Chapitre 1 : Espaces vectoriels

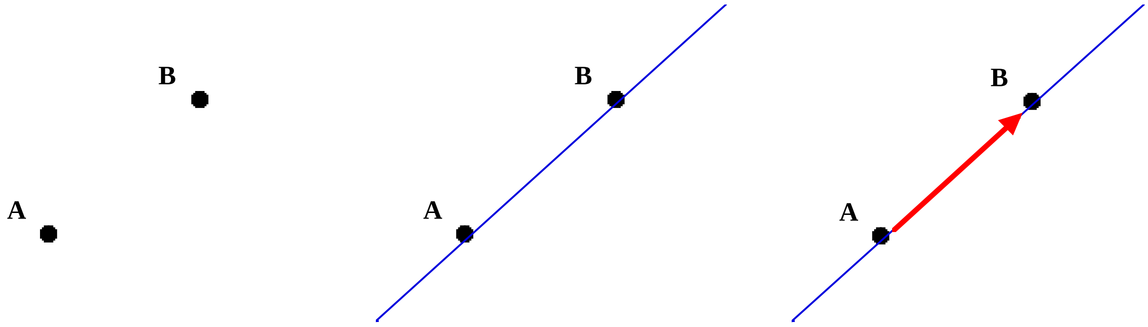
Sandrine CHARLES : scharles@biomserv.univ-lyon1.fr

Introduction

L'algèbre linéaire est un champ mathématique utilisé dans pratiquement toutes les branches scientifiques. En effet, beaucoup de problèmes vérifient la propriété suivante : si u et v sont deux solutions alors $u+v$ est aussi une solution, ainsi que $k \times u$ si k est un nombre réel ou complexe. De tels problèmes sont dits linéaires et sont plus faciles à résoudre que certains problèmes généraux.

Un premier exemple

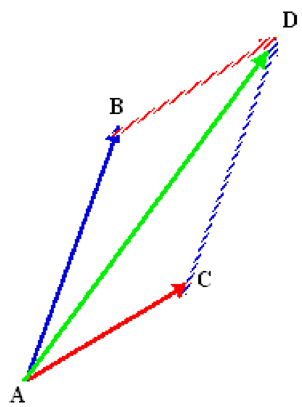
Si on considère deux points dans un ***plan***, la droite qui les relie définit une direction, et une flèche sur cette droite définit un sens.



Deux points ***une direction*** ***un sens***

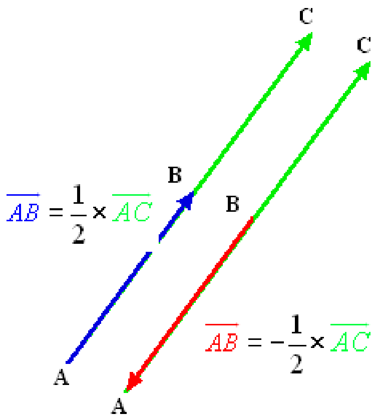
Deux points avec une direction et un sens forment un **vecteur** du plan noté $\overrightarrow{AB}$.
Sur des vecteurs de même origine, on peut définir deux opérations (cohérentes avec ce que vous avez vu des forces en physique) :

- L'addition : Règle du parallélogramme



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

- Le produit d'un vecteur par un nombre. On obtient un vecteur de même direction et de « longueur » multipliée par $|\lambda|$. Le signe de λ peut alors modifier le « sens » du vecteur résultat :



Un deuxième exemple

L'expression $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, dont les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ appartenant à $\mathbb{R}$, est un polynôme de degré *n*. On peut comme précédemment définir deux opérations sur les polynômes :

- L'addition :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$
$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$$
$$\Rightarrow (P+Q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n$$

Le polynôme $P+Q$ est également un polynôme de degré *n*.

- Le produit d'un polynôme par un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$. On obtient un polynôme dont tous les coefficients sont multipliés par λ :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$
$$\Rightarrow (\lambda \times P)(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + \ldots + (\lambda a_n)x^n$$

Le polynôme $\lambda \times P$ est également un polynôme de degré *n*.

Il est petit à petit apparu que de tels ensembles (l'ensemble des vecteurs, l'ensemble des polynômes de degré *n*, et bien d'autres encore), pourtant très différents les uns des autres, se ressemblent en fait au travers de l'existence de deux opérations : l'addition (+) et le produit par un nombre réel (×). Pour permettre de ne pas répéter à chaque fois les caractéristiques et propriétés de ces ensembles, les mathématiciens ont défini un « modèle » qui ne vérifie qu'un nombre minimum de propriétés (des *axiomes*), mais juste assez pour éviter des cas pathologiques. Ce modèle, encore appelé ***Espace Vectoriel***, a donc des propriétés partagées par de nombreux ensembles, comme celui des vecteurs, celui des polynômes de degré *n*, et bien d'autres encore que nous rencontrerons dans ce cours.

Historiquement, c'est à Peano que revient le mérite d'avoir défini de façon axiomatique le concept d'espace vectoriel sur un corps de *scalaires*. Le terme scalaires (du latin *scalaris* = *escalier*, *échelle*) est utilisé au sens de *numérique*.

1 Espaces vectoriels

Définition

On appelle **espace vectoriel** un ensemble *E* d'éléments, appelés vecteurs, sur lesquels on peut définir deux lois de composition.

(a) **Une loi de composition interne** : l'addition notée + qui vérifie :

a1. $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E \ : \ (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} = \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ (associativité)

a2. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \ : \ \vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$ (commutativité)

a3. $\exists \vec{0} \in E$ tel que $\forall \vec{x} \in E$, $\vec{x}+\vec{0} = \vec{x}$: $\vec{0}$ est **élément neutre** de *E*.

a4. $\forall \vec{x} \in E$, $\exists \vec{x}' \in E$ tel que $\vec{x}+\vec{x}' = \vec{0}$: $\vec{x}'$ est **l'élément opposé** de $\vec{x}$.

(b) **Une loi de composition externe** : la multiplication par un scalaire, notée ×, qui vérifie :

b1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{x} \in E \ : \ \lambda \times (\mu \times \vec{x}) = (\lambda \times \mu) \times \vec{x}$

b2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{x} \in E \ : \ (\lambda + \mu) \times \vec{x} = \lambda \times \vec{x} + \mu \times \vec{x}$

b3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \ : \ \lambda \times (\vec{x}+\vec{y}) = \lambda \times \vec{x} + \lambda \times \vec{y}$

b4. $\forall \vec{x} \in E \ : \ 1 \times \vec{x} = \vec{x}$

Remarques

1. Le dernier axiome (*b4*) peut paraître inutile. Cependant, si on considère l'ensemble *E* des couples (x, y) tels que $x, y \in \mathbb{R}$ muni de la loi de composition externe $\lambda \times (x, y) = (\lambda \times x, 0)$, on en comprend immédiatement l'utilité.

2. Par soucis de clarté, le symbole $\times$ de la loi de composition externe sera désormais omis. Ainsi, l'élément $\lambda \times \vec{x}$ sera désormais désigné par $\lambda \vec{x}$.

Exemples

1. L'ensemble des vecteurs du plan est un espace vectoriel.
2. $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des espaces vectoriels. Voir.
3. L'ensemble noté $C^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et dérivables d'ordre n est un espace vectoriel. Justifier(1).
4. L'ensemble $\mathbf{P}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n additionné du polynôme nul est un espace vectoriel. Justifier(2).

Proposition

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $\vec{x} \in E$, on a :

(i) $\lambda \vec{0} = \vec{0}$ et $0\vec{x} = \vec{0}$

(ii) $\lambda \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \{\lambda = 0 \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}\}$

(iii) $(-\lambda)\vec{x} = \lambda(-\vec{x}) = -(\lambda \vec{x})$: on peut donc écrire $-\lambda \vec{x}$.

Le point sur…

Nous avons parlé en introduction des vecteurs du plan. Nous venons de voir que $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)/x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel. Nous allons maintenant établir le lien que l'on peut faire entre les vecteurs du plan et les éléments de $\mathbb{R}^2$.

Si on munit le plan d'un *repère* (on parle alors de **plan affine**), alors chaque point du plan est repéré par des **coordonnées**. Si on appelle *O l'origine* du repère, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique point M de coordonnées $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

Ainsi, la notation $\vec{u} = (x,y)$ qui sera largement utilisée dans la suite de ce cours, signifie que x et y sont les coordonnées de l'extrémité du vecteur $\vec{u}$ dans le plan affine. On appelle x **l'abscisse** et y **l'ordonnée**.

En conséquence, si (a,b) et (c,d) sont les coordonnées des extrémités des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors les coordonnées de l'extrémité du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ seront $(a+c,b+d)$. De même, les coordonnées de l'extrémité du vecteur $k\vec{u}$, $k\in\mathbb{R}$, seront (ka,kb).

2 Sous-espaces vectoriels

Dans toute la suite l'ensemble *E* désignera un espace vectoriel.

Définition

Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E ($F\subset E$). F est un **sous-espace vectoriel** de E si F est lui-même un espace vectoriel pour les lois d'addition et de multiplication par un scalaire définies sur E.

Remarque

Cette définition sous-entend que tout sous-espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel. Il en découle les critères d'identification des sous-espaces vectoriels suivants.

Théorème

Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E ($F\subset E$). On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si et seulement si :

(i) F est non vide : $F\neq\varnothing$

(ii) $\forall(\vec{x},\vec{y})\in F\times F$, alors $\vec{x}+\vec{y}\in F$: F est *stable* pour l'addition

(iii) $\forall\vec{x}\in F$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, alors $\lambda\vec{x}\in F$: F est *stable* pour la multiplication par un scalaire

Exemple

Soit E un espace vectoriel. L'ensemble constitué du seul élément neutre de la loi de composition interne de E ainsi que E lui-même sont des sous-espaces vectoriels de E.

Corollaire

Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E ($F \subset E$). Si F vérifie les propriétés (i) et (ii) suivantes, alors F est un sous-espace vectoriel de E :

(i) F est non vide

(ii) $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in F \times F$, $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F$

Exemples

1. Montrer que l'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   Réponse.

Soit f une fonction de classe $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, vérifiant l'équation différentielle suivante : $f''(x) + x^2 f'(x) + f(x) = 0$. Montrer que l'ensemble F des fonctions solutions de cette équation différentielle est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de classe $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Réponse.

3 Combinaisons linéaires, générateurs

On rappelle que *E* désigne un espace vectoriel.

Définitions

(1) Soit $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de E de la forme $a_1\vec{u}_1 + \ldots + a_p\vec{u}_p = \sum_{i=1}^{p} a_i\vec{u}_i$ où les $a_i \in \mathbb{R}$ est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}_i$, $i = 1, p$.

(2) L'ensemble de toutes ces combinaisons linéaires que l'on désigne par $vect(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p)$ est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par les vecteurs $\vec{u}_i$, $i = 1, p$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel. On dit que les $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p$ **engendrent** E ou que les vecteurs $\vec{u}_i$ $i = 1, p$ forment une **famille génératrice** de E si :

$$E = vect(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p)$$

➔ En d'autres termes, $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p$ engendrent E si, pour tout $\vec{x}\in E$, il existe des scalaires $a_1,\ldots,a_p$ tels que $\vec{x}=a_1\vec{u}_1+\ldots+a_p\vec{u}_p$, c'est-à-dire si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des $\vec{u}_i$, $i=1,p$.

Exemples

1. Montrer que la famille des vecteurs $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$ et $\vec{e}_3=(0,0,1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Réponse.
2. Montrer que $\{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,3)\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Réponse.
3. On peut montrer que l'ensemble $\mathbf{P}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est engendré par les polynômes $1, X, X^2,\ldots,X^n$. Ainsi :

$$\mathbf{P}_n[X]=vect(1,X,X^2,\ldots,X^n)$$

4 Dépendance et indépendance linéaire

On rappelle que E désigne un espace vectoriel.

4.1 Famille libre et famille liée

Définition 1 :

Soit $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel *E*. On dit que cette famille est **libre** si et seulement si : $\lambda_1\vec{u}_1+\ldots+\lambda_p\vec{u}_p=\vec{0}\Rightarrow\lambda_1=\ldots=\lambda_1=0$. On dit alors que les vecteurs $\vec{u}_i$, $i=1,p$, sont **linéairement indépendants**.

Définition 2 :

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée** ; les vecteurs $\vec{u}_i$, $i=1,p$, sont alors **linéairement dépendants** ou **liés**.

Remarques

- Si $\vec{0}$ est l'un des vecteurs $\vec{u}_i$, par exemple $\vec{u}_1=\vec{0}$, alors la famille des vecteurs $\vec{u}_i$, $i=1,p$, est nécessairement liée, et les vecteurs $\vec{u}_i$ sont linéairement dépendants. Justifier.

- Si deux des vecteurs $\vec{u}_i$ sont égaux ou multiples l'un de l'autre, par exemple $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ avec $k \neq 0$, alors les vecteurs $\vec{u}_i$, $i = 1, p$, sont linéairement dépendants. Justifier.
- Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si ils sont multiples l'un de l'autre. On dit qu'ils sont colinéaires.

Exemples

1. La famille $\{(2,-4),(-1,2),(0,1)\}$ est-elle libre ? Réponse.
2. Montrer que la famille $\{(3,-8,-1),(0,2,1),(-1,4,1)\}$ est liée. Réponse.

4.2 Combinaisons linéaires et dépendance linéaire

Proposition

Une famille $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Conséquence

Si la famille $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ est liée, alors les vecteurs $\vec{u}_i$, $i = 1, p$, sont linéairement dépendants, c'est-à-dire qu'il existe des λ_i, non tous nuls tels que $\lambda_1\vec{u}_1 + \ldots + \lambda_p\vec{u}_p = \vec{0}$. Ainsi, en supposant que $\lambda_1 \neq 0$, on peut écrire :

$$\vec{u}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{u}_2 - \ldots - \frac{\lambda_p}{\lambda_1}\vec{u}_p$$

$\vec{u}_1$ est bien une combinaison linéaire des autres vecteurs $\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_p$.

5 Somme et somme directe

5.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition

Soient *F* et *G* deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel *E*.

La somme de *F* et *G*, qui s'écrit $F+G$, est l'ensemble constitué de toutes les sommes $\vec{u}+\vec{v}$ avec $\vec{u}\in F$ et $\vec{v}\in G$. Ainsi $F+G=\left\{\vec{u}+\vec{v} / \vec{u}\in F \text{ et } \vec{v}\in G\right\}$.

Si on considère *F* et *G* comme deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel *E*, alors :

- $\vec{0}=\vec{0}+\vec{0}\in F+G$ car $\vec{0}\in F$ et $\vec{0}\in G$;
- Si $\vec{u}_1+\vec{v}_1$ et $\vec{u}_2+\vec{v}_2$ appartiennent à $F+G$, avec $\vec{u}_1,\vec{u}_2\in F$ et $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in G$, alors :

$$\left(\vec{u}_1+\vec{v}_1\right)+\left(\vec{u}_2+\vec{v}_2\right)=\left(\vec{u}_1+\vec{u}_2\right)+\left(\vec{v}_1+\vec{v}_2\right)\in F+G$$

- Enfin, pour tout scalaire $k\in\mathbb{R}$, il vient :

$$k\left(\vec{u}_1+\vec{v}_1\right)=k\vec{u}_1+k\vec{v}_1\in F+G$$

Tout ceci permet d'en arriver au théorème suivant :

Théorème 1

La somme de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel *E* est aussi un sous-espace vectoriel de *E*.

Théorème 2

Soient *F* et *G* deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de *E*. Alors $F+G$ est de dimension finie et :

$$\dim\left(F+G\right)=\dim\left(F\right)+\dim\left(G\right)-\dim\left(F\cap G\right)$$

Exemple

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Soient $F=\left\{\left(x,y,z\right)/z=0\right\}$ et $G=\left\{\left(x,y,z\right)/x=0\right\}$.

Donner la dimension de $F\cap G$. Réponse.

5.2 Somme directe

Définition

L'espace vectoriel E est dit la **somme directe** des sous-espaces vectoriels F et G, et on note $E = F \oplus G$, si chaque vecteur $\vec{x} \in E$ s'écrit *d'une manière unique* sous la forme $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$.

Théorème

L'espace vectoriel E est la somme directe des deux sous-espaces vectoriels F et G si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

Exemples

1. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Considérons les deux sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z) / z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) / x = 0\}$. Montrer que F et G ne sont pas en somme directe. Réponse.
2. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Considérons les deux sous-espaces vectoriels $F' = \{(x, y, z) / z = 0\}$ et $G' = \{(x, y, z) / x = y = 0\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F' \oplus G'$. Réponse.

Propriété

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La somme de F et G est directe si et seulement si $\forall \vec{x} \in F + G$, il existe un *unique* couple $(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$.

5.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont dits **supplémentaires** dans E lorsque leur somme est directe et égale à E : $F \oplus G = E$.

Propriété

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, $F' = \{(x, y, z) / z = 0\}$ et $G' = \{(x, y, z) / x = y = 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

6 Base et dimension d'un espace vectoriel

On rappelle que E désigne un espace vectoriel.

6.1 Définitions

Définition 1

Une famille de vecteurs $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ d'un espace vectoriel E est une **base** de E si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(1) Les vecteurs $\vec{u}_i$, $i = 1, p$, sont linéairement indépendants : La famille $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ est *libre*.

(2) Les vecteurs $\vec{u}_i$, $i = 1, p$, engendrent E : La famille $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ est *génératrice*.

Définition 2

Une famille de vecteurs $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ est une **base** de l'espace vectoriel E si tout $\vec{x} \in E$ peut s'écrire de manière **unique** comme une combinaison linéaire des $\vec{u}_i$.

Conséquence

Un espace vectoriel E est dit de **dimension finie** n, et on écrit $\dim(E) = n$, si E admet une base de n vecteurs.

Théorème 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toute base de E a le même nombre d'éléments.

Remarques

★ L'espace vectoriel $\{0\}$ est défini par sa dimension 0.

★ Si un espace vectoriel n'est pas de dimension finie, on dit qu'il est de *dimension infinie*.

Théorème 2

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, il existe toujours des bases.

Proposition

Soit $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ une base de E. Alors :

$$\exists!\left(a_1, \ldots, a_p\right) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \vec{x} = \sum_{i=1}^{p} a_i \vec{u}_i$$

Les réels $\left(a_1, \ldots, a_p\right)$ sont appelées les **coordonnées** (on dit aussi **composantes**) de $\vec{x}$ ***relativement à la base*** $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$.

Remarque

L'existence de la décomposition pour tout $\vec{x} \in E$ vient du fait que la famille $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ est génératrice ; l'unicité du fait que la famille $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ est libre.

Exemples

1. Montrer que la famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ avec $\vec{u}_1 = (1,2)$ et $\vec{u}_2 = (-1,0)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Réponse.
2. Montrer que la famille $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ telle que $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ et $\vec{e}_3 = (0,0,1)$, est une base de $\mathbb{R}^3$. Réponse.

Définition

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Cette base est dite **canonique**.

En généralisant à $\mathbb{R}^p$, l'ensemble des vecteurs $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p\}$ tels que $\vec{e}_i$ a toutes ses composantes nulles sauf en $i^{\text{ème}}$ position où elle est égale à 1 forme la **base canonique** de $\mathbb{R}^p$.

Corollaire *(des théorèmes 1 et 2)*

Dans un espace vectoriel de dimension p :

- Toute famille de plus de p éléments est liée.
- Toute famille de moins de p éléments ne peut être génératrice.
- Toute famille libre de p éléments forme une base.
- Toute famille génératrice de p éléments forme une base.

Remarque

Les deux dernières propriétés énoncées dans le corollaire signifie que si $\dim(E) = p$, pour toute famille de p vecteurs, libre $\Leftrightarrow$ génératrice $\Leftrightarrow$ base (une des deux propriétés suffit).

Exemples

1. Déterminer la dimension de $\mathbb{R}^3$. Réponse.
2. Déterminer la dimension de $\mathbf{P}_n[X]$. Réponse.

Définition

Dans le cas général, on a $\dim \mathbb{R}^p = p$.

6.2 Dimension et sous-espace

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E de dimension n. Alors $\dim(F) \leq n$.

En particulier si $\dim(F) = n$, alors nécessairement $F = E$.

Exemple

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Alors la dimension de F ne peut être qu'égale à 0, 1, 2 ou 3 :

★ Si $\dim(F)=0$, alors F est réduit à l'origine ;

★ Si $\dim(F)=1$, alors F est une droite issue de l'origine ;

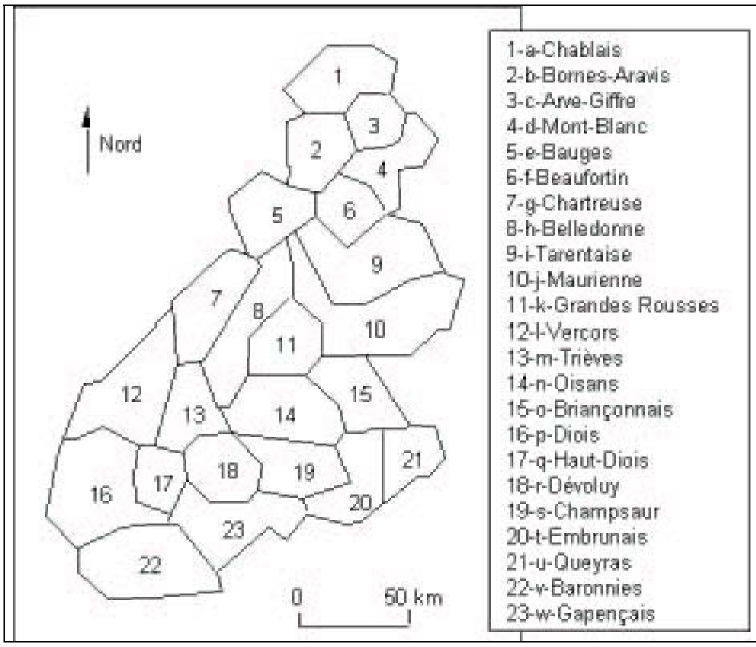
★ Si $\dim(F)=2$, alors F est un plan passant par l'origine ;

★ Si $\dim(F)=3$, alors F est égal à $\mathbb{R}^3$ tout entier.

7 Exemples d'utilisation en Biologie

7.1 Les oiseaux nicheurs rhônalpins

L'ouvrage de Lebreton, P. (1977)[1] sur les oiseaux nicheurs *rhônalpins* met à disposition sous la forme d'un tableau un relevé de mesures réalisées sur le terrain :



Lieu	A	B	C	D	E	F	G
1	-6.6	1.1	9.7	22.9	131.5	139.5	1597
2	-7.5	0.1	8.2	20.8	115	145	1613
3	-8.5	-0.1	8.6	22	113	146.5	1738
4	-9.2	-1.7	6.5	17.3	103	138	1630
5	-8	0.2	7.5	21.6	110	129	1492
6	-7.8	0.5	8.6	21	113	130	1415
7	-2.9	2.8	11.5	19.8	188.5	141.5	1849
8	-8.4	-1	8.3	21.1	100	120	1473
9	-6.8	2.3	8.8	21.4	100	85	978.5
10	-6.8	0.8	9.5	22.8	75	38	784.5
11	-6.3	1.9	8.1	19.2	77	80.5	976
12	-4	5.5	10.5	24.2	69	79	1239
13	-7.2	1.2	9.6	22.9	65	72.5	1125
14	-10.1	0.2	5.3	19.7	65	70	1025
15	-8.9	2.2	7.6	22.7	65	41	771.5
16	-1.6	7.3	12.6	27.6	51	47.5	920
17	-4	5	10	24.5	66	57.5	1010
18	-6.6	2.8	8.9	24.7	98.5	52	1116
19	-7	1.8	8.6	21.9	112	68	1248
20	-6.3	3.5	10.5	24.3	57.5	55	767.5
21	-8.6	2.6	7.6	22.4	49.5	48.5	766.5
22	-3.4	7.3	12.5	27.4	56.5	29.5	926.5
23	-6.6	4	9.8	26	77.5	47	955

Ces données concernent 23 lieux au cœur desquels ont été mesurées les sept variables suivantes :

- **A** : la température minimale observée en Janvier (°C)
- **B :** la température maximale observée en Janvier (°C)
- **C** : la température minimale observée en Juillet (°C)

[1] Lebreton, Ph. . (1977) *Les oiseaux nicheurs rhônalpins*. Atlas ornithologique Rhône-Alpes. Centre Ornithologique Rhône-Alpes, Université Lyon 1, 69621 Villeurbanne. Direction de la Protection de la Nature, Ministère de la Qualité de la Vie. 1-354. Voir aussi http://pbil.univ-lyon1.fr/R/enseignement.html.

- **D** : la température maximale observée en Juillet (°C)
- **E** : la pluviométrie moyenne en Janvier (mm)
- **F** : la pluviométrie moyenne en Juillet (mm)
- **G** : la pluviométrie moyenne en annuelle (mm)

Ce tableau permet d'étudier les données de deux points de vue différents : dans l'espace des individus ou dans l'espace des variables. Ainsi, dans ***l'espace des individus***, on dispose de 23 vecteurs ayant chacun sept coordonnées : on travaille dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^7$. Dans ***l'espace des variables***, on dispose de sept vecteurs avec chacun 23 coordonnées : on est dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{23}$.

7.2 Un contre-exemple : Le champ de blé

Une plante (le blé) peut se présenter sous trois formes A_1, A_2, A_3. On caractérise une *population* de cette plante (le champ de blé) par les fréquences de chacune de ces trois formes que l'on note f_1, f_2, f_3 : $f_i = \dfrac{\text{Nombre de plantes } A_i}{\text{Nombre total de plantes}}$.

Une population se représente alors comme un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de composantes (f_1, f_2, f_3).

- On peut aisément montrer que $f_1 + f_2 + f_3 = 1$.
- Si on appelle P le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ formé de toutes les populations possibles. P est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

1. $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}$: $P \subset \mathbb{R}^3$.
2. P est non vide : les vecteurs $\vec{e}_i$ de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont éléments de P.
3. Soient $\vec{x}, \vec{y} \in P$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\vec{x} = (x_1, y_1, z_1) \qquad \vec{y} = (x_2, y_2, z_2)$ avec $x_1 + y_1 + z_1 = 1$ et $x_2 + y_2 + z_2 = 1$

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$$

$$(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda(x_1 + y_1 + z_1) + \mu(x_2 + y_2 + z_2) = \lambda + \mu$$

Or $\lambda + \mu \neq 1$, sauf dans quelques cas particuliers : P n'est pas un sous-espace vectoriel.