effet, $\dot{x}>0$ (resp. $\dot{x}<0$) si $f(x,0)>-c$ (resp. $f(x,0)<-c$).

1.2. La bifurcation transcritique

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}=cx+x^2 \tag{1.2}$$

Recherchons les points d'équilibre de cette équation selon les valeurs du paramètre *c*.

Trois cas doivent être étudiés :

1. $c<0$

Dans ce cas, nous pouvons écrire $c=-|c|$. Les points d'équilibre sont solutions de l'équation suivante :

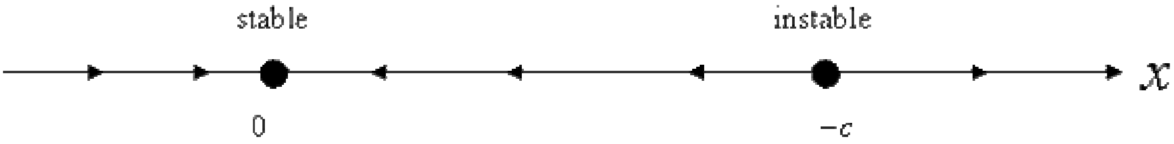
$$\dot{x}=x(x-|c|)=0$$

qui admet deux solutions $x_1^*=0$ et $x_2^*(c)=|c|$. On a donc :

$$\dot{x}=x(x-|c|)=x\left(x-x_2^*(c)\right)$$

- Si $0 < x < x_2^*(c)$, alors $\dot{x} < 0$, c'est-à-dire que la variable x est une fonction décroissante du temps *t*.
- Si $x < 0$ ou $x > x_2^*(c)$, alors $\dot{x} > 0$, c'est-à-dire que la variable x est une fonction croissante du temps *t*.

Ainsi, 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable et $x_2^*(c)$ est un point d'équilibre instable. La figure suivante présente le portrait de phase dans le cas $c < 0$.



2. $c = 0$

Dans ce cas, l'équation devient :

$$\dot{x} = x^2$$

admettant un point d'équilibre unique $x_1^* = 0$ non hyperbolique qui est un shunt positif.

3. $c > 0$

Dans ce cas, les points d'équilibre sont solutions de l'équation suivante :

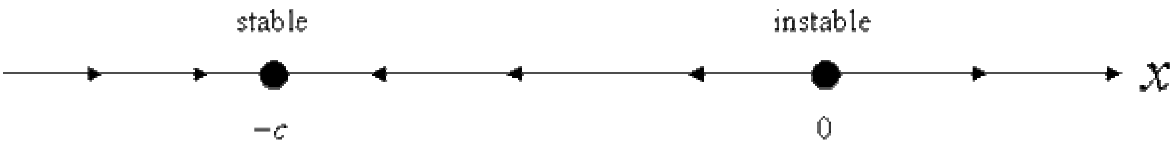
$$\dot{x} = x(x+c) = 0$$

qui admet deux solutions $x_1^* = 0$ et $x_2^*(c) = -c < 0$. On a donc :

$$\dot{x} = x(x+c) = x\left(x - x_2^*(c)\right)$$

- Si $x_2^*(c) < x < 0$, alors $\dot{x} < 0$
- Si $x < x_2^*(c)$ ou $x > 0$, alors $\dot{x} > 0$

Ainsi, 0 est un point d'équilibre instable cette fois et $x_2^*(c)$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable. La figure suivante présente le portrait de phase dans le cas $c > 0$.



Le diagramme de bifurcation de la figure 2 montre que la valeur de bifurcation est $c^* = 0$. L'origine, qui est stable pour $c < 0$, devient instable pour $c > 0$ alors que le point d'équilibre $x_2^*(c)$ passe de stable à instable. Cette bifurcation est appelée ***bifurcation transcritique***. Le nombre de points d'équilibre est conservé mais leur nature change à la valeur de bifurcation $c^* = 0$.

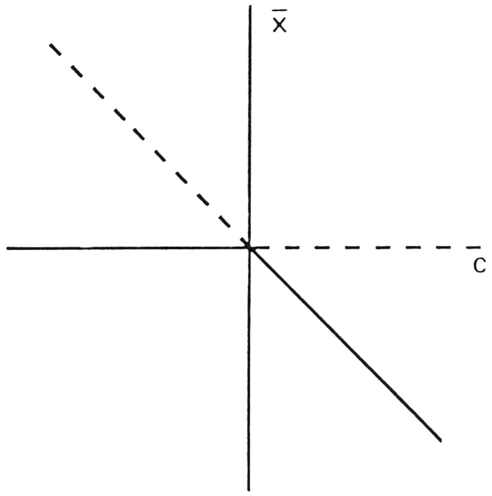


Figure 2 : Bifurcation trans-critique

1.3. Bifurcation fourche super-critique (ou « pitchfork »)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = cx - x^3 \tag{1.3}$$

Recherchons les points d'équilibre de cette équation selon les valeurs du paramètre *c*. De nouveau, trois cas doivent être étudiés :

1. $c < 0$

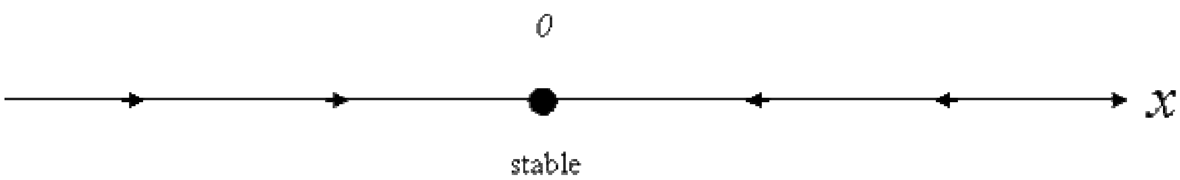
Nous pouvons alors écrire $c = -|c|$. Les points d'équilibre sont solutions de l'équation suivante :

$$\dot{x} = -x\left(x^2 + |c|\right) = 0$$

qui admet une solution unique $x_1^* = 0$. Le signe de $\dot{x}$ est donné par le signe de $-x$:

- Si $x > 0$, alors $\dot{x} < 0$
- Si $x < 0$, alors $\dot{x} > 0$

Ainsi, 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.



2. $c = 0$

Dans ce cas, l'équation devient :

$$\dot{x} = -x^3$$

admettant un point d'équilibre unique $x_1^* = 0$ non hyperbolique car $\frac{\partial f}{\partial x} = \left[-3x^2\right]_{x=0} = 0$.

Cependant :

- Si $x > 0$, alors $\dot{x} < 0$
- Si $x < 0$, alors $\dot{x} > 0$

Par conséquent, l'origine est point d'équilibre asymptotiquement stable lorsque $c = 0$.

3. $c > 0$

Dans ce cas, les points d'équilibre sont solutions de l'équation suivante :

$$\dot{x} = x\left(c - x^2\right) = 0$$

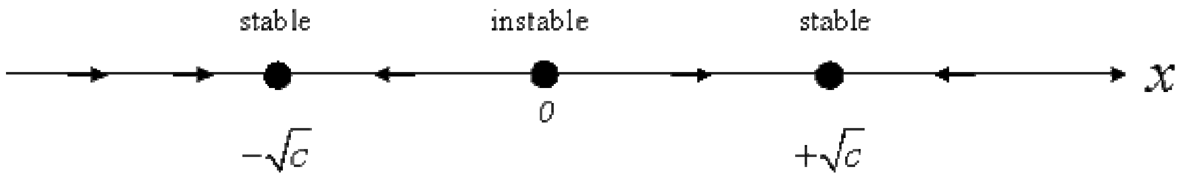
qui admet trois solutions $x_1^* = 0$, $x_2^*(c) = -\sqrt{c}$ et $x_3^*(c) = +\sqrt{c}$. On a alors :

$$\dot{x} = x\left(c - x^2\right) = x\left(\sqrt{c} - x\right)\left(\sqrt{c} + x\right) = x\left(x - x_2^*(c)\right)\left(x_3^*(c) - x\right)$$

- Si $x < x_2^*(c)$, alors $\dot{x} > 0$
- Si $x_2^*(c) < x < 0$, alors $\dot{x} < 0$
- Si $0 < x < x_3^*(c)$, alors $\dot{x} > 0$
- Si $x > x_3^*(c)$, alors $\dot{x} < 0$

Ainsi, 0 est un point d'équilibre instable entouré de deux points d'équilibre asymptotiquement stables $x_2^*(c) = -\sqrt{c}$ et $x_3^*(c) = +\sqrt{c}$.

Voici le portrait de phase dans le cas $c > 0$.



Le diagramme de bifurcation (Figure 3) montre que pour la valeur de bifurcation $c^* = 0$, le nombre de points d'équilibre passe de un à trois. Le point d'équilibre situé à l'origine, qui est stable pour $c < 0$, devient instable pour $c > 0$ en s'entourant de deux points d'équilibre stables en $\pm\sqrt{c}$. Cette bifurcation est appelée *bifurcation fourchette super-critique*.

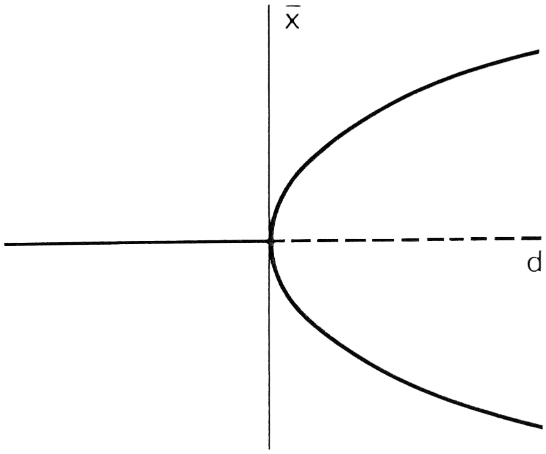


Figure 3 : Bifurcation fourchette super-critique

1.4. La bifurcation fourche sous-critique

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = cx + x^3 \tag{1.4}$$

Recherchons les points d'équilibre de cette équation selon les valeurs du paramètre *c*.

1. $c < 0$

Dans ce cas, les points d'équilibre sont solutions de l'équation suivante :

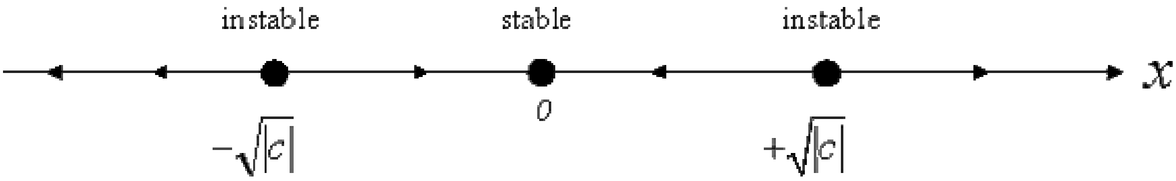
$$\dot{x} = x\left(x^2 - |c|\right) = 0$$

qui admet trois solutions $x_1^* = 0$, $x_2^*(c) = -\sqrt{|c|}$ et $x_3^*(c) = +\sqrt{|c|}$. On a alors :

$$\dot{x} = x\left(x^2 - |c|\right) = x\left(x - \sqrt{|c|}\right)\left(x + \sqrt{|c|}\right) = x\left(x - x_3^*(c)\right)\left(x + x_2^*(c)\right)$$

- Si $x < x_2^*(c)$, alors $\dot{x} < 0$
- Si $x_2^*(c) < x < 0$, alors $\dot{x} > 0$
- Si $0 < x < x_3^*(c)$, alors $\dot{x} < 0$
- Si $x > x_3^*(c)$, alors $\dot{x} > 0$

Ainsi, 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable entouré de deux points d'équilibre instables $x_2^*(c) = -\sqrt{|c|}$ et $x_3^*(c) = +\sqrt{|c|}$. Ci-dessous le portrait de phase dans le cas $c > 0$.



2. $c = 0$

Dans ce cas, l'équation devient :

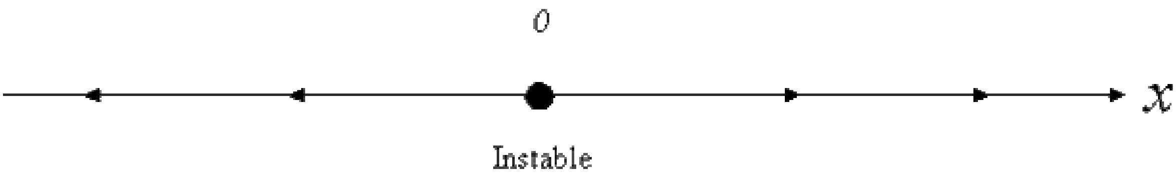
$$\dot{x} = x^3$$

admettant un point d'équilibre unique $x_1^* = 0$ non hyperbolique car $\frac{\partial f}{\partial x} = \left[3x^2\right]_{x=0} = 0$.

Cependant :

- Si $x > 0$, alors $\dot{x} > 0$
- Si $x < 0$, alors $\dot{x} < 0$

Par conséquent, l'origine est un point d'équilibre instable lorsque $c = 0$.



3. $c > 0$

Dans ce cas, les points d'équilibre sont solutions de l'équation suivante :

$$\dot{x} = x\left(c + x^2\right) = 0,$$

qui admet une seule solution $x_1^* = 0$. Le signe de $\dot{x}$ est le signe de x :

- Si $x < 0$, alors $\dot{x} < 0$
- Si $x > 0$, alors $\dot{x} < 0$

Ainsi, l'origine est un point d'équilibre instable dans le cas $c > 0$.

Le diagramme de bifurcation (Figure 4) montre que pour la valeur de bifurcation $c^* = 0$, le nombre de points d'équilibre passe de trois à un. Le point d'équilibre situé à l'origine, qui est stable pour $c < 0$ et entouré de deux points d'équilibre instables en $\pm\sqrt{c}$, devient instable pour $c > 0$. On observe de plus la disparition des deux autres points d'équilibre pour $c > 0$. Cette bifurcation est appelée *bifurcation fourchette sous-critique*.

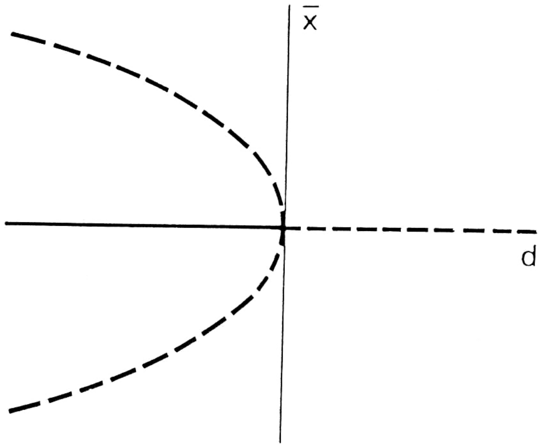


Figure 4 : Bifurcation fourchette sous-critique

1.5. La bifurcation hystérésis

Soit l'équation différentielle suivante dépendant d'un paramètre réel c :

$$\dot{x} = f(x,c) = c + x - x^3 \qquad (1.5)$$

Le paramètre est <u>additif</u> et l'équation peut être réécrite sous la forme :

$$\dot{x} = c + f(x,0) \text{ avec } f(x,0) = x - x^3$$

La courbe $f(x,0)$ s'annule en $x = 0$ et en $x = \pm 1$.

Elle présente un maximum égal à $+\frac{2}{3\sqrt{3}}$ en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et un minimum égal à $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ en $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

La figure 5 donne le graphe de la fonction $f(x,0) = x - x^3$.

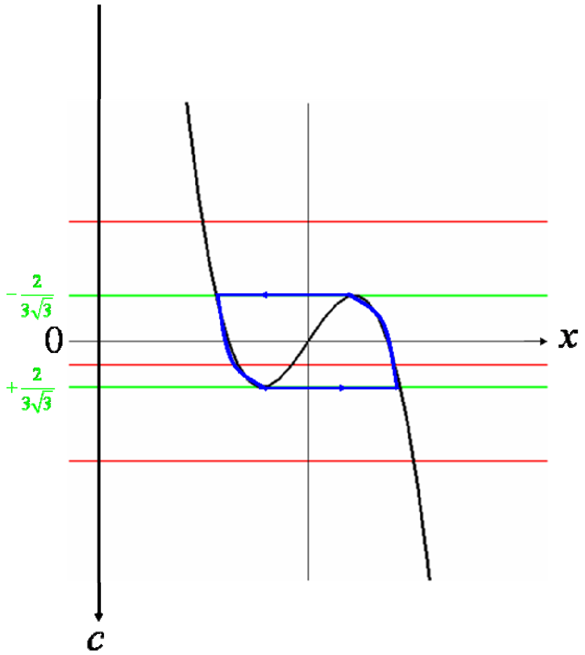


Figure 5 : Représentation graphique de la fonction $f(x,0) = x - x^3$**.**

Les points d'équilibre de l'équation (1.5) se trouvent à l'intersection de la courbe $f(x,0)$ et de la droite horizontale $x = -c$. Trois cas se distinguent :

- Si $c > \frac{2}{3\sqrt{3}}$, l'équation (1.5) admet un point d'équilibre unique asymptotiquement stable.
- Si $-\frac{2}{3\sqrt{3}} < c < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, le système admet trois points d'équilibre, un point d'équilibre instable entouré de deux points d'équilibre asymptotiquement stables.
- Si $c < -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, l'équation admet à nouveau un seul point d'équilibre asymptotiquement stable.

Le diagramme de bifurcation (Figure 6) montre que pour les valeurs du paramètre $c = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$, le nombre de points d'équilibre passe de un à trois et à nouveau repasse à un seul point fixe.

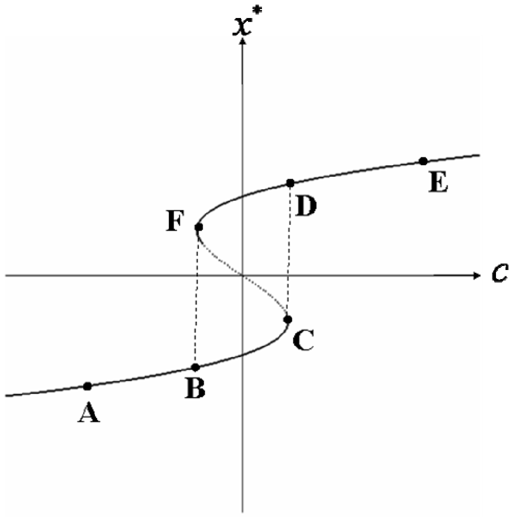


Figure 6 : Diagramme de la bifurcation hystérésis.

Il est possible de décrire un cycle d'hystérésis. En effet pour une valeur de $c < -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, quelque soit la condition initiale $x(0)$, la variable $x(t)$ va tendre vers le point d'équilibre unique asymptotiquement stable noté **A**. Faisons maintenant varier le paramètre c en l'augmentant progressivement. Lorsque $c = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, point **B**, un nouveau point d'équilibre apparaît. Pour les valeurs du paramètre telles que $-\frac{2}{3\sqrt{3}} < c < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, trois points d'équilibre existent. Cependant, l'équilibre précédent continue d'être asymptotiquement stable et la variation du paramètre c se fait en restant sur la même branche du diagramme jusqu'au point **C**. A partir de ce point **C** correspondant à $c = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$, une augmentation aussi petite soit-elle du paramètre c provoque un saut sur la branche supérieure stable en un point **D**. Toute augmentation du paramètre c se fait ensuite en restant sur cette branche stable jusqu'en un point **E**.

Maintenant, faisons le chemin inverse, c'est-à-dire en faisant varier le paramètre c en le diminuant progressivement à partir du point **E**. Cette fois, le système reste sur la branche stable supérieure jusqu'au point **F** correspondant à $c = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, Pour cette valeur du paramètre, le système saute sur la branche stable inférieure au point **B**. Enfin, la diminution du paramètre c conduit au point de départ **A**.

Pendant la variation du paramètre c, le système a décrit un cycle **ABCDEDFBA** appelé cycle d'hystérésis. Le parcours suivi pendant la phase d'augmentation du paramètre c (**ABCDE**) est différent que celui suivi pendant la phase de diminution (**EDFBA**). De nombreux phénomènes physiques et naturels correspondent à de tels cycles d'hystérésis, c'est-à-dire que le chemin suivi par le système dépend du sens de parcours.

2. Les bifurcations dans R à deux paramètres

Dans ce paragraphe nous n’aborderons qu’un seul type de bifurcation dans R à deux paramètres, la *fronce* ou « cusp » en anglais.

Soit l'équation différentielle suivante dépendant d'un paramètre réel c :

$$\dot{x} = f\left(x, c, d\right) = c + dx - x^3 \tag{2.1}$$

où c et d sont deux paramètres réels. La fonction f est cette fois une fonction réelles de la variable réelles x et des deux paramètres réels c et d. Le paramètre c étant additif, il est possible de réécrire l'équation précédente comme suit :

$$\dot{x} = f\left(x, 0, d\right) + c \qquad \text{avec} \qquad f\left(x, 0, d\right) = dx - x^3$$

Les points d’équilibre de l'équation (2.1) se trouvent à l'intersection de la courbe $f\left(x, 0, d\right)$ et de la droite $y = -c$. Trois cas doivent être distingués selon le signe de d :

1. $d > 0$

Dans ce cas, la courbe $f\left(x, 0, d\right)$ s'annule en trois points d'abscisse $x = 0, \pm\sqrt{d}$ et présente un maximum en $x = \sqrt{\frac{d}{3}}$ et un minimum en $x = -\sqrt{\frac{d}{3}}$ d'ordonnées $\pm\frac{2d}{3}\sqrt{\frac{d}{3}}$ (Figure 7).

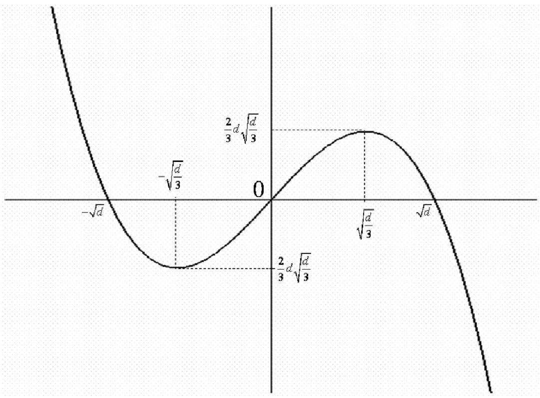


Figure 7 : Représentation graphique de la courbe $f\left(x, 0, d\right) = dx - x^3$ **.**

- Pour $-\frac{2d}{3}\sqrt{\frac{d}{3}} < c < \frac{2d}{3}\sqrt{\frac{d}{3}}$, le système admet trois points d'équilibre, un instable à l'origine entouré de deux points d'équilibre asymptotiquement stables.
- Pour $c = \pm\frac{2d}{3}\sqrt{\frac{d}{3}}$, deux points d'équilibre (le point d'équilibre asymptotiquement stable avec l'un des deux autres instables) se rejoignent et se confondent avec soit le maximum ou le minimum de la fonction $f(x,0,d)$.
- Enfin, si $x < -\frac{2d}{3}\sqrt{\frac{d}{3}}$ ou $x > \frac{2d}{3}\sqrt{\frac{d}{3}}$, le système admet un point d'équilibre unique stable.

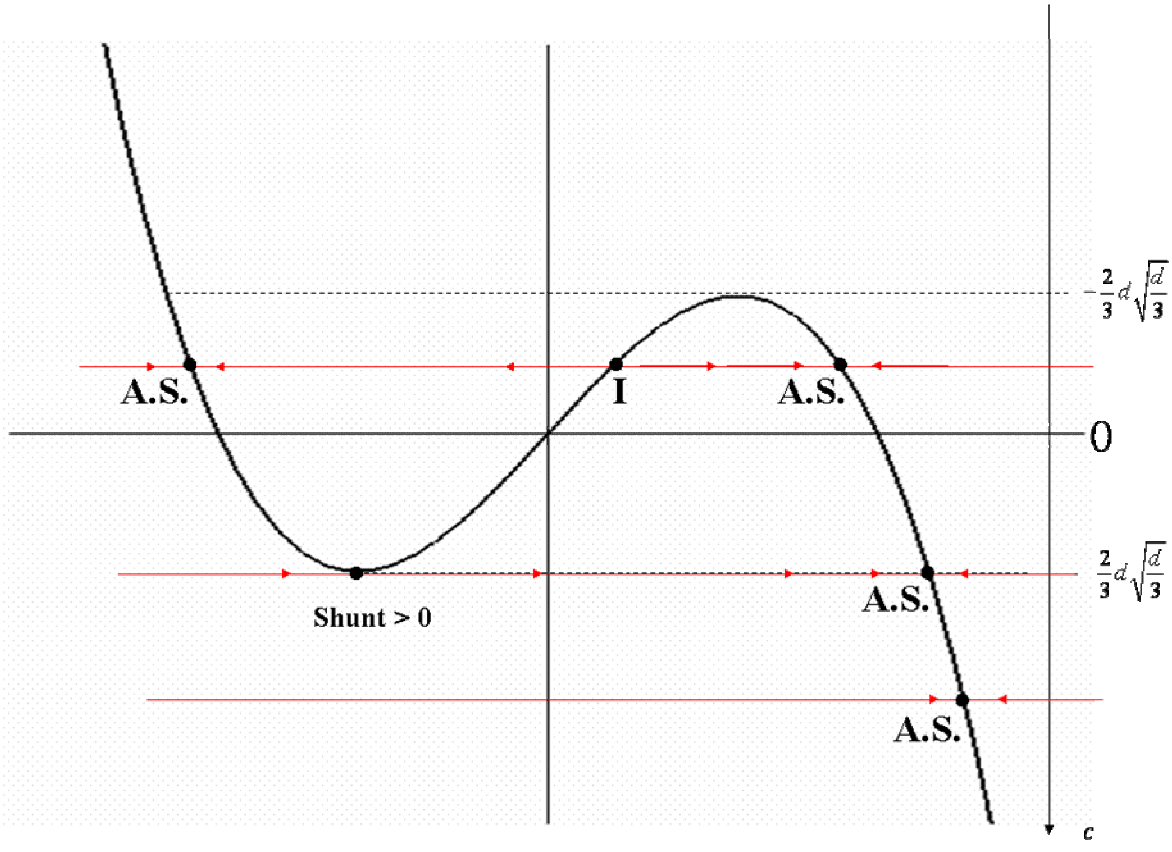


Figure 8 : Portraits de phase possibles selon la position de c ***et*** d***, dans le cas où*** d ***est > 0.***

2. $d = 0$

Dans ce cas, la courbe $f(x,0,d)$ ne s'annule qu'à l'origine avec un point d'inflexion de pente nulle également situé à l'origine, puisque $f(x,0,d) = -x^3$.

Le système possède un seul point d'équilibre asymptotiquement stable (Figure 9).

3. $d < 0$

Dans ce cas, la courbe $f\left(x,0,d\right)$ ne s'annule qu'à l'origine avec un point d'inflexion en ce point (Figure 9). Le système possède un seul point d'équilibre (qui n'est pas nécessairement 0) asymptotiquement stable.

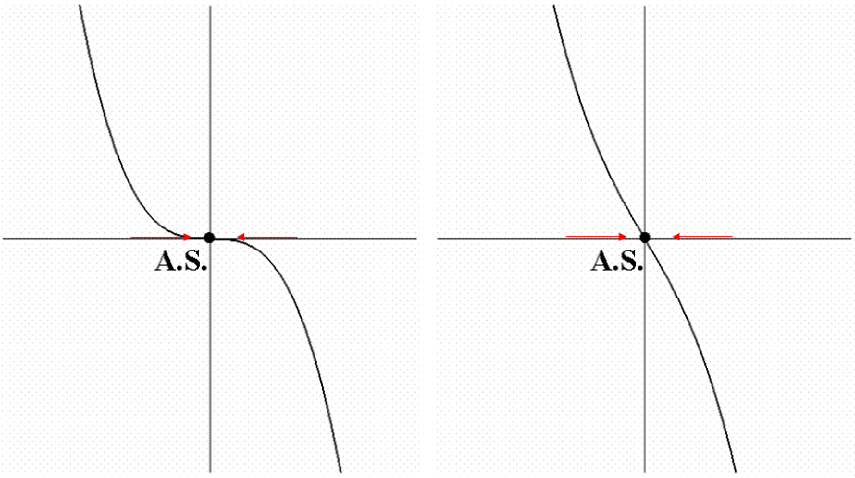


Figure 9 : Portraits de phase possibles selon que d est nul ou < 0.

En résumé, deux cas peuvent se produire, soit un point d'équilibre asymptotiquement stable, soit trois points d'équilibre dont deux asymptotiquement stables et un instable. Les valeurs des paramètres pour lesquels se produit la transition de un à trois points d'équilibre vérifient :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} c + dx - x^3 = 0 \\ d - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

En éliminant la variable *x* entre les deux équations, on obtient l'équation suivante donnant le lieu des points dans l'espace des paramètres correspondant à la bifurcation *fronce* :

$$4d^3 = 27c^2 \text{, soit } c = \pm 2\sqrt{\frac{d^3}{27}}$$

La courbe correspondante est donc discontinue (Figure 10). A l'intérieur de la courbe, l'équation différentielle (2.1) admet trois points d'équilibre, dont deux sont asymptotiquement stables et un est instable ; à l'extérieur de la courbe, l'équation différentielle (2.1) admet un seul point d'équilibre asymptotiquement stable.

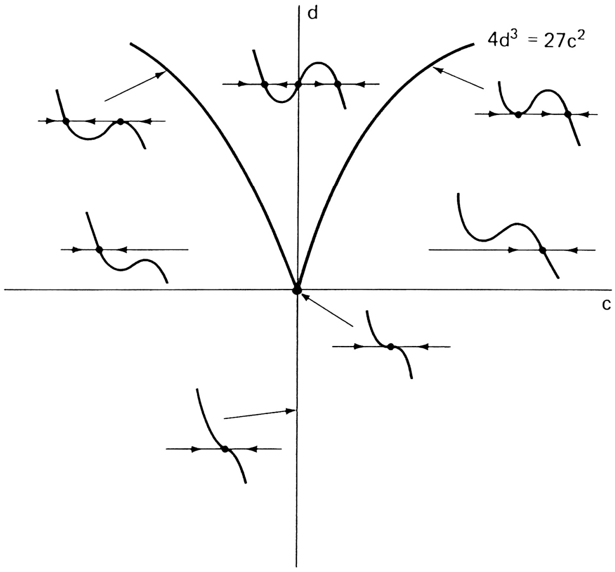


Figure 10 : Représentation graphique de la fronce $4d^3 = 27c^2$ dans le plan (c,d), avec quelques portraits de phase possibles de l'équation (2.1).

Il est possible de tracer un diagramme de bifurcation avec en ordonnée les coordonnées des point fixes en fonction du paramètre d à c constant (Figure 11).

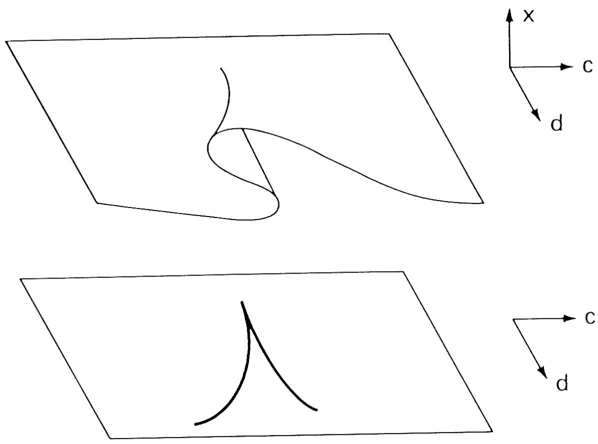


Figure 11 : Diagramme de bifurcation de l'équation différentielle cubique (2.1) dans l'espace (c,d,x). La fronce dans le graphe inférieur est l'ensemble des points dans le plan (c,d) pour lesquels la surface pliée du dessus possède une tangence verticale; au-dessus d'un point situé à l'intérieur de la fronce, la surface du dessus prend des valeurs multiples.

On voit que le diagramme complet de bifurcation en dimension trois présente une surface de bifurcation ayant l'allure d'une fronce, figure 11.

3. Pour finir : un exemple

On s'intéresse à l'équation suivante $\dot{x} = (x-\lambda)(x^2+\lambda)$. On cherche la nature des solutions en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

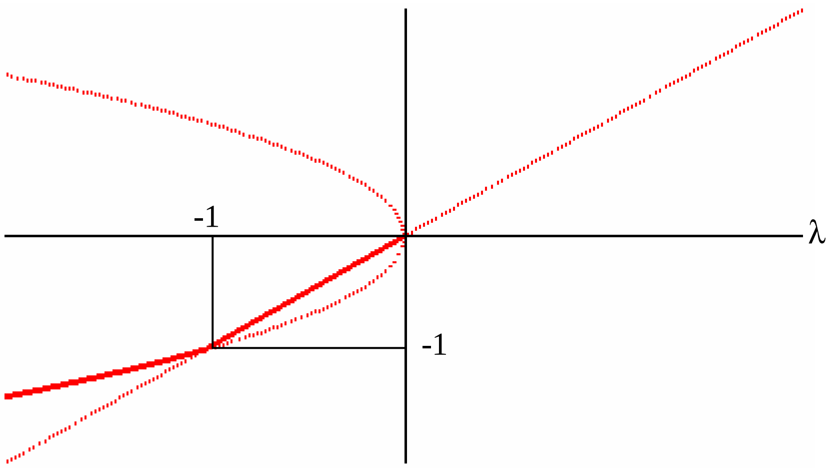


Figure 12 : Diagramme de bifurcation de l'équation différentielle $\dot{x} = (x-\lambda)(x^2+\lambda)$.