Chapitre 2 : Applications linéaires

Sandrine CHARLES : scharles@biomserv.univ-lyon1.fr

Introduction

Les applications linéaires constituent un chapitre considérable des mathématiques modernes, tant par sa densité au-delà de son développement propre : calcul matriciel ; théorie des déterminants ; formes quadratiques ; espaces fonctionnels… ; que par l'importance de son emploi dans les *autres sciences* : Recherche opérationnelle ; Sciences économiques ; Mécanique quantique ; Théorie de la relativité ; Biologie (dynamique des populations)... Ceci est dû, en particulier, aux nombreuses interventions des systèmes d'équations algébriques, différentielles ou aux dérivées partielles, dont la résolution utilise les applications linéaires et le calcul matriciel qui leur est lié (voir chapitre 3). *Source* : http://www.chronomath.com/.

Considérons deux ensembles non vides quelconque E et F. Supposons qu'à chaque élément de E on fasse correspondre un unique élément de F. L'ensemble de ces correspondances est appelé une ***application*** de E vers F ; on la note $f : E \to F$. On note également $f(a)$ l'élément de F associé à $a \in E$.

Dans le cours d'analyse nous avions également parlé d'applications (que nous avions désigné sous le terme *fonctions*) mais de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire des applications réelles d'une variable réelle.

Supposons que les deux ensembles non vides quelconques E et F sont munis chacun d'une loi de composition interne : $(E,\wedge)$ et $(F,\vee)$. On dit que $f : E \to F$ est un ***morphisme*** (on dit encore ***homomorphisme***) lorsque :

$$\forall (a,b) \in E,\ f(a \wedge b) = f(a) \vee f(b)$$

On désigne alors par ***endomorphisme*** de $(E,\wedge)$ un morphisme de $(E,\wedge)$ dans lui-même ; par ***isomorphisme*** un morphisme bijectif ; et par ***automorphisme*** un endomorphisme bijectif.

Les ***applications linéaires*** sont des *morphismes d'espace vectoriel*, c'est-à-dire des applications d'un espace vectoriel dans un autre espace vectoriel. C'est tout l'objet de ce chapitre 2.

1 Généralités

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application de E dans F. On dit que f est une **application linéaire** si et seulement si l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

Autrement dit :

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \text{ et } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ f(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})$$

Et plus généralement :

$$\forall \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in E,\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ f(\lambda_1 \vec{x}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{x}_n) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \ldots + \lambda_n f(\vec{x}_n)$$

Théorème

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application de E dans F. f est une **application linéaire** si et seulement si :

(i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E,\ f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

(ii) $\forall \vec{x} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$

Remarques

★ On dira donc que f est linéaire si elle conserve les deux opérations de base d'un espace vectoriel c'est-à-dire l'addition et la multiplication par un scalaire.

★ En remplaçant λ par 0 dans (ii), on obtient que $f(\vec{0}) = \vec{0}$: l'image du vecteur nul par toute application linéaire est égale au vecteur nul.

★ **L'ensemble des applications linéaires** de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Exemples

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(\vec{x}) = (x_1 - x_2, 2x_2 + 3x_3)$ est bien une application linéaire. Réponse.
2. Soit $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelles continue, n-fois dérivables et à dérivées toutes continues. Montrer que l'application $D : C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui à toute fonction f de $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ associe sa dérivée est linéaire. Réponse.

3. Montrer que la *translation* définie $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=(x+1,y+2)$ n'est pas une application linéaire. Réponse.

Définition

On appelle **application identité** $Id_E : E \to E$, l'application telle que $\forall \vec{u} \in E$, $Id_E(\vec{u})=\vec{u}$;

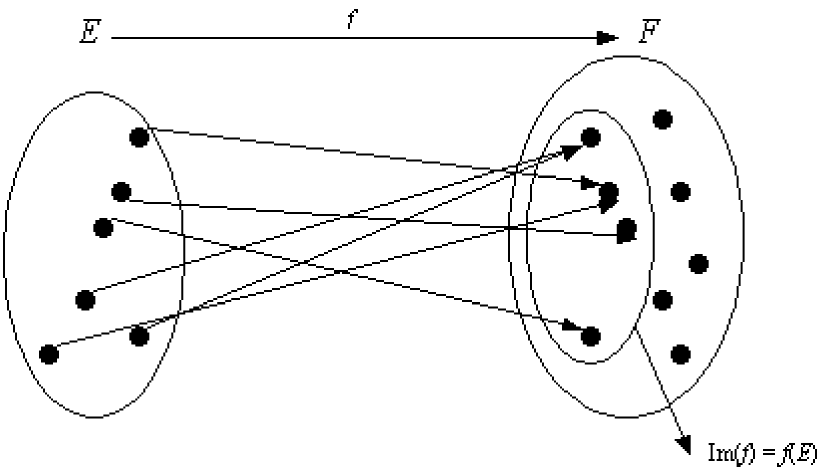
C'est une application linéaire.

2 Image et noyau d'une application linéaire

Proposition 1

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. L'ensemble des images des éléments de E, $f(E)$, est un sous-espace vectoriel de F appelé **image de l'application linéaire** f et noté $\operatorname{Im} f$.

$$\vec{v} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists \vec{u} \in E / \vec{v} = f(\vec{u})$$



Remarque

- $\operatorname{Im} f$ est une partie de F : $\operatorname{Im} f \subseteq F$
- La dimension de $\operatorname{Im} f$ est appelée **rang de** f : $rg(f)=\dim(\operatorname{Im} f)$.

Proposition 2

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $f(E)=\operatorname{Im} f$ est un espace-vectoriel.

Démonstration

Proposition 3

Soit $f : E \to F$. L'ensemble défini par $\ker f = \{\vec{u} \in E \,/\, f(\vec{u}) = \vec{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé **noyau de l'application linéaire** *f*. (ker = *kernel* qui veut dire noyau en anglais).

Remarque

$\ker f$ est une partie de E : $\ker f \subseteq E$.

Exemple 2 (⚠ ***très important***)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \mapsto f(\vec{u}) = (u_1 + 2u_2 - u_3, u_2 + u_3, u_1 + u_2 - 2u_3).$$

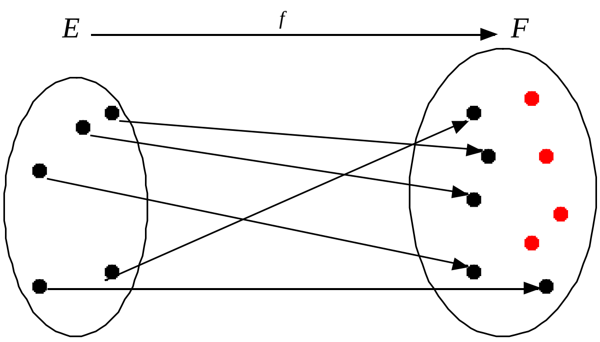
Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$. Réponse.

3 Image d'une famille de vecteurs

3.1 Injectivité

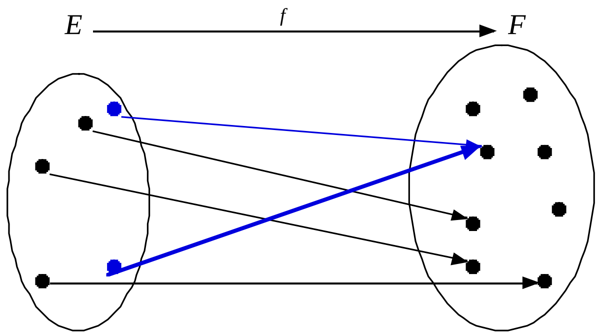
Définition 1

Une application $f : E \to F$ est dite **injective** si des éléments distincts de E ont des images distinctes : $\vec{u} \neq \vec{u}' \Rightarrow f(\vec{u}) \neq f(\vec{u}') \Leftrightarrow f(\vec{u}) = f(\vec{u}') \Rightarrow \vec{u} = \vec{u}'$ (contraposition).



OUI !

- Il peut y avoir des éléments isolés dans *F*



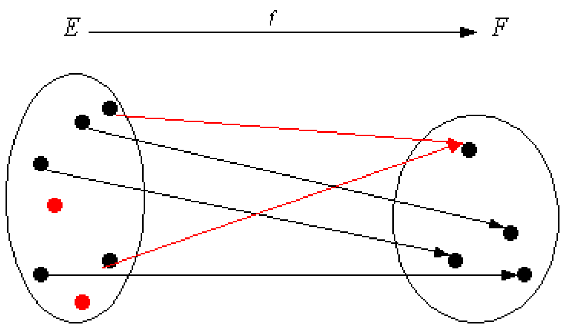
NON !

- Deux éléments distincts de E ne peuvent pas avoir la même image dans F

> *Proposition 1*
>
> Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, f est injective si et seulement si $\ker f = \{\vec{0}\}$.

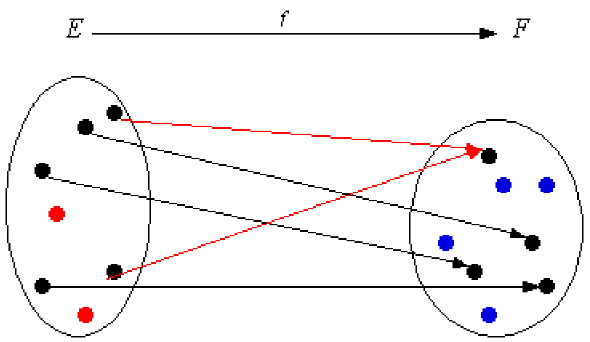
3.2 Surjectivité

> *Définition 2*
>
> Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, f est **surjective** si tout vecteur $\vec{v}$ de F possède au moins un antécédent par f dans E : $\forall \vec{v} \in F, \exists \vec{u} \in E \,/\, f(\vec{u}) = \vec{v}$.



OUI !

- Un élément de F peut avoir plusieurs antécédents dans E
- Il peut y avoir des éléments isolés dans E



NON !

- Il ne peut y avoir d'éléments isolés dans F

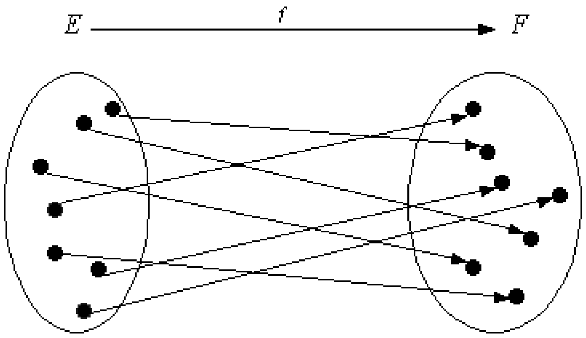
Proposition 2

f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = f(E) = F$.

3.3 Bijectivité

Proposition 3

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, f est dite **bijective** si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.



- Tout élément de *E* possède une image unique dans *F*
- Tout élément de *F* possède un antécédent unique dans *E*.

Théorème de la dimension

Soient *E* et *F* deux espaces vectoriels et *E* de dimension finie et soit *f* une application linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$, on a alors :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\ker f) \left[= \mathrm{rg}\, f + \dim(\ker f) \right]$$

Proposition 4

$f \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective $\Rightarrow \dim(E) = \dim(F)$.

Remarque

La démonstration de la proposition 4 est immédiate :

f est bijective donc $\star$ injective : $\ker f = \{\vec{0}\}$ (*proposition 1*)

$\star$ surjective : $\mathrm{Im}\, f = F$ (*proposition 2*)

Or $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\ker f) = \dim(F) + \dim(\ker f) = \dim(F) + 0 = \dim(F)$.

Conséquences

- Si $\dim(E) = p$ alors $\dim(\text{Im } f) \leq p$
- Si $\dim(E) = p$ et si $\dim(\text{Im } f) = p$ alors $\dim(\ker f) = 0$

  Soit $\ker f = \{\vec{0}\}$ $\Leftrightarrow$ f est injective.
- Si $\dim(E) = \dim(F)$, f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective.

Définitions (voir Introduction)

★ Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,E)$ est appelée **endomorphisme**.

★ Une application linéaire bijective de $\mathcal{L}(E,F)$ est appelée **isomorphisme**.

★ Une application linéaire bijective de $\mathcal{L}(E,E)$ est un **automorphisme** ou endomorphisme bijectif.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x,y) \mapsto (x+y, 2y)$. f est-elle surjective ? bijective ? Réponse.

4 Opérations sur les applications linéaires

Proposition

$\mathcal{L}(E,F)$ muni des deux lois suivantes :

- $\forall f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, $f + g \in \mathcal{L}(E,F)$ (loi de composition interne)
- $\forall f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in \mathcal{L}(E,F)$ (loi de composition externe)

est un *espace vectoriel*.

Définition / Proposition

Soient *E*, *F*, *G*, trois espaces vectoriels, soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. On définit la **composée de deux applications linéaires** *f* et *g* notée $g \circ f$ comme l'application $h \in \mathcal{L}(E,G)$ qui à $\vec{u} \in E$ associe $g\left(f(\vec{u})\right)$:

$$\begin{aligned} h : E &\xrightarrow{f} \boldsymbol{F} \xrightarrow{g} G \\ \vec{u} &\mapsto f(\vec{u}) \mapsto g\left(f(\vec{u})\right) = h(\vec{u}) \end{aligned}$$

Remarques

1. $g \circ f$ signifie que l'on applique d'abord *f* puis ensuite *g*.
2. La composition n'est possible que si l'ensemble d'arrivée de *f* est inclus dans l'ensemble de départ de *g*.
3. Si $g \circ f$ existe, $f \circ g$ n'existe pas forcément.
4. Si $f \circ g$ existe, alors généralement $g \circ f \neq f \circ g$

Exemple 3

Soient deux applications linéaires définies par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_1, u_2) & \mapsto & (3u_1 + u_2, u_1 - u_2) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (v_1, v_2) & \mapsto & (v_1 + 2v_2, -3v_1 + v_2) \end{array}$$

Calculer quand c'est possible $g \circ f$ et $f \circ g$. Réponse.

Remarque

Il est facile de démontrer que $h = g \circ f$ est bien une application linéaire :

$$h(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = g\left(f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})\right) = g\left(\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})\right) \text{ car } f \text{ est linéaire.}$$

$$= g\left(\lambda f(\vec{u})\right) + g\left(\mu f(\vec{v})\right) = \lambda g\left(f(\vec{u})\right) + \mu g\left(f(\vec{v})\right) \text{ car } g \text{ est linéaire.}$$

$$= \lambda h(\vec{u}) + \mu h(\vec{v})$$

Théorème

$f\circ(g_1+g_2)=(f\circ g_1)+(f\circ g_2)$

$(f_1+f_2)\circ g=(f_1\circ g)+(f_2\circ g)$

$\lambda(f\circ g)=(\lambda f)\circ g=f\circ(\lambda g)$

5 Réciproque d'une application linéaire bijective

Lorsque *f* est bijective, tout $\vec{v}\in F$ possède un antécédent unique $\vec{u}$ par *f* dans *E*.

Définition

On appelle **application réciproque** de *f*, notée f^{-1}, l'application qui à $\vec{v}$ associe $\vec{u}$; c'est une application linéaire : $f^{-1}\in \mathcal{L}(F,E)$.

Remarque

$$f: \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \vec{u} & \mapsto & \vec{v}=f(\vec{u}) \end{array} \qquad f^{-1}: \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ \vec{v} & \mapsto & \vec{u}=f^{-1}(\vec{v}) \end{array}$$

Propriété

$f\circ f^{-1}=Id_F$ et $f^{-1}\circ f=Id_E$, ce qui peut aussi se traduire comme suit :

$$f\circ f^{-1}: \; F \xrightarrow{f^{-1}} E \xrightarrow{f} F$$
$$f^{-1}\circ f: \; E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f^{-1}} E$$

Exemple 4 : Déterminer l'application réciproque de *f* définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_1,u_2) & \mapsto & (v_1,v_2)=(2u_1-u_2,u_1) \end{array}$$

Réponse

6 Projecteurs et involutions

6.1 Projections et projecteurs

Définition 1

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. Alors $F \oplus G = E$ et on appelle **projection sur *F* parallèlement à *G***, l'endomorphisme $p_{F,G}$ tel que :

(i) $\forall \vec{x} \in F$, alors $p_{F,G}(\vec{x}) = \vec{x}$; Les éléments de F restent invariants par $p_{F,G}$.

(ii) $\forall \vec{y} \in G$, alors $p_{F,G}(\vec{y}) = \vec{0}$.

Définition 2

- Un endomorphisme f de E est dit **idempotent** lorsque $f \circ f = f$.
- On appelle **projecteur** de E tout endomorphisme idempotent de E.

Remarque

Toute projection $p_{F,G}$ est un projecteur.

Exemples

1. Montrer que l'application $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x, 0)$ est un projecteur. Réponse.
2. Montrer que l'application $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x, 0)$ est une projection sur F parallèlement à G. Identifier F et G. Réponse.

Proposition

Soit p un projecteur de E. Alors $\operatorname{Im} p = \{\vec{x} \in E / p(\vec{x}) = \vec{x}\}$. $\operatorname{Im} p$ est l'ensemble de tous les éléments de E invariant par p.

Démonstration

Soit $\vec{x} \in \operatorname{Im} p$. Alors $\exists \vec{y} \in E$ tel que $\vec{x} = p(\vec{y})$. Ainsi $p(\vec{x}) = (p \circ p)(\vec{y}) = p(\vec{y}) = \vec{x}$.

De même si $p(\vec{x}) = \vec{x}$, alors $\vec{x} \in \operatorname{Im} p$, d'où l'égalité.

Propriétés

(i) Soit p un projecteur de E. Alors $\ker p \oplus \operatorname{Im} p = E$.

(ii) Si p est un projecteur de E, alors nécessairement p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

(iii) Soit p un endomorphisme de E. $Id_E - p$, avec Id_E l'application identité de E, est un projecteur si et seulement si p est un projecteur.

(iv) Si p est un projecteur de E, alors $\ker\left(Id_E - p\right) = \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im}\left(Id_E - p\right) = \ker p$.

Eléments de démonstration

Définition

Si p est un projecteur de E, alors on dit que p et $Id_E - p$ sont des **projecteurs associés**.

6.2 Symétries et involutions

Définition 1

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. Alors $F \oplus G = E$ et on appelle **symétrie par rapport à *F* parallèlement à *G***, l'endomorphisme $s_{F,G}$ tel que :

(iii) $\forall \vec{x} \in F$, alors $s_{F,G}\left(\vec{x}\right) = \vec{x}$; Les éléments de F restent invariants par $s_{F,G}$.

(iv) $\forall \vec{y} \in G$, alors $s_{F,G}\left(\vec{y}\right) = -\vec{y}$; Les éléments de G sont changés en leur opposé par $s_{F,G}$.

Définition 2

Un endomorphisme s de E est une **involution linéaire** lorsque $s \circ s = Id_E$.

Remarque

Toute symétrie $s_{F,G}$ est une involution linéaire.

Exemples

1. Montrer que l'application $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\left(x, y\right) \mapsto \left(x, -y\right)$ est une involution linéaire. Réponse.

2. Montrer que l'application $s:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x,y) \mapsto (x,-y)$ est une symétrie sur *F* parallèlement à *G*. Identifier *F* et *G*. Réponse.

Propriété

Soient *F* et *G* deux sous-espaces supplémentaires dans *E*. Les endomorphismes $s_{F,G}$ et $p_{F,G}$ sont liés par la relation $s_{F,G} = 2p_{F,G} - Id_E$.