Mathématiques Appliquées à la Biologie (MAB)

UE BIO3025L

Responsable: Mme Isabelle AMAT, isabelle.amat@univ-lyon1.fr

Intervenantes CM : Mme Sandrine CHARLES, sandrine.charles@univ-lyon1.fr (Algèbre Linéaire et Modélisation)

Mme Marie-Claude VENNER, marie-claude.venner@univ-lyon1.fr (statistiques)

Objectif et organisation de l'UE

- Acquisition de méthodes mathématiques et statistiques pour comprendre et analyser des phénomènes biologiques : *biochimie, génétique, physiologie, épidémiologie, biologie des populations…*

- Présentation des concepts mathématiques et familiarisation avec leur utilisation en biologie : 24 h CM, 30 h TD, dont la moitié sous
- Trois parties :
  1. Algèbre linéaire : 6h CM + 9h TD
  2. Systèmes dynamiques : 9h CM + 9h TD
  3. Analyse multivariée : 9h CM + 9h TD

Modalités de Contrôle des Connaissances

- Contrôle Continu (CC) – Coef 0.4

  Deux épreuves en cours de semestre, information à suivre par e-mail

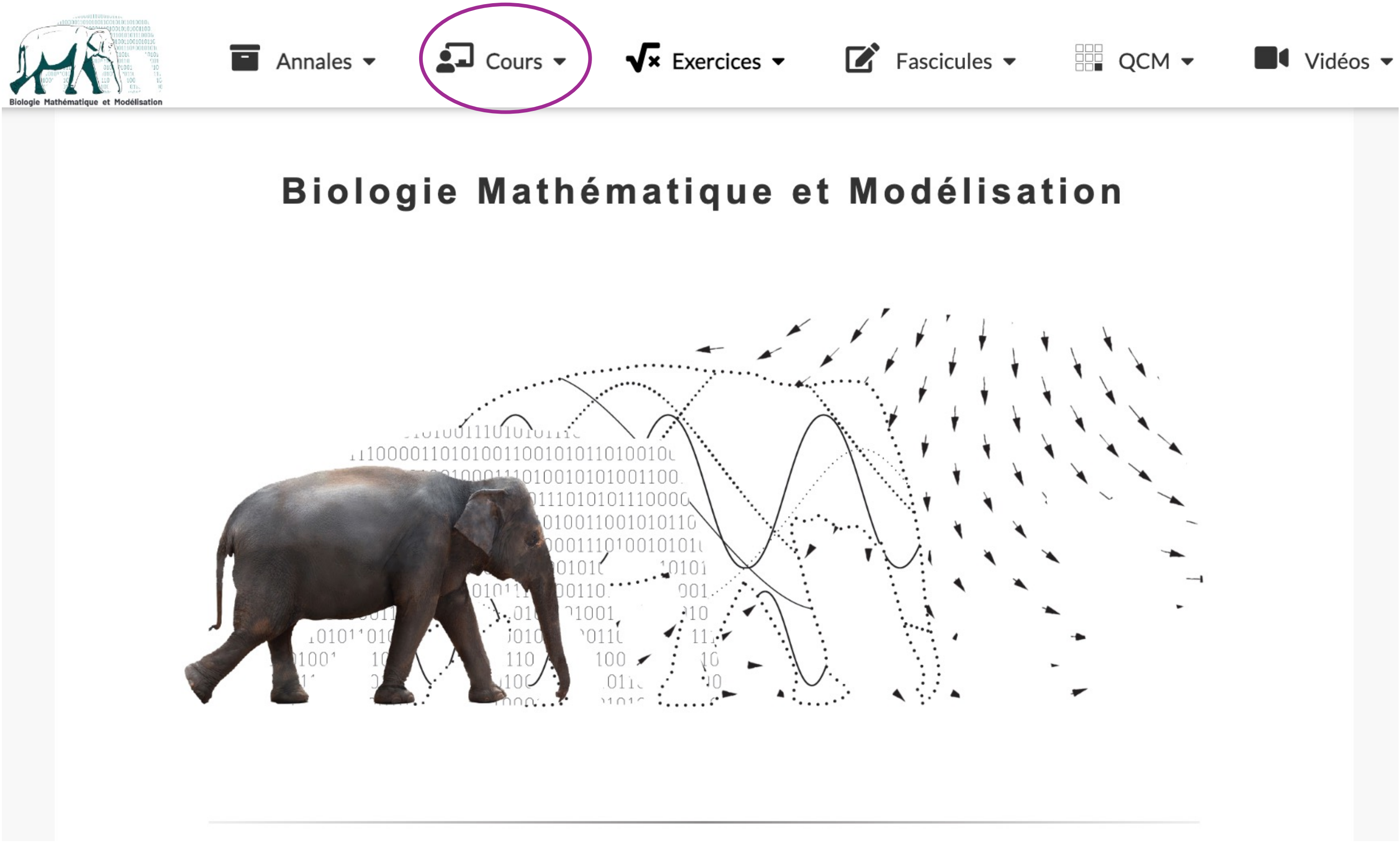
- Contrôle Terminal (CT) – Coef 0,6

  Durée 2h

- Pour chaque épreuve, deux sujets, au hasard sur deux des trois parties du cours
- Matériel autorisé : calculatrice et une feuille A4 recto-verso manuscrite originale pour chaque partie

Accès aux diaporamas de cours

http://bmm.univ-lyon1.fr/



Algèbre Linéaire (AL)

1. Introduction
2. Espaces Vectoriels
3. Applications Linéaires
4. Matrices
5. Diagonalisation
6. Applications géométriques

Année	# lieux
1955	1
1956	2
1957	6
1958	15
1959	29
1960	58
1961	117
1962	204
1963	342
1964	501


Photo: wikipedia

Modélisation en temps continu : $N(t)$

Année	# lieux
1955	1
1956	2
1957	6
1958	15
1959	29
1960	58
1961	117
1962	204
1963	342
1964	501

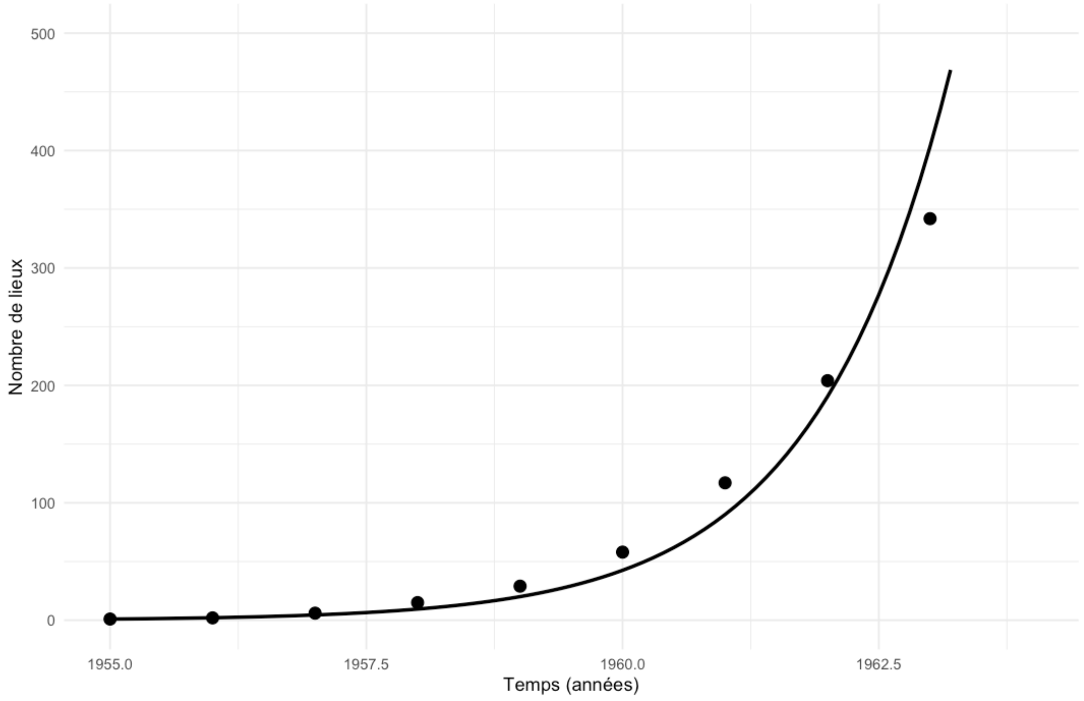
$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$N(t) = N_0 e^{\lambda(t-1955)}$$

avec $N_0 = 1$

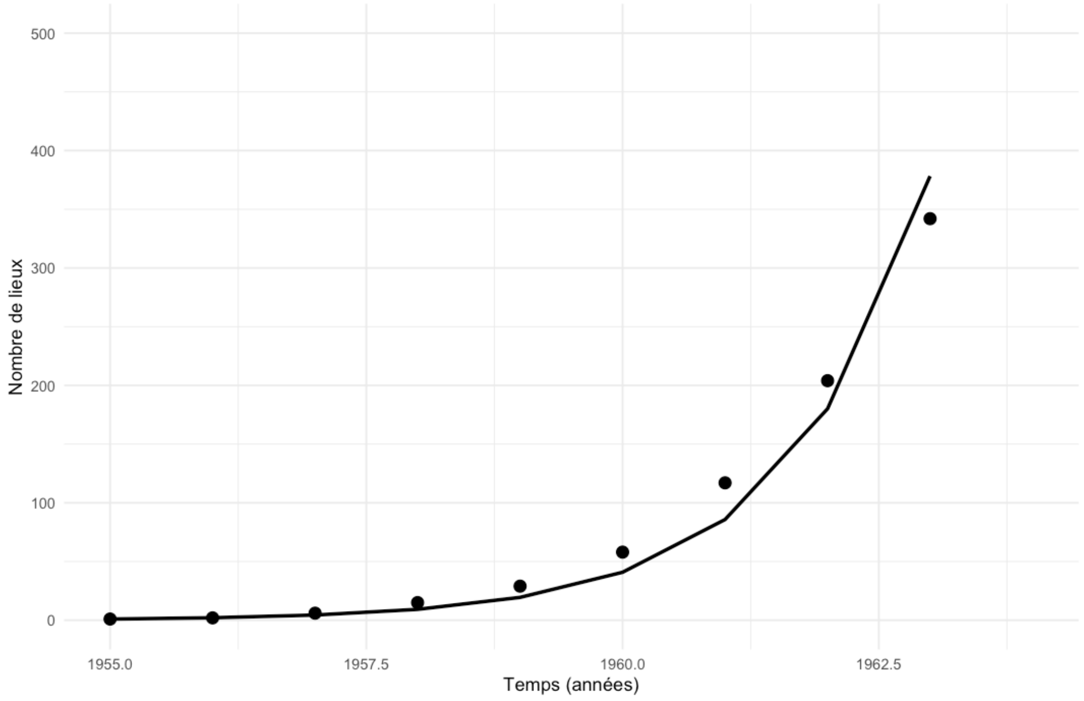
$\lambda \approx 0.75$



Modélisation en temps discret : N_t

Année	# lieux
1955	1
1956	2
1957	6
1958	15
1959	29
1960	58
1961	117
1962	204
1963	342
1964	501

$$N_{t+1} = N_t + \Delta N_t$$
$$\text{avec } \Delta N_t = \lambda N_t$$
$$\Updownarrow$$
$$N_{t+1} = N_t + \lambda N_t$$
$$\Updownarrow$$
$$N_{t+1} = rN_t$$
$$\text{avec } r = 1 + \lambda$$



En cas de populations « structurées »

- Par classe d’âge
  E.g., jeunes, adultes

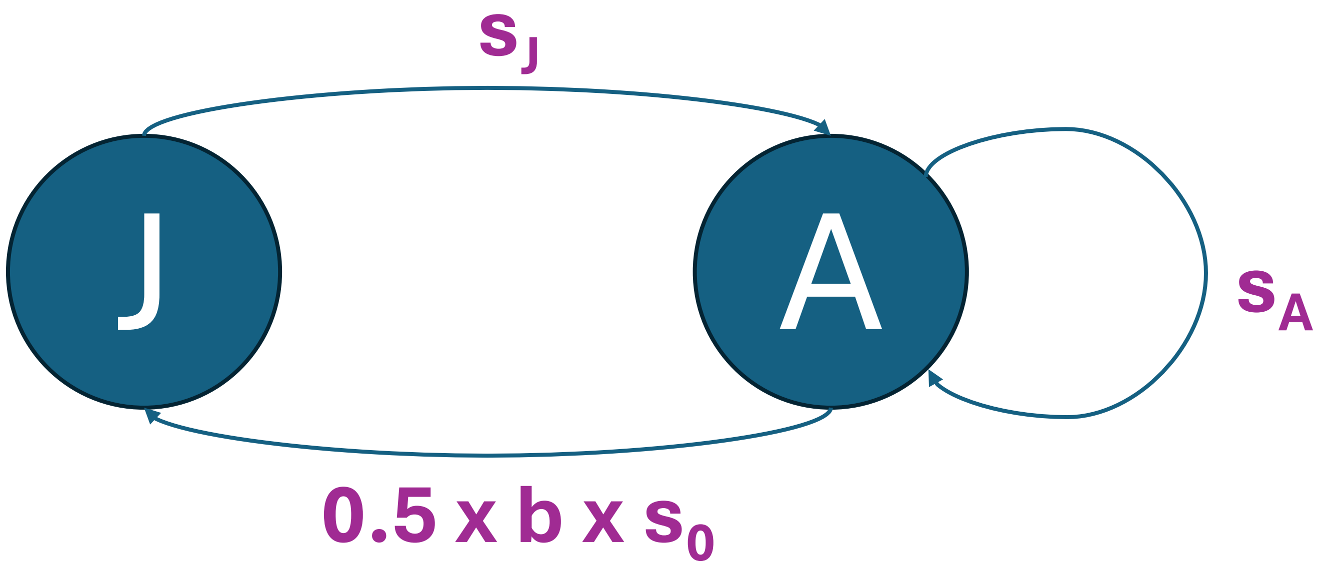
- Par statuts
  E.g., sains, infectés, résistants

- Par rôle
  E.g., résident, mutant

L'hirondelle de cheminée, *Hirundo rustica*

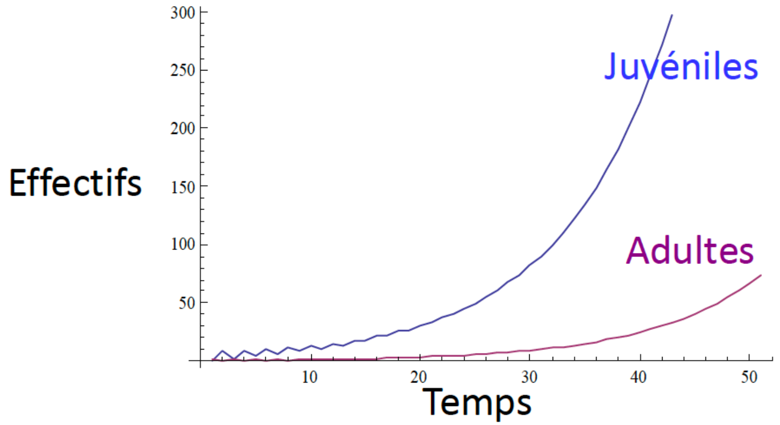
- Reproduction saisonnière
- Deux classes d'âge :
  - Juvéniles **J** (immatures) dont une fraction $\mathbf{s_J}$ devient sexuellement mature à la génération suivante.
  - Adultes **A** produisent en moyenne **b** descendants par femelles (dont une fraction $\mathbf{s_0}$ devient juvéniles). Une fraction $\mathbf{s_A}$ survive à la génération suivante.
- Sex-ratio équilibré
- Pas de temps = 1 génération

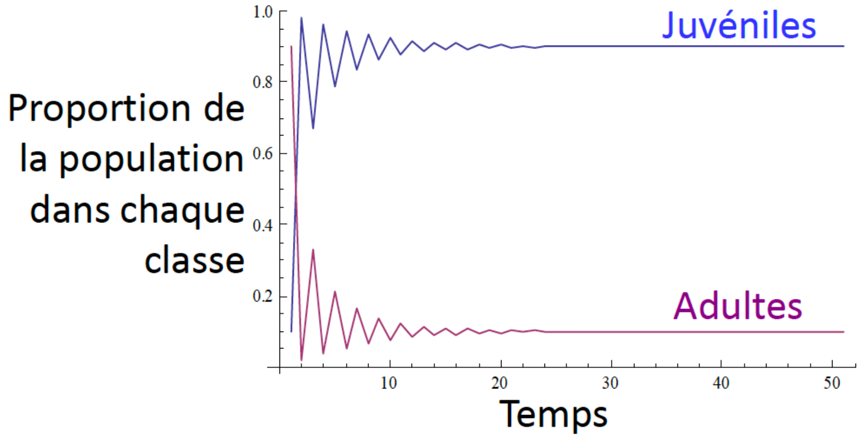
L'hirondelle de cheminée, *Hirundo rustica*

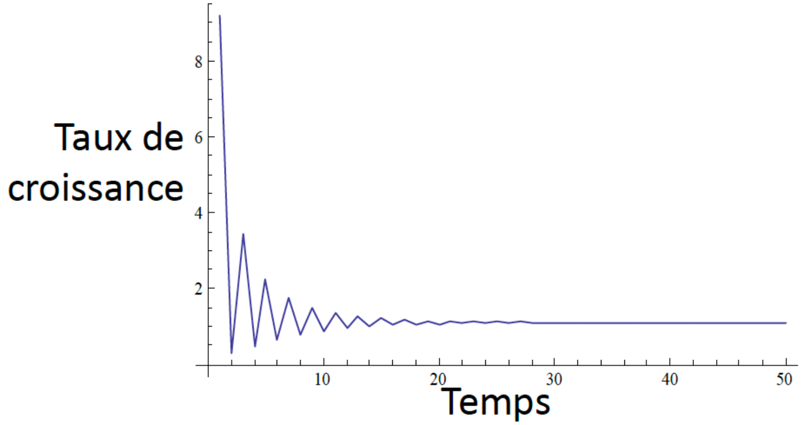


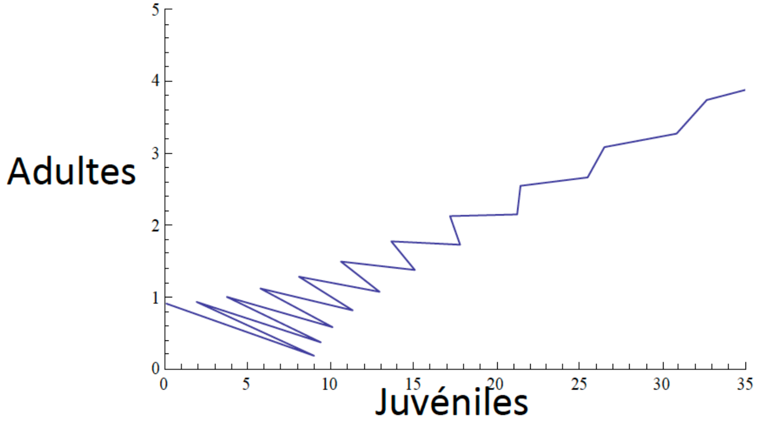
$$\begin{cases} J_{t+1} = 0.5 \times b \times s_0 \, A_t \\ A_{t+1} = s_J \, J_t + s_A \, A_t \end{cases}$$

L’hirondelle de cheminée, *Hirundo rustica*









En route vers l'algèbre linéaire

- Des vecteurs $$N_t = \begin{pmatrix} J_t \\ A_t \end{pmatrix}$$
- Des applications linéaires $$N_{t+1} = \mathbf{M}\ N_t \Leftrightarrow N_t = \mathbf{M}^t\ N_0$$
- Des matrices $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \times b \times s_0 \\ s_J & s_A \end{pmatrix}$$

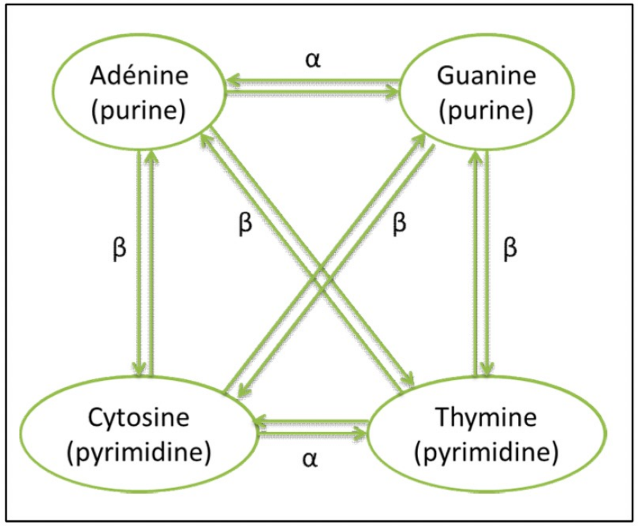
$$\begin{cases} J_{t+1} = 0.5 \times b \times s_0\ A_t \\ A_{t+1} = s_J\ J_t + s_A\ A_t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} J_{t+1} \\ A_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \times b \times s_0 \\ s_J & s_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_t \\ A_t \end{pmatrix}$$

Interprétation en termes de dynamique

- **Analyse transitoire**
  décrit la dynamique à court terme selon différentes conditions initiales
- **Analyse asymptotique**
  décrit la dynamique à long terme de la population ($t \to +\infty$)
  - Taux de croissance de la population ?
  - Répartition des individus dans les différentes classes ?
  - Influence relative des classes sur le taux de croissance ?
- **Analyse de perturbation**
  Influence relative des paramètres sur le taux de croissance ?

Composition en bases d’une séquence

Comprendre la composition en bases d’une séquence génomique.



$$V_t = \begin{pmatrix} n_A(t) \\ n_G(t) \\ n_C(t) \\ n_T(t) \end{pmatrix}$$

Vecteur

$$M = \begin{pmatrix} 1-\alpha-2\beta & \alpha & \beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha-2\beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & 1-\alpha-2\beta & \alpha \\ \beta & \beta & \alpha & 1-\alpha-2\beta \end{pmatrix}$$

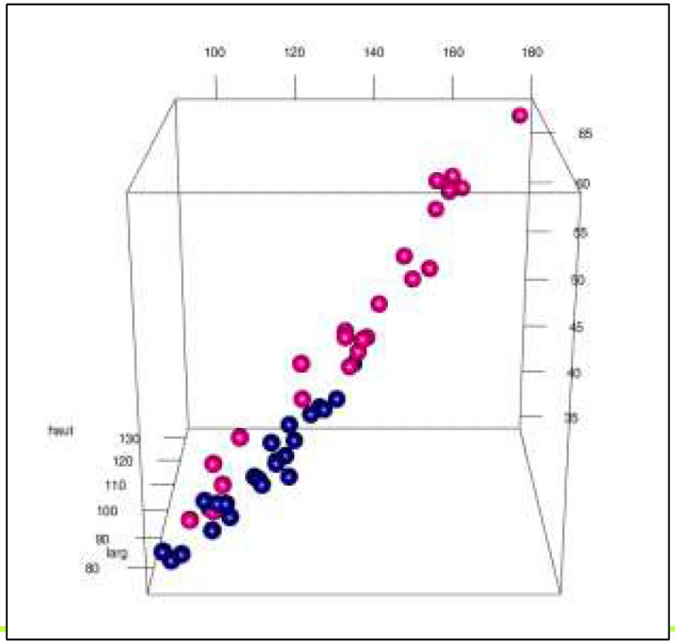
Matrice d’une application linéaire

Morphométrie des carapaces de tortues

Morphométrie des carapaces de tortues

$$ind_1 = \begin{pmatrix} 101 \\ 84 \\ 39 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Longueur} \\ \leftarrow \text{Largeur} \\ \leftarrow \text{Hauteur} \end{array}$$

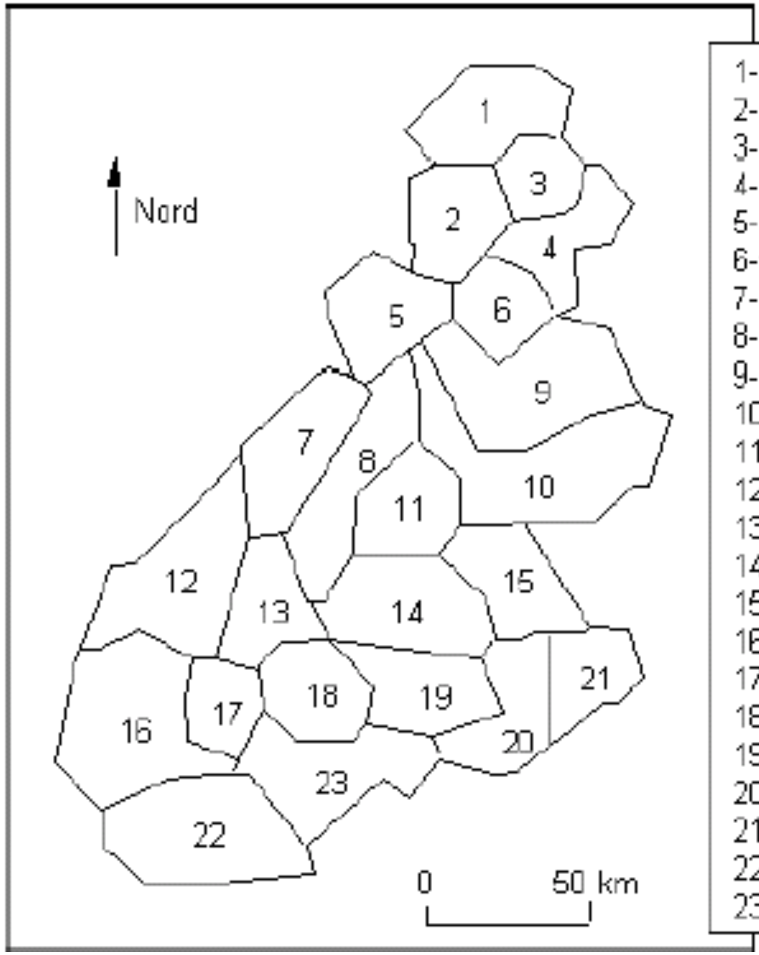
1 vecteur de $\mathbb{R}^3$



n = 48 vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

- Typologie des tortues ?
- Lien entre les variables ?

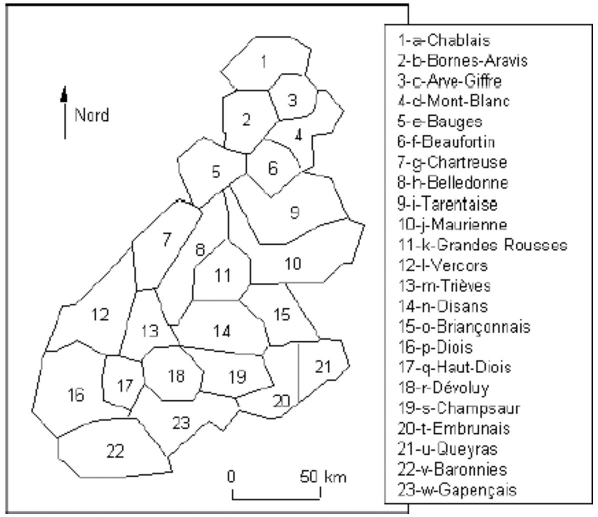
Les pré-Alpes et leur climat



1-a-Chablais
2-b-Bornes-Aravis
3-c-Arve-Giffre
4-d-Mont-Blanc
5-e-Bauges
6-f-Beaufortin
7-g-Chartreuse
8-h-Belledonne
9-i-Tarentaise
10-j-Maurienne
11-k-Grandes Rousses
12-l-Vercors
13-m-Trièves
14-n-Oisans
15-o-Briançonnais
16-p-Diois
17-q-Haut-Diois
18-r-Dévoluy
19-s-Champsaur
20-t-Embrunais
21-u-Queyras
22-v-Baronnies
23-w-Gapençais

Lieu	A	B	C	D	E	F	G
1	-6.6	1.1	9.7	22.9	131.5	139.5	1597
2	-7.5	0.1	8.2	20.8	115	145	1613
3	-8.5	-0.1	8.6	22	113	146.5	1738
4	-9.2	-1.7	6.5	17.3	103	138	1630
5	-8	0.2	7.5	21.6	110	129	1492
6	-7.8	0.5	8.6	21	113	130	1415
7	-2.9	2.8	11.5	19.8	188.5	141.5	1849
8	-8.4	-1	8.3	21.1	100	120	1473
9	-6.8	2.3	8.8	21.4	100	85	978.5
10	-6.8	0.8	9.5	22.8	75	38	784.5
11	-6.3	1.9	8.1	19.2	77	80.5	976
12	-4	5.5	10.5	24.2	69	79	1239
13	-7.2	1.2	9.6	22.9	65	72.5	1125
14	-10.1	0.2	5.3	19.7	65	70	1025
15	-8.9	2.2	7.6	22.7	65	41	771.5
16	-1.6	7.3	12.6	27.6	51	47.5	920
17	-4	5	10	24.5	66	57.5	1010
18	-6.6	2.8	8.9	24.7	98.5	52	1116
19	-7	1.8	8.6	21.9	112	68	1248
20	-6.3	3.5	10.5	24.3	57.5	55	767.5
21	-8.6	2.6	7.6	22.4	49.5	48.5	766.5
22	-3.4	7.3	12.5	27.4	56.5	29.5	926.5
23	-6.6	4	9.8	26	77.5	47	955

Les pré-Alpes et leur climat



23 lieux (pré-Alpes) et 7 variables physico-chimiques

- 23 vecteurs (les lieux) de 7 coordonnées (les caractéristiques physico-chimiques) : $\mathbb{R}^{7}$

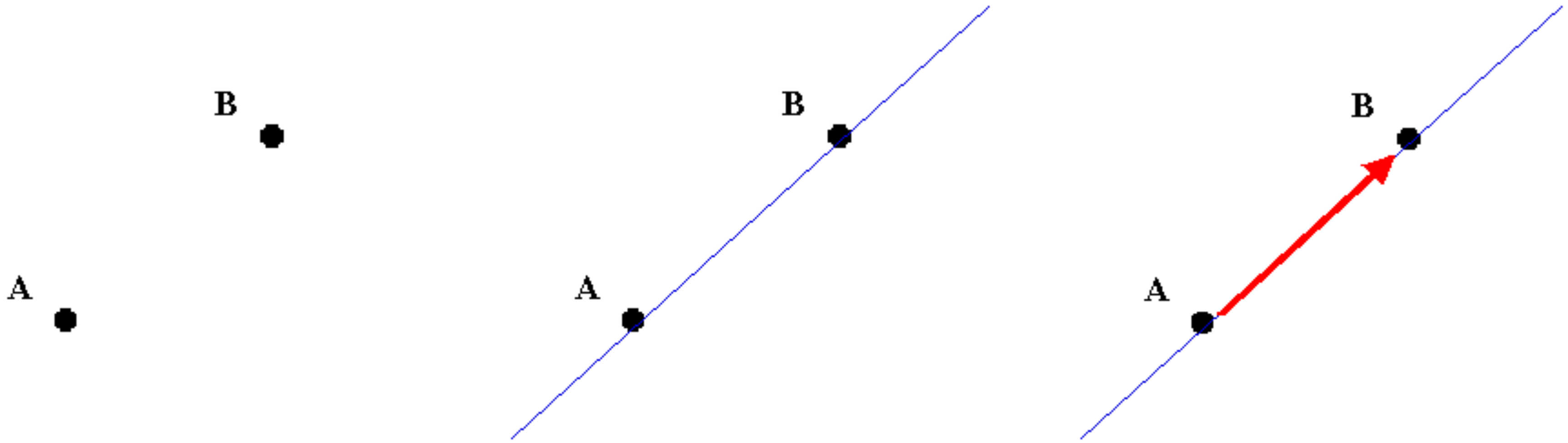
- 7 vecteurs (les caractéristiques physico-chimiques) de 23 coordonnées (les lieux) : $\mathbb{R}^{23}$

Algèbre linéaire pour la biologie

Chapitre 1

Les espaces vectoriels

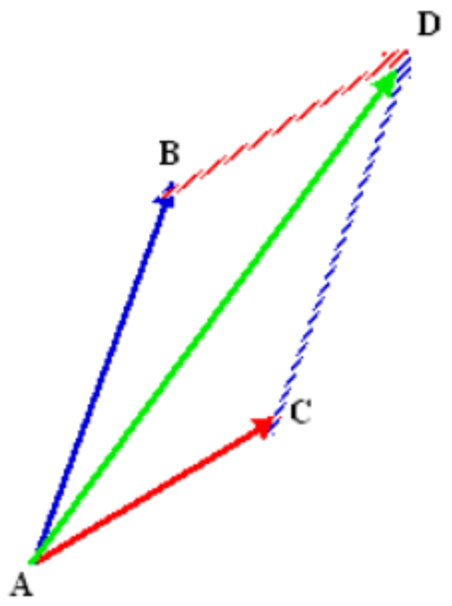
La notion de vecteur : $\overrightarrow{AB}$



Deux points *une direction* *un sens*

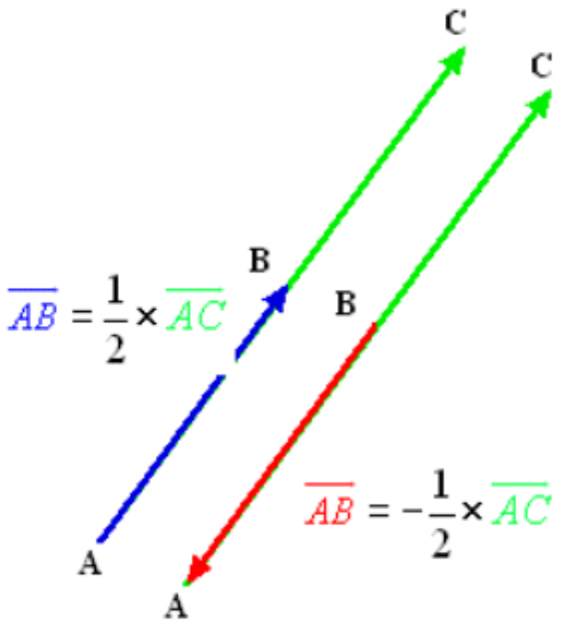
Deux opérations

Loi de Composition Interne (+)



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

Loi de Composition Externe (x)



On appelle **espace vectoriel** un ensemble E d'éléments, appelés vecteurs, sur lesquels on peut définir deux lois de composition.

(a) **Une loi de composition interne** : l'addition notée + qui vérifie :

a1. $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E \ : \ (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ (associativité)

a2. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \ : \ \vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ (commutativité)

a3. $\exists \vec{0} \in E$ tel que $\forall \vec{x} \in E$, $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$: $\vec{0}$ est **élément neutre** de E.

a4. $\forall \vec{x} \in E$, $\exists \vec{x}' \in E$ tel que $\vec{x}+\vec{x}'=\vec{0}$: $\vec{x}'$ est **l'élément opposé** de $\vec{x}$.

(b) **Une loi de composition externe** : la multiplication par un scalaire, notée ×, qui vérifie :

b1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{x} \in E \ : \ \lambda \times (\mu \times \vec{x})=(\lambda \times \mu) \times \vec{x}$

b2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{x} \in E \ : \ (\lambda+\mu) \times \vec{x}=\lambda \times \vec{x}+\mu \times \vec{x}$

b3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \ : \ \lambda \times (\vec{x}+\vec{y})=\lambda \times \vec{x}+\lambda \times \vec{y}$

b4. $\forall \vec{x} \in E \ : \ 1 \times \vec{x}=\vec{x}$

Exemples d’espaces vectoriels

1. L’ensemble des vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$

2. De manière générale, $\mathbb{R}^n$pour tout n entier est un espace vectoriel

3. L’ensemble noté $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions réelles d’une variables réelle, continues et n fois dérivables est un espace vectoriel.

4. L’ensemble $\mathbb{P}_n[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n complété par le polynôme nul est un espace vectoriel.

Sous-espace vectoriel

- Tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel

- Si E est un espace vectoriel , alors $\{\vec{0}\}$ et E lui-même sont des sous-espaces vectoriels de E

- L'ensemble $F = \{(x, y, z)/z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Famille génératrice

- La famille des vecteurs $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ et $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$

- L'ensemble $\mathbb{P}_n[x]$ est engendré par l'ensemble des polynômes simples $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

Famille libre

Soit $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que cette famille est **libre** si et seulement si : $\lambda_1\vec{u}_1 + \ldots + \lambda_p\vec{u}_p = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_1 = 0$. On dit alors que les vecteurs $\vec{u}_i$, $i = 1, p$, sont **linéairement indépendants**.

- La famille des vecteurs $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ et $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
- L'ensemble des polynômes simples $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ est une famille libre de $\mathbb{P}_n[x]$.

Dimension

- Une famille de vecteurs $\left\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\right\}$ d'un espace vectoriel *E* est une **base** de *E* si elle est à la fois **libre et génératrice**.
- On dit alors que E est de dimension *p* : dim(*E*) = *p*.
- Dans un espace vectoriel de dimension finie, il existe toujours **des** bases.

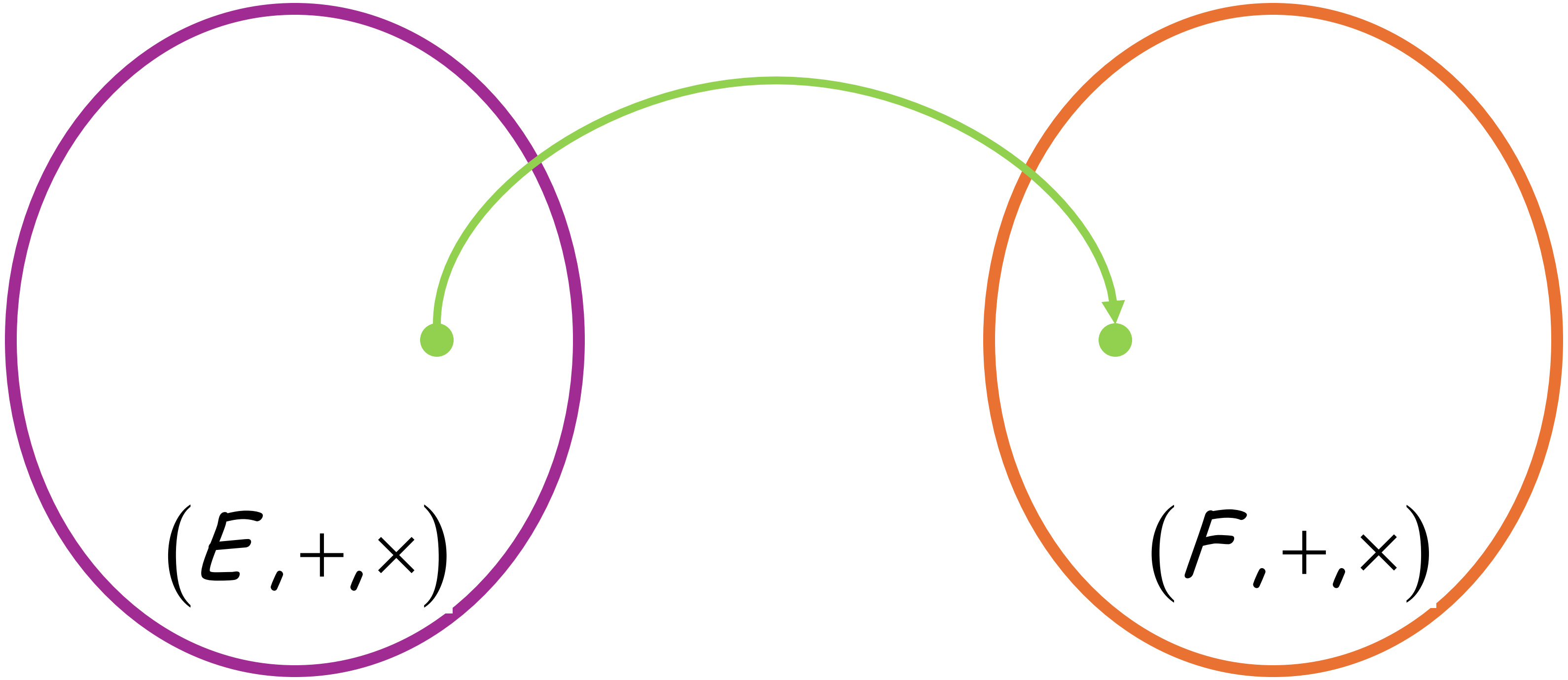
La famille des vecteurs $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ et $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ est une **base** de $\mathbb{R}^3$ que l'on appelle la base canonique.

Algèbre linéaire pour la biologie

Chapitre 2

Les applications linéaires

Une transformation d'un vecteur en un autre



➔ E et F sont des espaces vectoriels

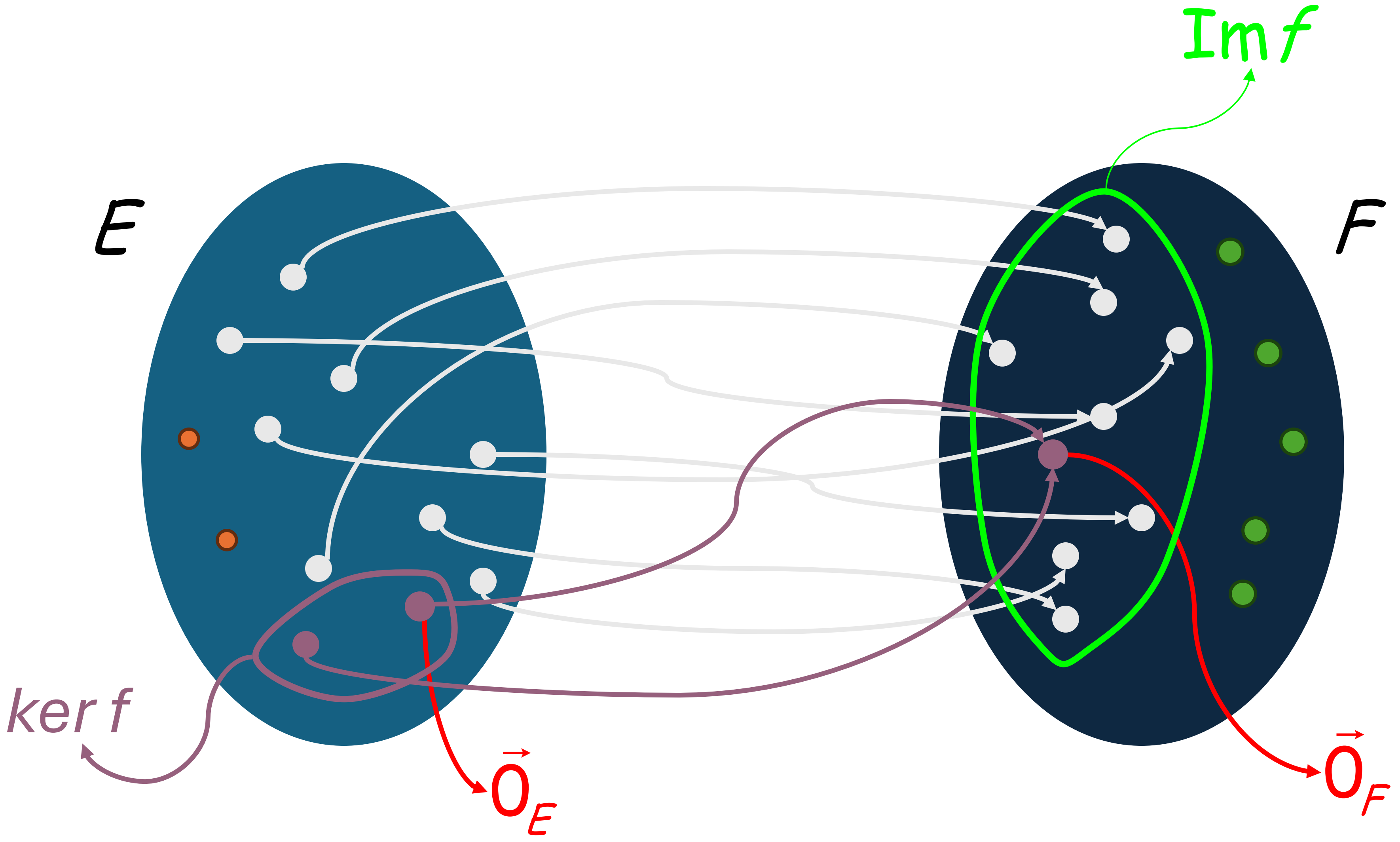
Applications linéaires

- On conserve les deux opérations : + et x
- $f(\vec{0}) = \vec{0}$
- Exemples :

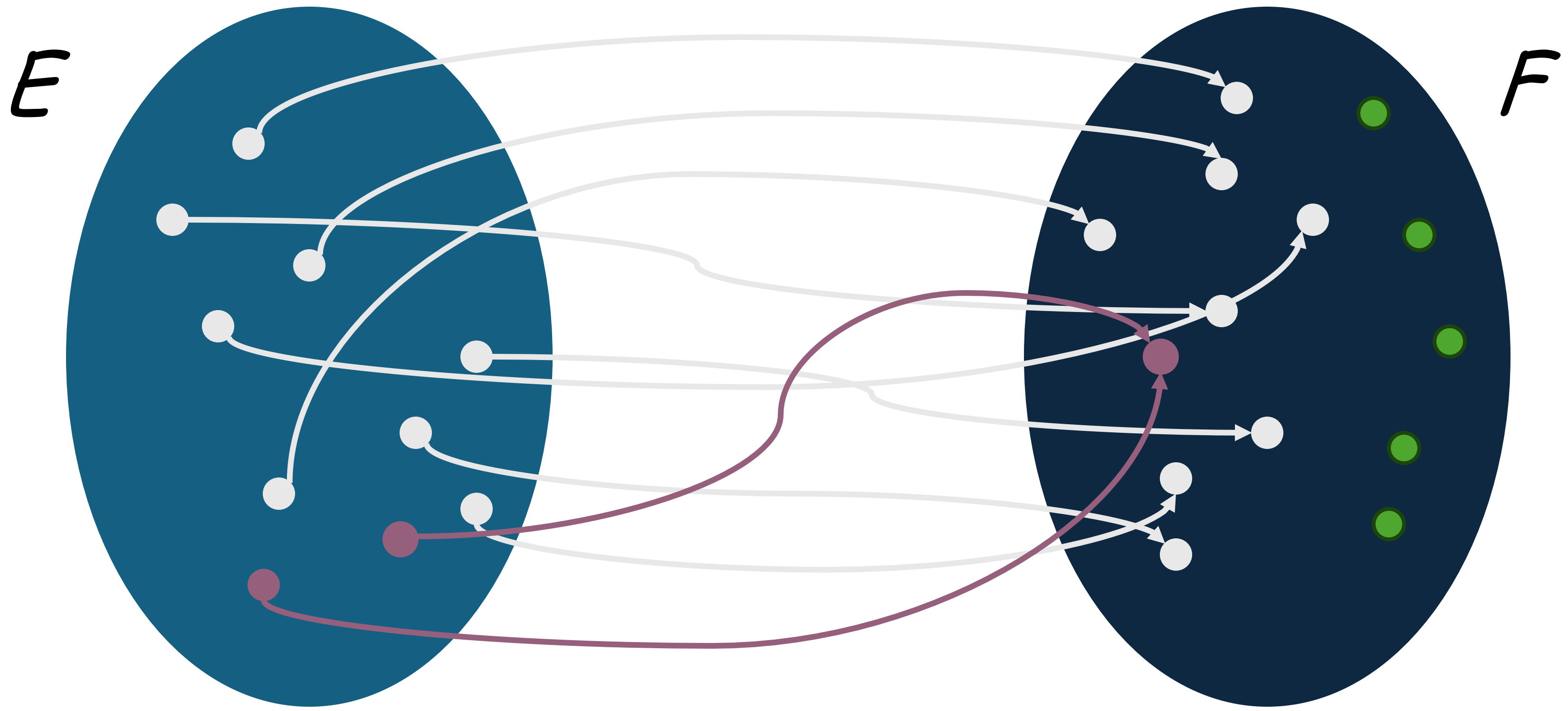
$$\begin{aligned} Id_E : E &\to E \\ \vec{x} &\mapsto Id_E(\vec{x}) = \vec{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \vec{X} &\to \lambda \vec{X}, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

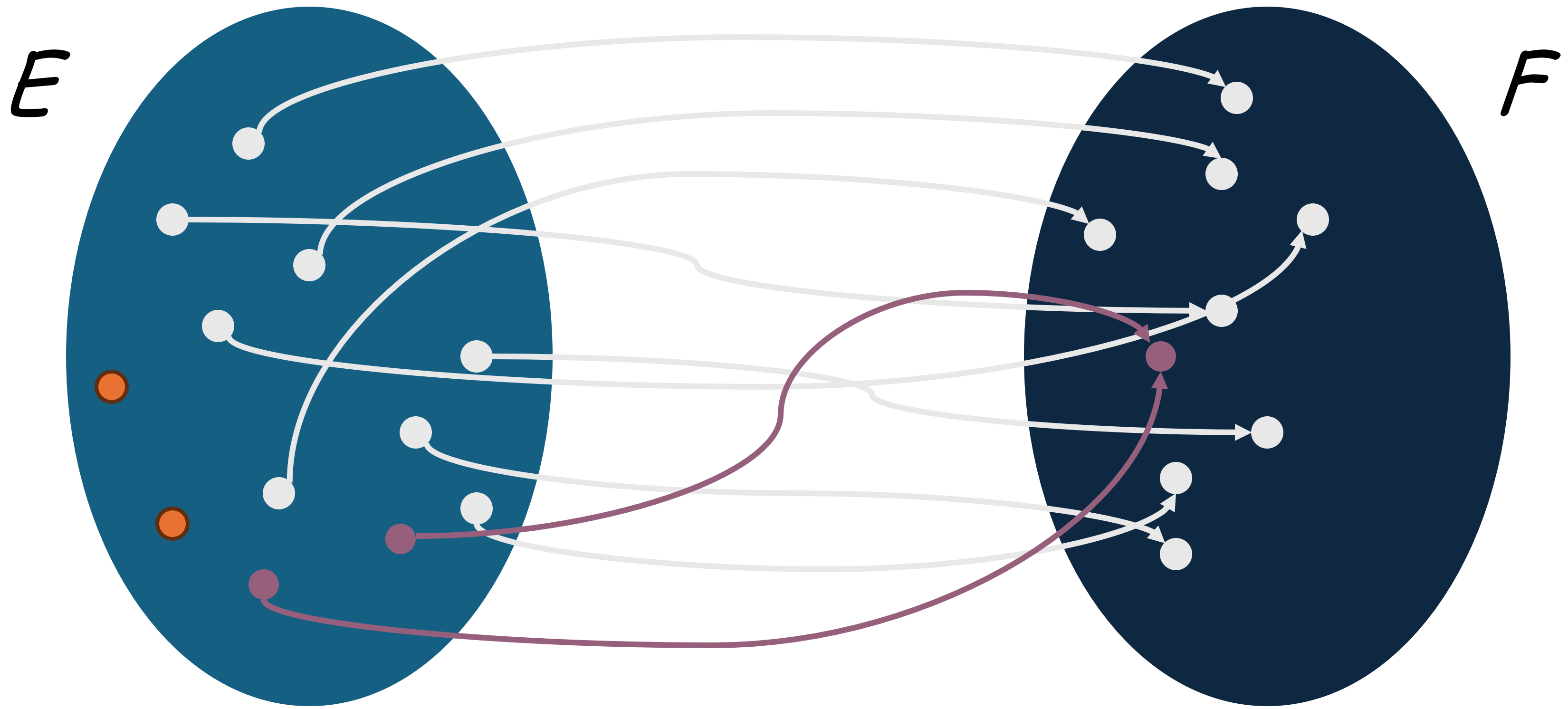
Image et Noyau



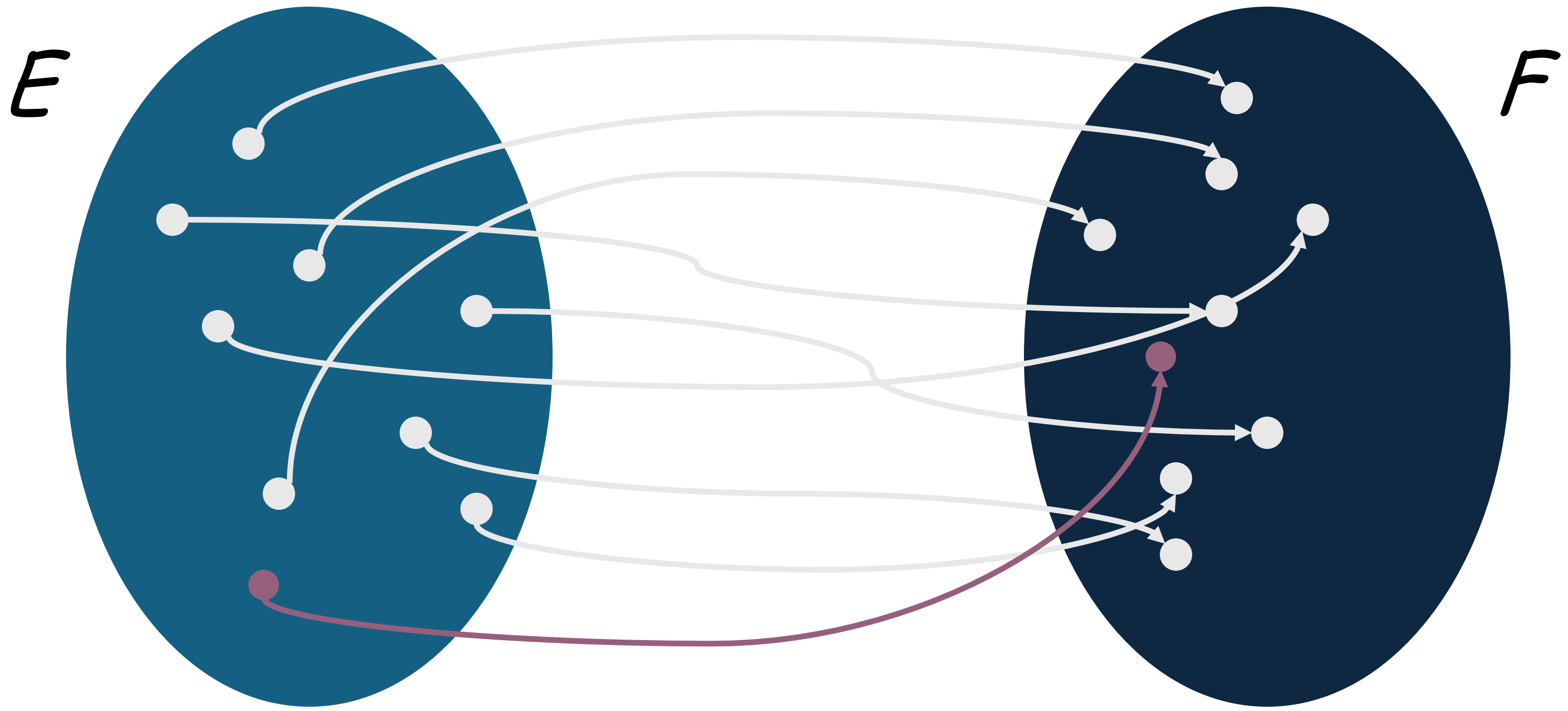
Injectivité



Surjectivité



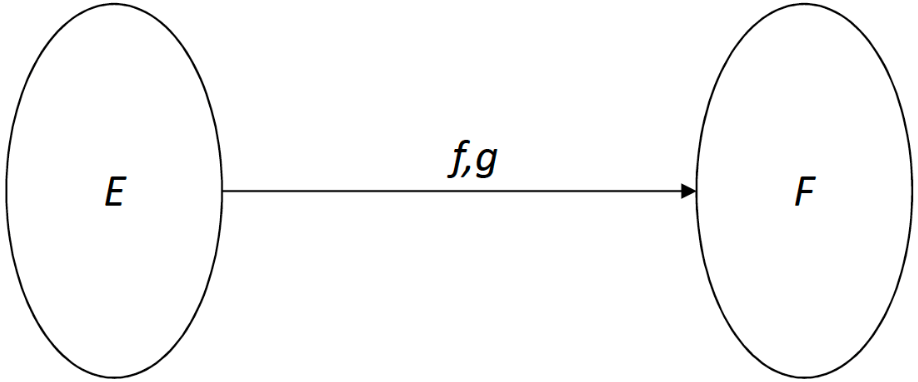
Bijectivité



Cas particuliers d’applications linéaires

- Endomorphisme : application linéaire de E dans E
- Isomorphisme: application linéaire bijective
- Automorphisme : endomorphisme bijectif

Opérations sur les applications linéaires



- Addition $f+g$
- Multiplication par un scalaire λf
- Composition $f \circ g$
- Réciproque (si bijective) f^{-1}

Projecteur et involution

- Un endomorphisme ***f*** de *E* est dit **idempotent** lorsque

$$f \circ f = f$$

➔ On dit alors que c'est un **projecteur** de *E*

- Un endomorphisme **s** de *E* est une involution linéaire lorsque

$$s \circ s = Id_E$$