Synthèse 2 : Applications linéaires

Sandrine CHARLES : scharles@biomserv.univ-lyon1.fr

1 Généralités

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application de E dans F. On dit que f est une **application linéaire** si et seulement si l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

Autrement dit : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f\left(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}\right) = \lambda f\left(\vec{x}\right) + \mu f\left(\vec{y}\right)$

Et plus généralement :

$$\forall \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in E,\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ f\left(\lambda_1 \vec{x}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{x}_n\right) = \lambda_1 f\left(\vec{x}_1\right) + \ldots + \lambda_n f\left(\vec{x}_n\right)$$

Théorème

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application de E dans F. f est une **application linéaire** si et seulement si :

(i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$, $f\left(\vec{x} + \vec{y}\right) = f\left(\vec{x}\right) + f\left(\vec{y}\right)$

(ii) $\forall \vec{x} \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f\left(\lambda \vec{x}\right) = \lambda f\left(\vec{x}\right)$

Définition

On appelle **application identité** $Id_E : E \to E$, l'application telle que $\forall \vec{u} \in E$, $Id_E\left(\vec{u}\right) = \vec{u}$;

C'est une application linéaire.

2 Image et noyau d'une application linéaire

Proposition 1

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. L'ensemble des images des éléments de E, $f\left(E\right)$, est un sous-espace vectoriel de F appelé **image de l'application linéaire** f et noté $\operatorname{Im} f$.

$$\vec{v} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists \vec{u} \in E / \vec{v} = f\left(\vec{u}\right)$$

Proposition 2

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $f\left(E\right) = \operatorname{Im} f$ est un espace-vectoriel.

Proposition 3

Soit $f : E \to F$. L'ensemble défini par $\ker f = \left\{ \vec{u} \in E \,/\, f\left(\vec{u}\right) = \vec{0} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé **noyau de l'application linéaire** *f*. (ker = *kernel* qui veut dire noyau en anglais).

3 Image d'une famille de vecteurs

3.1 Injectivité

Définition 1

Une application $f : E \to F$ est dite **injective** si des éléments distincts de E ont des images distinctes : $\vec{u} \neq \vec{u}' \Rightarrow f\left(\vec{u}\right) \neq f\left(\vec{u}'\right) \Leftrightarrow f\left(\vec{u}\right) = f\left(\vec{u}'\right) \Rightarrow \vec{u} = \vec{u}'$ (contraposition).

Proposition 1

Soit $f \in \mathcal{L}\left(E,F\right)$, *f* est injective si et seulement si $\ker f = \left\{\vec{0}\right\}$.

3.2 Surjectivité

Définition 2

Soit $f \in \mathcal{L}\left(E,F\right)$, *f* est **surjective** si tout vecteur $\vec{v}$ de F possède au moins un antécédent par *f* dans E : $\forall \vec{v} \in F, \exists \vec{u} \in E \,/\, f\left(\vec{u}\right) = \vec{v}$.

Proposition 2

f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = f\left(E\right) = F$.

3.3 Bijectivité

Proposition 3

Soit $f \in \mathcal{L}\left(E,F\right)$, f est dite **bijective** si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

Théorème de la dimension

Soient E et F deux espaces vectoriels et E de dimension finie et soit f une application linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$, on a alors : $\dim(E)=\dim(\operatorname{Im} f)+\dim(\ker f)\left[=\operatorname{rg} f+\dim(\ker f)\right]$.

Proposition 4

$f\in\mathcal{L}(E,F)$ bijective $\Rightarrow \dim(E)=\dim(F)$.

Définitions (voir Introduction)

★ Une application linéaire $f\in\mathcal{L}(E,E)$ est appelée **endomorphisme**.

★ Une application linéaire bijective de $\mathcal{L}(E,F)$ est appelée **isomorphisme**.

★ Une application linéaire bijective de $\mathcal{L}(E,E)$ est un **automorphisme** ou endomorphisme bijectif.

4 Opérations sur les applications linéaires

Proposition

$\mathcal{L}(E,F)$ muni des deux lois suivantes :

- $\forall f,g\in\mathcal{L}(E,F),\ f+g\in\mathcal{L}(E,F)$ (loi de composition interne)
- $\forall f\in\mathcal{L}(E,F),\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda f\in\mathcal{L}(E,F)$ (loi de composition externe)

est un *espace vectoriel*.

Définition

Soient E, F, G, trois espaces vectoriels, soient $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$. On définit la composition de deux applications linéaires f et g notée $g\circ f$ comme l'application $h\in\mathcal{L}(E,G)$ qui à $\vec{u}\in E$ associe $g(f(\vec{u}))$:

$$\begin{aligned} h : E &\xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \\ \vec{u} &\mapsto f(\vec{u})\mapsto g(f(\vec{u}))=h(\vec{u}) \end{aligned}$$

Théorème

$f\circ(g_1+g_2)=(f\circ g_1)+(f\circ g_2)$

$(f_1+f_2)\circ g=(f_1\circ g)+(f_2\circ g)$

$\lambda(f\circ g)=(\lambda f)\circ g=f\circ(\lambda g)$

5 Réciproque d'une application linéaire bijective

Définition

On appelle **application réciproque** de *f*, notée f^{-1}, l'application qui à $\vec{v}$ associe $\vec{u}$; c'est une application linéaire : $f^{-1}\in \mathcal{L}(F,E)$.

Propriété

$f\circ f^{-1}=Id_F$ et $f^{-1}\circ f=Id_E$, ce qui peut aussi se traduire comme suit :

$$f\circ f^{-1}:\ F\xrightarrow{f^{-1}}E\xrightarrow{f}F$$
$$f^{-1}\circ f:\ E\xrightarrow{f}F\xrightarrow{f^{-1}}E$$

6 Projecteurs et involutions

6.1 Projections et projecteurs

Définition 1

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans *E*. Alors $F\oplus G=E$ et on appelle **projection sur *F* parallèlement à *G***, l'endomorphisme $p_{F,G}$ tel que :

(i) $\forall\vec{x}\in F$, alors $p_{F,G}(\vec{x})=\vec{x}$; Les éléments de *F* restent invariants par $p_{F,G}$.

(ii) $\forall\vec{y}\in G$, alors $p_{F,G}(\vec{y})=\vec{0}$.

Définition 2

- Un endomorphisme *f* de *E* est dit **idempotent** lorsque $f\circ f=f$.
- On appelle **projecteur** de *E* tout endomorphisme idempotent de *E*.

Proposition

Soit p un projecteur de E. Alors $\operatorname{Im} p = \left\{ \vec{x} \in E / p(\vec{x}) = \vec{x} \right\}$. $\operatorname{Im} p$ est l'ensemble de tous les éléments de E invariant par p.

Propriétés

(i) Soit p un projecteur de E. Alors $\ker p \oplus \operatorname{Im} p = E$.

(ii) Si p est un projecteur de E, alors nécessairement p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

(iii)Soit p un endomorphisme de E. $Id_E - p$, avec Id_E l'application identité de E, est un projecteur si et seulement si p est un projecteur.

(iv)Si p est un projecteur de E, alors $\ker(Id_E - p) = \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im}(Id_E - p) = \ker p$.

Définition

Si p est un projecteur de E, alors on dit que p et $Id_E - p$ sont des **projecteurs associés**.

6.2 Symétries et involutions

Définition 1

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. Alors $F \oplus G = E$ et on appelle **symétrie par rapport à *F* parallèlement à *G***, l'endomorphisme $s_{F,G}$ tel que :

(iii) $\forall \vec{x} \in F$, alors $s_{F,G}(\vec{x}) = \vec{x}$; Les éléments de F restent invariants par $s_{F,G}$.

(iv) $\forall \vec{y} \in G$, alors $s_{F,G}(\vec{y}) = -\vec{y}$; Les éléments de G sont changés en leur opposé par $s_{F,G}$.

Définition 2

Un endomorphisme s de E est une involution linéaire lorsque $s \circ s = Id_E$.

Propriété

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. Les endomorphismes $s_{F,G}$ ***et*** $p_{F,G}$ ***sont liés par la relation*** $s_{F,G} = 2p_{F,G} - Id_E$.