Synthèse 3 : Les matrices

Sandrine CHARLES : scharles@biomserv.univ-lyon1.fr

1 Définitions

Définitions 1

Un tableau rectangulaire de la forme ci-dessous est appelé **matrice**.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{matrix} \right)^{\textit{p colonnes}} \\ \textit{n lignes} \end{array}$$

L'élément $a_{ij} \in \mathbb{R}$ de la matrice se trouve à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

La matrice **A** s'écrit également sous la forme $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ avec $i = 1, n$ et $j = 1, p$.

Une matrice ayant n lignes et p colonnes est appelée matrice (n, p) ou $n \times p$.

Le couple (n, p) est appelé **dimension** de la matrice.

Une matrice de dimension $(n,1)$ est une **matrice colonne**.

Une matrice de dimension $(1, p)$ est une **matrice ligne**.

Définitions 2

Soients $B' = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Soit $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ une matrice de dimension (n, p). Alors :

- $\vec{c}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \vec{e}_k'$ est le j-ième **vecteur colonne** extrait de **A** ; c'est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$.
- $\vec{\ell}_i = \sum_{h=1}^{p} a_{ih} \vec{e}_h$ est le i-ième **vecteur ligne** extrait de **A** ; c'est un vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont les coordonnées sont $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip})$.

2 Opérations sur les matrices

2.1 Addition de deux matrices

Définition

Soient deux matrices $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ et $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]$ <u>toutes deux</u> de dimension (n, p) ;

On additionne terme à terme pour obtenir : $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]$ de dimension (n, p).

Propriétés

Soient **A**, **B** et **C** trois matrices de dimension (n, p) et **0** la matrice (n, p) dont les éléments sont tous égaux à 0.

(i) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ (associativité)

(ii) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ (élément neutre)

(iii) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ (opposé)

(iv) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (commutativité)

2.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition

Soient $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ une matrice de dimension (n, p) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la matrice $\lambda\mathbf{A}$ comme matrice dont tous les coefficients sont multipliés par λ : $\lambda\mathbf{A} = \left[\lambda a_{ij}\right]$.

$\lambda\mathbf{A}$ est aussi de dimension (n, p).

Propriétés

Soient **A** et **B** deux matrices de dimension (n, p) et λ, μ deux réels.

(i) $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$

(ii) $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$

(iii) $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$

(iv) $1 \times \mathbf{A} = \mathbf{A}$ et $0 \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ (ne pas confondre 0 scalaire et **0** matrice)

2.3 Multiplication de matrices

Définition

Soient $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ une matrice (n, p) et $\mathbf{B} = [b_{kj}]$ une matrice (p, q) le produit des deux matrices $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ a pour dimension (n, q) et s'écrit :

$$\mathbf{C} = [c_{ij}] \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \text{, pour } i = 1, n \text{ et } j = 1, q$$

Moyen mnémotechnique

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriétés

Soient $\mathbf{A}(n, p)$, $\mathbf{B}(p, q)$, $C(q, s)$, $\mathbf{D}(p, q)$ et $\mathbf{E}(q, n)$:

(i) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ $\rightarrow$ associativité [matrice de dimension (n, s)]

(ii) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AD}$ $\rightarrow$ distributivité à gauche [matrice de dimension (n, q)]

(iii) $(\mathbf{B} + \mathbf{D})\mathbf{E} = \mathbf{BE} + \mathbf{DE}$ $\rightarrow$ distributivité à droite [matrice de dimension (p, n)]

2.4 Transposition de matrice

Définition

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$, la **matrice transposée** de **A** notée $\mathbf{A}'$ ou ${}^t\mathbf{A}$ est la matrice obtenue en écrivant les lignes de **A** en colonnes : ${}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$

Si **A** a pour dimension (n,p) alors ${}^t\mathbf{A}$ a pour dimension (p,n).

Propriétés

Soient $\mathbf{A}(n,p)$, $\mathbf{B}(n,p)$, $C(p,q)$ trois matrices et soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

(i) ${}^t(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B}$

(ii) ${}^t({}^t\mathbf{A}) = \mathbf{A}$

(iii) ${}^t(\lambda\mathbf{A}) = \lambda\, {}^t\mathbf{A}$

(iv) ${}^t(\mathbf{AC}) = {}^t\mathbf{C}\, {}^t\mathbf{A}$

3 Matrices carrées, matrices élémentaires

3.1 Matrices carrées

Définition

Une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes est appelée **matrice carrée**. Si elle a pour dimension (n,n), on dit alors qu'elle est **d'ordre *n***.

3.2 Matrices diagonales

Définition 1

On appelle ***diagonale*** (ou diagonale principale) d'une matrice carrée d'ordre *n*, les éléments $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ de la matrice.

Définition 2

Une matrice carrée $\mathbf{D} = \left[d_{ij}\right]$ est dite ***diagonale*** si tous ses éléments non diagonaux sont nuls. Une telle matrice est fréquemment notée $\mathbf{D} = diag\left(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}\right)$ où certains ou tous les scalaires d_{ii} peuvent être égaux à zéro.

3.3 Matrice Identité

Définition

Une matrice carrée d'ordre *n* ne comportant que des 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs, est notée $\mathbf{I}_n$ et est appelée ***matrice unité*** ou ***matrice identité***.

Propriété 1

Quelle que soit $\mathbf{A}(n, p)$ $\quad \mathbf{AI}_p = \mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$

Propriété 2

La matrice $\lambda\mathbf{I}_n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, est appelée ***matrice scalaire***. C'est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux à λ.

3.4 Matrices Inversibles

Définition

Une matrice carrée **A**, d'ordre *n*, est dite **inversible** ou **non singulière**, s'il existe une matrice carrée **B** d'ordre *n* telle que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$, Une telle matrice **B** est *unique*, d'ordre n ; on l'appelle **matrice inverse de A** et on la note $\mathbf{A}^{-1}$.

3.5 Matrices symétriques

Définition

Une matrice carrée est dite **symétrique** si et seulement si ${}^t\mathbf{A} = \mathbf{A}$. Autrement dit si $\forall i \neq j$, $a_{ij} = a_{ji}$.

3.6 Matrices triangulaires

Définition

Une **matrice triangulaire** est une matrice carrée dont les éléments au-dessous (ou au-dessus) de la diagonale principale sont tous nuls.

3.7 Matrices orthogonales

Définition

Une matrice carrée d'ordre n est dite **orthogonale** si $\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{A} = {}^t\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$

Propriété

Si **A** est une matrice orthogonale, alors elle est inversibles et $\mathbf{A}^{-1} = {}^t\mathbf{A}$.

3.8 Matrices normales

Définition

Une matrice carrée d'ordre n est dite **normale** si $\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{A} = {}^t\mathbf{A}\mathbf{A}$, autrement dit si **A** et sa transposée ${}^t\mathbf{A}$ commutent.

4 Déterminant d'une matrice carrée

4.1 Formes multilinéaires alternées

4.2 Déterminant d'un système de vecteurs

4.3 Déterminant d'une matrice carrée

Soit **A** une matrice carrée d'ordre *n*. Soit $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$. Chaque colonne de **A** peut alors être considérée comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{A} = \left[\vec{v}_1 \vdots \vec{v}_2 \vdots \ldots \vdots \vec{v}_p \right] \text{ avec } \vec{v}_j = \left(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj} \right) \text{ pour } j = 1, n$$

Ainsi, la définition de la notion de déterminant d'une matrice carrée est étroitement liée à la définition du déterminant d'un système de vecteurs :

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$$

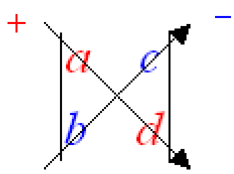
On note alors $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, et on parle de déterminant d'ordre *n*.

4.3.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Alors $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c$.

Moyen mnémotechnique



4.3.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

4.3.3 Généralisation : Déterminant d'ordre n

<u>*Méthode des cofacteurs*</u>

L'astuce consiste à se ramener à des déterminants d'ordre inférieur jusqu'à obtenir des déterminants d'ordre 2. Pour cela, on développe le déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.

Soit $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ un déterminant d'ordre *n*.

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_{ij} \text{, développement par rapport à la ligne } i$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_{ij} \text{, développement par rapport à la colonne } j$$

où X_{ij} est le **cofacteur** de l'élément a_{ij} : $X_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$

Δ_{ij} est le **mineur** de a_{ij} c'est-à-dire le déterminant d'ordre $(n-1)$ extrait de Δ en enlevant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

<u>Application</u> :

$\Delta = a_{11}X_{11} + a_{12}X_{12} + \ldots + a_{1p}X_{1p}$ (ligne 1)

$\Delta = a_{11}X_{11} + a_{21}X_{21} + \ldots + a_{p1}X_{p1}$ (colonne 1)

$$X_{11} = +\Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} \qquad X_{12} = -\Delta_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

Remarque : La répartition des signes à prendre devant les mineurs $(-1)^{i+j}$, est alternée à partir du signe + pour l'élément a_{11}. <u>Par exemple</u>, pour un déterminant d'ordre 5 :

+	-	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	+

<u>*Application au déterminant d'ordre 3*</u>

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\Delta = a_1X_{11} + a_2X_{21} + a_3X_{31}$ **(colonne 1)**

$$\Delta = a_1\Delta_{11} - a_2\Delta_{21} + a_3\Delta_{31}$$

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

Propositions

a) → Si **A** a une ligne (ou une colonne) de zéros alors $\det(\mathbf{A})=0$

→ Si **A** a deux lignes (ou deux colonnes) identiques alors $\det(\mathbf{A})=0$

b) Si on échange deux lignes (deux colonnes) d'un déterminant alors on obtient $-\det(\mathbf{A})$

c) On ne modifie pas un déterminant si on ajoute à une ligne (resp. une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. des autres colonnes) :

d) Si on multiplie une ligne (resp. une colonne) d'un déterminant par un scalaire λ, alors le déterminant est lui-même multiplié par λ.

e) Si $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$ est une matrice triangulaire d'ordre *n* alors $\det \mathbf{A}=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ (produit des termes diagonaux). Il en résulte que $\det(\mathbf{I})=1$.

f) $\det(\mathbf{AB})=\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) \;\rightarrow\; \det(\mathbf{A}^n)=\left[\det(\mathbf{A})\right]^n$. Le déterminant est une fonction multiplicative.

g) $\det\left({}^t\mathbf{A}\right)=\det(\mathbf{A})$

h) $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$

i) $\det(\lambda\mathbf{A})=\lambda^n\det(\mathbf{A})$

4.4 Déterminant et volume

5 Inversion de matrices

5.1 Matrice adjointe

Définition

Considérons une matrice carrée **A** d'ordre *n*, la matrice des cofacteurs X_{ij} des éléments a_{ij} de **A** notée $adj\mathbf{A}$ est appelée **matrice adjointe** de **A** ou **co-matrice** de **A**.

$$adj\mathbf{A}=com\mathbf{A}=\left[X_{ij}\right]=\left[(-1)^{i+j}\Delta_{ij}\right]$$

5.2 Théorèmes

Théorème 1

Soit **A** une matrice carrée d'ordre *n*. Alors **A** est une matrice inversible si et seulement si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Théorème 2

Soit **A** une matrice carrée quelconque d'ordre *n*. Alors :

$$\mathbf{A} \times {}^t(adj\mathbf{A}) = {}^t(adj\mathbf{A}) \times \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \times \mathbf{I}_n$$ où $\mathbf{I}_n$ est la matrice identité d'ordre *n*.

Théorème 3

Soit **A** une matrice carrée quelconque d'ordre *n*. Si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, alors A est inversible et :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} {}^t(adj\mathbf{A})$$

5.3 Cas d'une matrice d'ordre 2

Soit $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$. On sait que $|\mathbf{A}|$ = det(**A**) = (*ac*-*bd*).

La matrice adjointe de **A** est $adj\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c & -d \\ -b & a \end{pmatrix}$: $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(ac-bd)}\begin{pmatrix} c & -b \\ -d & a \end{pmatrix}$.

5.4 Cas d'une matrice d'ordre 3

5.5 Cas particulier : inverse d'une matrice diagonale

Définition

Si $\mathbf{A} = diag[a_{ii}]$ est une matrice diagonale inversible d'ordre *n* :

(i) $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0 \Rightarrow \forall i = 1, n \quad a_{ii} \neq 0$

(ii) $\mathbf{A}^{-1} = diag\left[\frac{1}{a_{ii}}\right]$