Chapitre 3 : Les matrices

Sandrine CHARLES : scharles@biomserv.univ-lyon1.fr

Introduction

Historiquement c'est **Cayley**, parallèlement aux travaux de **Grassmann**, qui dégage la notion d'**espace vectoriel** de dimension *n*, et introduit, avec **Sylvester**, la notion de matrice (le terme sera introduit par ce dernier en 1850) et en expose l'usage en faisant emploi des déterminants (dont l'initiateur fut **Cauchy**) dans une théorie plus large dite *des invariants* (1858) : on entend là des propriétés matricielles invariantes par transformation linéaire comme, par exemple, le déterminant et la trace (somme des éléments diagonaux).

1 Définitions

Définition 1

Un tableau rectangulaire de la forme ci-dessous est appelé **matrice**.

$$\begin{array}{cc} & p \text{ colonnes} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \\ n \text{ lignes} & \end{array}$$

L'élément $a_{ij} \in \mathbb{R}$ de la matrice se trouve à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

La matrice **A** s'écrit également sous la forme $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ avec $i = 1, n$ et $j = 1, p$.

Une matrice ayant *n* lignes et *p* colonnes est appelée matrice (n, p) ou $n \times p$.

Définition 2

Le couple (n, p) est appelé **dimension** de la matrice.

Définitions 3

Une matrice de dimension $(n,1)$ est une **matrice colonne**.

Une matrice de dimension $(1, p)$ est une **matrice ligne**.

Notation : L'ensemble des matrices de dimension (n, p) est noté $\boxed{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$.

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} \text{ a pour dimension } (3,2) \qquad a_{12} = 3 \qquad a_{31} = 1$$

Définition 4

Soient $B' = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Soit $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ une matrice de dimension (n, p). Alors :

- $\vec{c}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \vec{e}_k'$ est le j-ième **vecteur colonne** extrait de $\mathbf{A}$; c'est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$.
- $\vec{\ell}_i = \sum_{h=1}^{p} a_{ih} \vec{e}_h$ est le i-ième **vecteur ligne** extrait de $\mathbf{A}$; c'est un vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont les coordonnées sont $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip})$.

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B' = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\} \text{ base de } \mathbb{R}^3 \qquad B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \text{ base de } \mathbb{R}^2.$$

$$\vec{c}_1 = 2\vec{e}_1' + 4\vec{e}_2' + \vec{e}_3' \qquad \vec{c}_2 = 3\vec{e}_1' + 2\vec{e}_2'$$

$$\vec{\ell}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \qquad \vec{\ell}_2 = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \qquad \vec{\ell}_3 = \vec{e}_1$$

2 Opérations sur les matrices

2.1 Addition de deux matrices

Définition

Soient deux matrices $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ et $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ toutes deux de dimension (n, p) ;

On additionne terme à terme pour obtenir : $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$ de dimension (n, p).

Exemple 1

Soient $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{A}+\mathbf{B}$. Réponse.

Propriétés

Soient $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ trois matrices de dimension (n,p) et $\mathbf{0}$ la matrice (n,p) dont les éléments sont tous égaux à 0.

(i) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ (associativité)

(ii) $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$ (élément neutre)

(iii) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$ (opposé)

(iv) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ (commutativité)

Remarque : $\boxed{-\mathbf{A}=\left[-a_{ij}\right]}$

Par exemple, si $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, alors $-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-a & -b\\ -c & -d\end{pmatrix}$.

2.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition

Soient $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$ une matrice de dimension (n,p) et $\lambda\in\mathbb{R}$. On définit la matrice $\lambda\mathbf{A}$ comme matrice dont tous les coefficients sont multipliés par λ : $\lambda\mathbf{A}=\left[\lambda a_{ij}\right]$.

$\lambda\mathbf{A}$ est aussi de dimension (n,p).

Exemple 2

Soient $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $\lambda=3$. Calculer $\lambda\mathbf{A}$. Réponse.

Remarque : $\boxed{-\mathbf{A}=(-1)\mathbf{A}}$

Propriétés

Soient **A** et **B** deux matrices de dimension (n, p) et λ, μ deux réels.

(i) $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$

(ii) $(\lambda+\mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$

(iii) $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$

(iv) $1\times\mathbf{A} = \mathbf{A}$ et $0\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$ (ne pas confondre 0 scalaire et **0** matrice)

Conséquence

Compte tenu des propriétés ci-dessus, l'ensemble des matrices de dimension (n, p), muni des deux lois précédemment définies, est un espace vectoriel.

2.3 Multiplication de matrices

Définition

Soient $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ une matrice (n, p) et $\mathbf{B} = [b_{kj}]$ une matrice (p, q) le produit des deux matrices $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ a pour dimension (n, q) et s'écrit :

$$\mathbf{C} = [c_{ij}] \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\text{, pour } i = 1, n \text{ et } j = 1, q$$

Remarque

Le produit **AB** n'est donc possible que si le nombre de colonnes de **A** est égal au nombre de lignes de **B** (p).

Application au cas de deux matrices (2,2)

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ soit } \mathbf{C}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Moyen mnémotechnique

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 3

Soient **A**=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et **B**=$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer **AB**. Réponse.

Remarques

En général, la multiplication de deux matrices n'est pas commutative :

- Si **AB** existe, **BA** n'existe pas forcément.
- Si **BA** existe, alors généralement $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Exemple 3 (suite)

Vérifier avec les matrices **A** et **B** précédentes que $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Réponse.

Propriétés

Soient $\mathbf{A}(n,p)$, $\mathbf{B}(p,q)$, $C(q,s)$, $\mathbf{D}(p,q)$ et $\mathbf{E}(q,n)$:

(i) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ $\rightarrow$ associativité [matrice de dimension (n,s)]

(ii) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{D}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AD}$ $\rightarrow$ distributivité à gauche [matrice de dimension (n,q)]

(iii) $(\mathbf{B}+\mathbf{D})\mathbf{E} = \mathbf{BE}+\mathbf{DE}$ $\rightarrow$ distributivité à droite [matrice de dimension (p,n)]

2.4 Transposition de matrice

Définition

Soit $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$, la **matrice transposée** de $\mathbf{A}$ notée $\mathbf{A}'$ ou ${}^t\mathbf{A}$ est la matrice obtenue en écrivant les lignes de $\mathbf{A}$ en colonnes : ${}^t\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$

Si $\mathbf{A}$ a pour dimension (n,p) alors ${}^t\mathbf{A}$ a pour dimension (p,n).

Exemple 4

Soit $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer ${}^t\mathbf{A}$. Réponse.

Propriétés

Soient $\mathbf{A}(n,p)$, $\mathbf{B}(n,p)$, $C(p,q)$ trois matrices et soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

(i) ${}^t(\mathbf{A}+\mathbf{B})={}^t\mathbf{A}+{}^t\mathbf{B}$

(ii) ${}^t({}^t\mathbf{A})=\mathbf{A}$

(iii) ${}^t(\lambda\mathbf{A})=\lambda\,{}^t\mathbf{A}$

(iv) ${}^t(\mathbf{AC})={}^t\mathbf{C}\,{}^t\mathbf{A}$

Exemple 5 (propriété (i))

Soient $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que ${}^t(\mathbf{A}+\mathbf{B})={}^t\mathbf{A}+{}^t\mathbf{B}$. Réponse.

Exemple 6 (propriété (iv))

Soient $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Vérifier que ${}^t(\mathbf{AC})={}^t\mathbf{C}\,{}^t\mathbf{A}$. Réponse.

3 Matrices carrées, matrices élémentaires

3.1 Matrices carrées

Définition

Une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes est appelée **matrice carrée**. Si elle a pour dimension (n,n), on dit alors qu'elle est **d'ordre *n***.

Rappelons que l'addition et la multiplication de matrices ne sont pas définies pour des matrices quelconques. Cependant, si on considère uniquement des matrices carrées d'ordre *n* donné, alors les opérations d'addition, de multiplication, de multiplication par un scalaire, et de transposition sont définies et leurs résultats sont encore des matrices carrées d'ordre *n*.

Exemple

Soient $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & -4 & -4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix}$ et $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$. **A** et **B** sont des matrices carrées d'ordre 3.

Vérifier que $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $2\mathbf{A}$, ${}^t\mathbf{A}$ et $\mathbf{AB}$ sont également des matrices carrées d'ordre 3. Réponse.

3.2 Matrices diagonales

Définition 1

On appelle ***diagonale*** (ou diagonale principale) d'une matrice carrée d'ordre *n*, les éléments $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ de la matrice.

Exemple

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}}\end{pmatrix}$$

a_{11},a_{22},a_{33} sont les éléments de la diagonale de **A**

Définition 2

Une matrice carrée $\mathbf{D} = \left[d_{ij} \right]$ est dite ***diagonale*** si tous ses éléments non diagonaux sont nuls.

Une telle matrice est fréquemment notée $\mathbf{D} = diag\left(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn} \right)$ où certains ou tous les scalaires d_{ii} peuvent être égaux à zéro.

Exemples

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3.3 Matrice Identité

Définition

Une matrice carrée d'ordre n ne comportant que des 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs, est notée $\mathbf{I}_n$ et est appelée ***matrice unité*** ou ***matrice identité***.

Exemple

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété 1

Quelle que soit $\mathbf{A}(n, p)$ $\qquad \mathbf{A}\mathbf{I}_p = \mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$

Exemple

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\mathbf{A}\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_3\mathbf{A}$. Réponse.

Propriété 2

La matrice $\lambda\mathbf{I}_n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, est appelée ***matrice scalaire***. C'est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux à λ.

<u>Exemple</u>

$$\lambda\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Remarque

On parle de « matrice scalaire » car elle joue le même rôle que celui d'un scalaire dans la multiplication d'une matrice par un scalaire : $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{I}_p) = (\lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A}$.

3.4 Matrices Inversibles

Définition

Une matrice carrée **A**, d'ordre *n*, est dite **inversible** ou **non singulière**, s'il existe une matrice carrée **B** d'ordre *n* telle que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$, Une telle matrice **B** est *unique*, d'ordre n ; on l'appelle **matrice inverse de A** et on la note $\mathbf{A}^{-1}$.

Remarque

La relation précédente est symétrique, c'est-à-dire que si **B** est l'inverse de **A**, alors **A** est l'inverse de **B**.

3.5 Matrices symétriques

Définition

Une matrice carrée est dite **symétrique** si et seulement si ${}^t\mathbf{A} = \mathbf{A}$. Autrement dit si $\forall i \neq j$, $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

3.6 Matrices triangulaires

Définition

Une **matrice triangulaire** est une matrice carrée dont les éléments au-dessous (ou au-dessus) de la diagonale principale sont tous nuls.

Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$: Matrice triangulaire **supérieure**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$: Matrice triangulaire **inférieure**

3.7 Matrices orthogonales

Définition

Une matrice carrée d'ordre n est dite **orthogonale** si $\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{A} = {}^t\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Propriété

Si **A** est une matrice orthogonale, alors elle est inversible et $\mathbf{A}^{-1} = {}^t\mathbf{A}$.

3.8 Matrices normales

Définition

Une matrice carrée d'ordre n est dite **normale** si $\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{A} = {}^t\mathbf{A}\mathbf{A}$, autrement dit si $\mathbf{A}$ et sa transposée ${}^t\mathbf{A}$ commutent.

Remarque

Il est clair que si **A** est symétrique ou orthogonale, alors elle est normale. Mais il existe d'autres matrices normales.

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

4 Déterminant d'une matrice carrée

4.1 Formes multilinéaires alternées

On rappelle que $E^n = \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n-fois}$.

Définition 1

- Soit E un espace vectoriel. Une application de $D : E^n \to F$ est une **application multilinéaire** ou ***n*-linéaire** si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables :

(i) Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) \in E^n$ tel que $\vec{x}_i = \vec{u}_i + \vec{v}_i$. Alors :

$$D(\vec{x}_1, \ldots, \vec{u}_i + \vec{v}_i, \ldots, \vec{x}_n) = D(\vec{x}_1, \ldots, \vec{u}_i, \ldots, \vec{x}_n) + D(\vec{x}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{x}_n)$$

(ii) Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) \in E^n$ tel que $\vec{x}_i = \lambda \vec{u}_i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$D(\vec{x}_1, \ldots, \lambda \vec{u}_i, \ldots, \vec{x}_n) = \lambda D(\vec{x}_1, \ldots, \vec{u}_i, \ldots, \vec{x}_n)$$

- Si $F = \mathbb{R}$, on dit que D est une **forme *n*-linéaire**.

Définition 2

Soit E un espace vectoriel et $D : E^n \to \mathbb{R}$ une forme n-linéaire. On dit que D est **alternée** si $D(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_n) = 0$ chaque fois que deux des $\vec{x}_i$ sont identiques :

$$D(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_n) = 0 \text{ dès que } \vec{x}_i = \vec{x}_j \text{ pour } i \neq j$$

4.2 Déterminant d'un système de vecteurs

Théorème

Il existe une *unique* application $D:\left(\mathbb{R}^n\right)^n \to \mathbb{R}$ telle que :

(i) D est une forme n-linéaire ;

(ii) D est alternée ;

(iii) $D\left(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_i,\ldots,\vec{e}_n\right)=1$ où les $\vec{e}_i$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition

Cette application $D:\left(\mathbb{R}^n\right)^n \to \mathbb{R}$ n-linéaire alternée et telle que $D\left(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_i,\ldots,\vec{e}_n\right)=1$ est appelée **déterminant**. On la note généralement **det**.

Remarque

Soit V une famille de vecteurs $\vec{v}_j$, $j=1,n$. Alors $V=\left(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\right)\in\left(\mathbb{R}^n\right)^n$ et $\det\left(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\right)\in\mathbb{R}$.

4.3 Déterminant d'une matrice carrée

Soit **A** une matrice carrée d'ordre n. Soit $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$. Chaque colonne de **A** peut alors être considérée comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{A}=\left[\vec{v}_1 \,\vdots\, \vec{v}_2 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \vec{v}_p\right] \text{ avec } \vec{v}_j=\left(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{nj}\right) \text{ pour } j=1,n$$

Ainsi, la définition de la notion de déterminant d'une matrice carrée est étroitement liée à la définition du déterminant d'un système de vecteurs :

$$\det\left(\mathbf{A}\right)=\det\left(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\right)$$

On note alors $\det\left(\mathbf{A}\right)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, et on par le de déterminant d'ordre n.

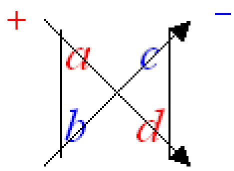
La suite du chapitre traite du calcul pratique des déterminants.

4.3.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition

Soit $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Alors $\det(\mathbf{A})=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=a\times d-b\times c$.

Moyen mnémotechnique



<u>Exemple 8</u>

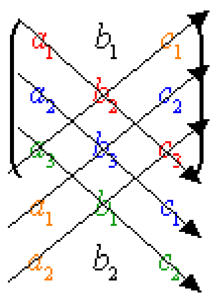
Soit $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(\mathbf{A})$. <u>Réponse</u>.

4.3.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

<u>***Règle de Sarrus***</u>

⚠ ***Cette règle n'est valable que pour des matrices carrées d'ordre 3, et n'est absolument pas généralisable. Mieux vaut donc lui préférer la règle générale énoncée dans le paragraphe suivant.***

Soit $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.



$$\det(\mathbf{M})=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$$

Exemple 9

Soit $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(\mathbf{M})$ par la règle de Sarrus. Réponse.

4.3.3 Généralisation : Déterminant d'ordre n

Méthode des cofacteurs

L'astuce consiste à se ramener à des déterminants d'ordre inférieur jusqu'à obtenir des déterminants d'ordre 2. Pour cela, on développe le déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.

Soit $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ un déterminant d'ordre *n*.

$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_{ij}$, développement par rapport à la ligne *i*

$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_{ij}$, développement par rapport à la colonne *j*

où X_{ij} est le **cofacteur** de l'élément a_{ij} : $X_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$

Δ_{ij} est le **mineur** de a_{ij} c'est-à-dire le déterminant d'ordre $(n-1)$ extrait de Δ en enlevant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Application :

$\Delta = a_{11}X_{11} + a_{12}X_{12} + \ldots + a_{1p}X_{1p}$ (ligne 1)

$\Delta = a_{11}X_{11} + a_{21}X_{21} + \ldots + a_{p1}X_{p1}$ (colonne 1)

$$X_{11} = +\Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} \qquad X_{12} = -\Delta_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

Remarque

La répartition des signes à prendre devant les mineurs $(-1)^{i+j}$, est alternée à partir du signe + pour l'élément a_{11}.

Par exemple, pour un déterminant d'ordre 5 :

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{matrix}$$

Application au déterminant d'ordre 3

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\Delta = a_1 X_{11} + a_2 X_{21} + a_3 X_{31}$ **(colonne 1)**

$$\Delta = a_1\Delta_{11} - a_2\Delta_{21} + a_3\Delta_{31}$$

$$\Delta = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_1\left(b_2c_3 - b_3c_2\right) - a_2\left(b_1c_3 - b_3c_1\right) + a_3\left(b_1c_2 - b_2c_1\right)$$

Exemple 10

Calculer le déterminant suivant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, avec la méthode des cofacteurs. Réponse.

Propositions

a) $\rightarrow$ Si $\mathbf{A}$ a une ligne (ou une colonne) de zéros alors $\det(\mathbf{A}) = 0$

$\rightarrow$ Si $\mathbf{A}$ a deux lignes (ou deux colonnes) identiques alors $\det(\mathbf{A}) = 0$

b) Si on échange deux lignes (deux colonnes) d'un déterminant alors on obtient $-\det(\mathbf{A})$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \text{ et } \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$$

c) On ne modifie pas un déterminant si on ajoute à une ligne (resp. une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. des autres colonnes) :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{vmatrix} = (a+b)d - b(c+d) = ad + bd - bc - bd = ad - bc$$

d) Si on multiplie une ligne (resp. une colonne) d'un déterminant par un scalaire λ, alors le déterminant est lui-même multiplié par λ.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = a\lambda d - b\lambda c = \lambda(ad - bc)$$

e) Si $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ est une matrice triangulaire d'ordre n alors $\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ (produit des termes diagonaux). Il en résulte que $\det(\mathbf{I}) = 1$.

Exemple : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = a_1 a_2 a_3$

f) $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) \rightarrow \det(\mathbf{A}^n) = \left[\det(\mathbf{A})\right]^n$

Le déterminant est une fonction multiplicative.

g) $\det\left({}^t\mathbf{A}\right) = \det(\mathbf{A})$

h) $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$

i) $\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^n \det(\mathbf{A})$

Exemple 11 (propositions b et c)

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier les propositions b et c précédentes. Réponse.

4.4 Déterminant et volume

Les déterminants sont liés aux aires et aux volumes. Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Soit S le parallélépipède (solide) déterminé par ces vecteurs :

$$S = \left\{ \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n / \alpha_i \in [0;1] \text{ pour } i = 1, n \right\}$$

Lorsque $n = 2$, S est un parallélogramme.

Soit $V(S)$ le volume de S (ou la surface de S dans le cas $n = 2$). Alors :

$$V(S) = \left| \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) \right|$$

Si on appelle **A** la matrice dont les colonnes correspondent aux vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, alors :

$$V(S) = \left| \det(\mathbf{A}) \right|$$

<u>Proposition</u>

$V(S) = \left| \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) \right| = 0$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ sont linéairement dépendants.

Vérification dans le cas $n = 2$: voir chapitre 5, paragraphe 7.

5 Inversion de matrices

5.1 Matrice adjointe

Définition

Considérons une matrice carrée **A** d'ordre *n*, la matrice des cofacteurs X_{ij} des éléments a_{ij} de **A** notée $adj\mathbf{A}$ est appelée **matrice adjointe** de **A** ou **co-matrice** de **A**.

$$adj\mathbf{A} = com\mathbf{A} = \left[X_{ij} \right] = \left[(-1)^{i+j} \Delta_{ij} \right]$$

<u>Exemple 12</u>

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Calculer $adj\mathbf{A}$. Réponse.

5.2 Théorèmes

<u>Théorème 1</u>

Soit **A** une matrice carrée d'ordre *n*. Alors **A** est une matrice inversible si et seulement si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

<u>Théorème 2</u>

Soit **A** une matrice carrée quelconque d'ordre *n*. Alors :

$$\mathbf{A} \times {}^t(adj\mathbf{A}) = {}^t(adj\mathbf{A}) \times \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \times \mathbf{I}_n$$ où $\mathbf{I}_n$ est la matrice identité d'ordre *n*.

<u>Théorème 3</u>

Soit **A** une matrice carrée quelconque d'ordre *n*. Si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, alors A est inversible et :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} {}^t(adj\mathbf{A})$$

5.3 Cas d'une matrice d'ordre 2

Soit $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$. On sait que $|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) = (ac\text{-}bd)$.

La matrice adjointe de **A** est $adj\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c & -d \\ -b & a \end{pmatrix}$: $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{(ac-bd)}\begin{pmatrix} c & -b \\ -d & a \end{pmatrix}$.

<u>Exemple 13</u>

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{A}^{-1}$. Réponse.

5.4 Cas d'une matrice d'ordre 3

5.5 Cas particulier : inverse d'une matrice diagonale

Définition

Si $\mathbf{A} = diag\left[a_{ii}\right]$ est une matrice diagonale inversible d'ordre n :

(i) $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0 \Rightarrow \forall i = 1, n \quad a_{ii} \neq 0$

(ii) $\mathbf{A}^{-1} = diag\left[\dfrac{1}{a_{ii}}\right]$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{pp} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & & & \\ & 1/a_{22} & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1/a_{pp} \end{pmatrix}$$

6 Exemples d'utilisation en Biologie

D'un point de vue général, on peut dire que l'on utilise les matrices pour stocker des données expérimentales. Mais nous allons voir que l'on utilise aussi les matrices pour décrire la dynamique de certaines populations animales.

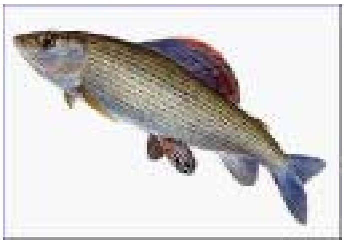
6.1 Surface foliaire

Si chaque jour de l'année, on mesure la surface foliaire de n plantes, on peut mettre ces données sous la forme :

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} 1 \quad \ldots \quad j \quad \ldots \quad p = 365 \text{ (jours)} \\ \begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ \ldots & \ldots & a_{ij} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

où a_{ij} représente la surface folière de la plante i au jour j, avec i variant de 1 à n et j variant de 1 à 365 jours.

6.2 L'ombre commun

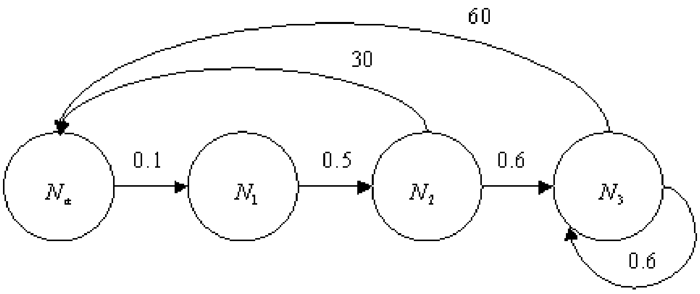


L'ombre commun est un poisson de rivière froide, pure et à cours relativement lent que l'on trouve généralement plus en aval que les truites. La période de reproduction se situe au printemps.

Les jeunes d'un an mesurent en moyenne 15 cm et sont tous immatures. Les poissons de 2 ans mesurent 27 cm et la moitié d'entre eux sont adultes (*i.e.* sexuellement matures). À 3 ans tous les poissons sont adultes et mesurent en moyenne 35 cm.

On admettra dans la suite que la sex-ratio est 1.

Une femelle fournit chaque année 200 alevins, 90 % d'entre eux meurent avant 1 an. 50 % des jeunes d'un an meurent avant l'âge de 2 ans. A partir de l'âge de 2 ans, 40% des poissons meurent par an.



On représente la population, au printemps de l'année *n*, par le vecteur :

$$P_n = \begin{pmatrix} N_a \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}_n \quad \begin{array}{l} N_a : \text{nombre d'alevins} \\ N_1 : \text{nombre de poissons d'un an} \\ N_2 : \text{nombre de poissons de 2ans} \\ N_3 : \text{nombre de poissons de 3ans et plus} \end{array}$$

Compte tenu des informations sur l'espèce, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} N_{a,n+1} &= 200 \times \underbrace{0.5}_{sex-ratio} \left(\underbrace{0.5}_{\text{\% matûres}} \; N_{2,n} + N_{3,n} \right) \times \underbrace{0.6}_{survie} \\ N_{1,n+1} &= 0.1 N_{a,n} \\ N_{2,n+1} &= 0.5 N_{1,n} \\ N_{3,n+1} &= 0.6 \left(N_{3,n} + N_{2,n} \right) \end{aligned}$$

Ce qui peut bien sûr se réécrire en notation matricielle :

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 60 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix} P_n \Leftrightarrow \boxed{P_{n+1} = \mathbf{A}P_n}$$

La matrice **A** permet de décrire l'évolution d'année en année de l'effectif des quatre classes d'âge de la population.

Ainsi, si on suppose que l'on lâche dans une rivière dépeuplée 100 ombres adultes (de 3 ans) après leur période de reproduction, on peut alors étudier l'évolution du repeuplement de la rivière au cours du temps :

- A $n = 0$ (le moment de la réintroduction des ombres), on a $P_0 = (0, 0, 0, 100)$
- L'année suivante, à $n = 1$, on a $P_1 = \mathbf{A}P_0$, soit : $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 60 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 0 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}$
- A $n = 2$, on a $P_2 = \mathbf{A}P_1$, c'est-à-dire $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 60 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6000 \\ 0 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3600 \\ 60 \\ 0 \\ 36 \end{pmatrix}$.
- Et ainsi de suite…

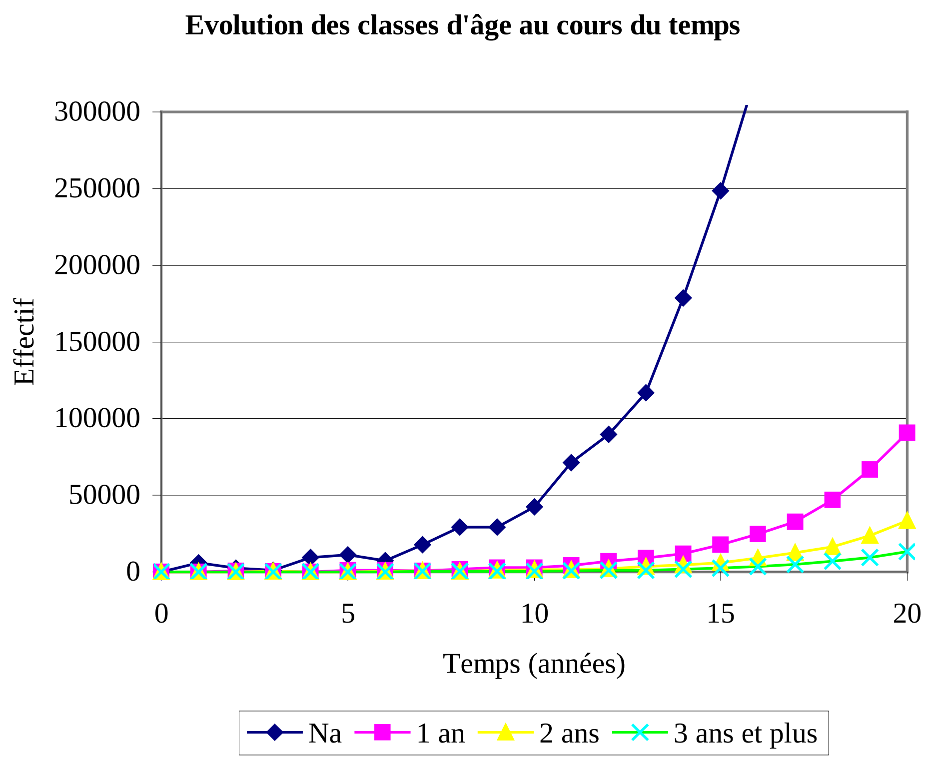
On peut remarquer que $P_2 = \mathbf{A}P_1 = \mathbf{AA}P_0 = \mathbf{A}^2 P_0$; dans le cas général, on peut connaître les effectifs des quatre classes d'âge pour n'importe quelle année *n* par la relation : $\boxed{P_n = \mathbf{A}^n P_0}$.

On comprend alors tout l'intérêt de savoir calculer simplement $\mathbf{A}^n$.

Voir chapitre 4

Heureusement des logiciels existent pour palier « ce problème », et en particulier la boîte à outils PopTools qui fonctionne sous Excel.

Voici la simulation que l'on obtient avec PopTools :


Evolution des classes d'âge au cours du temps
300000
250000
200000
150000
100000
50000
0
Effectif
0
5
10
15
20
Temps (années)
Na
1 an
2 ans
3 ans et plus