Synthèse 1 : Espaces vectoriels

Sandrine CHARLES : scharles@biomserv.univ-lyon1.fr

1 Espaces vectoriels

Définition

On appelle **espace vectoriel** un ensemble E d'éléments, appelés vecteurs, sur lesquels on peut définir deux lois de composition.

(a) **Une loi de composition interne** : l'addition notée + qui vérifie :

a1. $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E\ :\ (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} = \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ (associativité)

a2. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E\ :\ \vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$ (commutativité)

a3. $\exists \vec{0} \in E$ tel que $\forall \vec{x} \in E$, $\vec{x}+\vec{0} = \vec{x}$: $\vec{0}$ est **élément neutre** de E.

a4. $\forall \vec{x} \in E$, $\exists \vec{x}' \in E$ tel que $\vec{x}+\vec{x}' = \vec{0}$: $\vec{x}'$ est **l'élément opposé** de $\vec{x}$.

(b) **Une loi de composition externe** : la multiplication par un scalaire, notée $\times$, qui vérifie :

b1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{x} \in E\ :\ \lambda \times (\mu \times \vec{x}) = (\lambda \times \mu) \times \vec{x}$

b2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{x} \in E\ :\ (\lambda + \mu) \times \vec{x} = \lambda \times \vec{x} + \mu \times \vec{x}$

b3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E\ :\ \lambda \times (\vec{x}+\vec{y}) = \lambda \times \vec{x} + \lambda \times \vec{y}$

b4. $\forall \vec{x} \in E\ :\ 1 \times \vec{x} = \vec{x}$

<u>*Proposition*</u>

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $\vec{x} \in E$, on a :

(i) $\lambda \vec{0} = \vec{0}$ et $0\vec{x} = \vec{0}$

(ii) $\lambda \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \{\lambda = 0 \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}\}$

(iii) $(-\lambda)\vec{x} = \lambda(-\vec{x}) = -(\lambda \vec{x})$: on peut donc écrire $-\lambda \vec{x}$.

2 Sous-espaces vectoriels

Définition

Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E ($F \subset E$). F est un **sous-espace vectoriel** de E si F est lui-même un espace vectoriel pour les lois d'addition et de multiplication par un scalaire définies sur E.

Théorème

Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E ($F \subset E$). On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si et seulement si :

(i) F est non vide : $F \neq \varnothing$

(ii) $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F \times F$, alors $\vec{x} + \vec{y} \in F$: F est *stable* pour l'addition

(iii) $\forall \vec{x} \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \vec{x} \in F$: F est *stable* pour la multiplication par un scalaire

Corollaire

Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E ($F \subset E$). Si F vérifie les propriétés (i) et (ii) suivantes, alors F est un sous-espace vectoriel de E :

(i) F est non vide

(ii) $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F \times F$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in F$

3 Combinaisons linéaires, générateurs

Définitions

Soit $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de E de la forme $a_1 \vec{u}_1 + \ldots + a_p \vec{u}_p = \sum_{i=1}^{p} a_i \vec{u}_i$ où les $a_i \in \mathbb{R}$ est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}_i$, $i = 1, p$.

L'ensemble de toutes ces combinaisons linéaires que l'on désigne par $vect(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par les vecteurs $\vec{u}_i$, $i = 1, p$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel. On dit que les $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p$ **engendrent** E ou que les vecteurs $\vec{u}_i$ $i = 1, p$ forment une **famille génératrice** de E si :

$$E = vect(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$$

4 Dépendance et indépendance linéaire

4.1 Famille libre et famille liée

Définition 1 :

Soit $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel *E*. On dit que cette famille est **libre** si et seulement si : $\lambda_1\vec{u}_1+\ldots+\lambda_p\vec{u}_p=\vec{0}\Rightarrow\lambda_1=\ldots=\lambda_p=0$. On dit alors que les vecteurs $\vec{u}_i$, $i=1,p$, sont **linéairement indépendants**.

Définition 2 :

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée** ; les vecteurs $\vec{u}_i$, $i=1,p$, sont alors **linéairement dépendants** ou liés.

4.2 Combinaisons linéaires et dépendance linéaire

Proposition

Une famille $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

5 Somme et somme directe

Voir site web.

6 Base et dimension d'un espace vectoriel

6.1 Définitions

Définition 1

Une famille de vecteurs $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ d'un espace vectoriel *E* est une **base** de *E* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(1) Les vecteurs $\vec{u}_i$, $i=1,p$, sont linéairement indépendants : La famille $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ est libre.

(2) Les vecteurs $\vec{u}_i$, $i=1,p$, engendrent *E* : La famille $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ est génératrice.

Définition 2

Une famille de vecteurs $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ est une **base** de l'espace vectoriel E si tout $\vec{x}\in E$ peut s'écrire de manière **unique** comme une combinaison linéaire des $\vec{u}_i$.

<u>Théorème 1</u>

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toute base de E a le même nombre d'éléments.

<u>Théorème 2</u>

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, il existe toujours des bases.

<u>Proposition</u>

Soit $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ une base de E. Alors :

$$\exists!\left(a_1,\ldots,a_p\right)\in\mathbb{R}^p \text{ tel que } \vec{x}=\sum_{i=1}^{p}a_i\vec{u}_i$$

Les réels $\left(a_1,\ldots,a_p\right)$ sont appelées les **coordonnées** (on dit aussi **composantes**) de $\vec{x}$ ***relativement à la base*** $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$.

Définition

$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Cette base est dite **<u>canonique</u>**.

En généralisant à $\mathbb{R}^p$, l'ensemble des vecteurs $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_p\}$ tels que $\vec{e}_i$ a toutes ses composantes nulles sauf en $i^{\text{ème}}$ position où elle est égale à 1 forme la **base canonique** de $\mathbb{R}^p$.

<u>Corollaire</u> *(des théorèmes 1 et 2)*

Dans un espace vectoriel de dimension p :

- Toute famille de plus de p éléments est liée.
- Toute famille de moins de p éléments ne peut être génératrice.
- Toute famille libre de p éléments forme une base.
- Toute famille génératrice de p éléments forme une base.

Définition

Dans le cas général, on a $\dim \mathbb{R}^p = p$.

6.2 Dimension et sous-espace

<u>Théorème</u>

Soit *F* un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel *E* de dimension *n*. Alors $\dim(F) \leq n$.

En particulier si $\dim(F) = n$, alors nécessairement $F = E$.