Synthèse 3bis : Applications linéaires et Matrices

Sandrine CHARLES : scharles@biomserv.univ-lyon1.fr

1 Application linéaire et base

Soient *E* et *F* deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Supposons que *E* soit muni de la base $\mathcal{B}_E = \left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right\}$. Alors $\dim(E) = p$ et $\forall \vec{x} \in E$, $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_p\vec{u}_p$.

Ainsi :

$$f(\vec{x}) = f\left(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_p\vec{u}_p\right) = x_1 f(\vec{u}_1) + x_2 f(\vec{u}_2) + \ldots + x_p f(\vec{u}_p)$$

⇨ Cette expression montre que l'application linéaire *f* est entièrement définie par les images $\left\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \ldots, f(\vec{u}_p)\right\}$ des vecteurs de la base de *E*. Ceci qui signifie également que si l'on connaît tous les $f(\vec{u}_i)$ pour $i = 1, \ldots, p$, alors on connaît un quelconque $f(\vec{x})$.

2 Matrice d'application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

E est muni de la base $\mathcal{B}_E = \left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right\}$: $\dim(E) = p$

F est muni de la base $\mathcal{B}_F = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\right\}$: $\dim(F) = n$

Les images des vecteurs de la base de *E* sont éléments de *F* et se décomposent dans $\mathcal{B}_F = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\right\}$ selon $f(\vec{u}_1) = a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{v}_n$, soit d'une manière générale $f(\vec{u}_j) = a_{1j}\vec{v}_1 + a_{2j}\vec{v}_2 + \ldots + a_{nj}\vec{v}_n \quad \forall j = 1, p$. Dans le terme général a_{ij}, *i* correspond à un vecteur de la base de *F* et *j* à un vecteur de la base de *E*.

Définition 1

$\left(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}\right)$ sont les coordonnées du vecteur $f(\vec{u}_j)$ dans la base $\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\right\}$.

Définition 2

La **matrice** de l'application $f : \; E \to F$ **relativement aux bases** $\mathcal{B}_E = \left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right\}$ de *E* et $\mathcal{B}_F = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\right\}$ de *F*, est le tableau à *n* lignes et *p* colonnes des coordonnées des $f(\vec{u}_j)$ dans la base $\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\right\}$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2) & \dots & f(\vec{u}_p) \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{array} \end{array}$$

Conséquences

A a pour dimension (n, p) :

- Le nombre de lignes de **A** est donné par la dimension de *F*.
- Le nombre de colonnes de **A** est donné par la dimension de *E*.
- Les colonnes de **A** sont les coordonnées des vecteurs $f(\vec{u}_j)$ dans la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$.

3 Image d'un vecteur $\vec{x}$ de E par f

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

E est muni de la base $\mathcal{B}_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ et *F* est muni de la base $\mathcal{B}_F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$. Soit $\mathbf{A}(n, p) = [a_{ij}]$ la matrice associée à *f* relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Soit $\vec{x}$ dans *E* : $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_p\vec{u}_p$ et $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées du vecteur $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}_E$. Soit $\vec{y} = f(\vec{x})$, l'image de $\vec{x}$ par *f* : $\vec{y} \in F \Rightarrow \vec{y} = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + \ldots + y_n\vec{v}_n$ et $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées du vecteur $\vec{y}$ dans $\mathcal{B}_F$. Avec la matrice $\mathbf{A}(n, p)$, il vient : $\boxed{\mathbf{Y} = \mathbf{AX}}$.

4 Lien entre opérations sur les applications linéaires et opérations sur les matrices

E est un espace vectoriel muni de la base $\mathcal{B}_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ et *F* est un espace vectoriel muni de la base $\mathcal{B}_F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$.

4.1 Addition de deux applications linéaires

Proposition

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$. Soient $\mathbf{M}_f$ et $\mathbf{M}_g$ leurs matrices associées relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Alors $f+g : E \to F$ a pour matrice associée relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ $\mathbf{M}_f + \mathbf{M}_g$.

4.2 Multiplication par un scalaire

Proposition :

Soit $f : E \to F$ une application linéaire ayant $\mathbf{M}$ pour matrice associée relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors l'application linéaire λf a pour matrice associée $\lambda\mathbf{M}$ relativement aux mêmes bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

4.3 Composition d'application

Proposition :

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On suppose *E, F* et *G* munis respectivement des bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$.Soit $\mathbf{M}_f$ la matrice associée à *f* relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Soit $\mathbf{M}_g$ la matrice associée à *g* relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$. Alors $h = g \circ f$ admet $\mathbf{M}_g\mathbf{M}_f$ comme matrice associée relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$.

4.4 Inverse d'une application linéaire

Définition

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application bijective et $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ son application réciproque.

Soit $\mathbf{M}_f$ la matrice associée à *f* relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Alors la matrice associée à f^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$ est $\mathbf{M}_f^{-1}$ où $\mathbf{M}_f^{-1}$ est la matrice inverse de $\mathbf{M}_f$.

Proposition 1

Une application linéaire *f* est *bijective* si et seulement si sa matrice associée $\mathbf{M}_f$ **relativement à deux bases quelconques** est *inversible*.

Proposition 2

Une application linéaire f est bijective si et seulement si il existe des bases B_E et B_F telles que $\det(\mathbf{M}_f) \neq 0$ où $\mathbf{M}_f$ est la matrice de f relativement aux bases B_E et B_F.

5 Les applications linéaires les plus classiques de $\mathbb{R}^2$

5.1 L'homothétie de rapport λ

Notons H_λ l'homothétie de rapport λ :

$$\begin{array}{llll} H_\lambda : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{x} & \mapsto & H_\lambda(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \end{array} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

5.2 La symétrie définie par $s(x,y) = (x,-y)$

Notons s la symétrie définie par :

$$\begin{array}{llll} s : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{x} = (x_1, x_2) & \mapsto & \vec{y} = (y_1, y_2) = (x_1, -x_2) \end{array} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.3 La symétrie définie par $s(x,y) = (-x,-y)$

Notons de nouveau s la symétrie définie par :

$$\begin{array}{llll} s : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{x} = (x_1, x_2) & \mapsto & \vec{y} = (y_1, y_2) = (-x_1, -x_2) = -\vec{x} \end{array} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.4 La rotation d'angle θ

Notons r_θ la rotation d'angle θ :

$$\begin{array}{llll} r_\theta : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{x} = (x_1, x_2) & \mapsto & \vec{y} = (y_1, y_2) \text{ avec } \begin{cases} \|\vec{y}\| = \|\vec{x}\| \\ \widehat{(\vec{x}, \vec{y})} = \theta \end{cases} \end{array} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

6 Résolution d'un système linéaire

6.1 Quelques définitions

Définition 1

On appelle **système linéaire** un système (S) de n équations linéaires à p inconnues dans $\mathbb{R}$ qui s'écrit sous la forme :

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où les coefficients a_{ij} et b_i appartiennent à $\mathbb{R}$, et où les x_j sont les **inconnues** à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $i = 1, n$ (le nombre d'équations) et $j = 1, p$ (le nombre d'inconnues).

Définition 2 : **Définition matricielle de (*S*)**

Un système (*S*) quelconque peut s'écrire sous la forme abrégée : $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1, n$

ou sous la forme matricielle $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ avec $\mathbf{A}_{(n,p)} = \left[a_{ij}\right]$, $\mathbf{B}_{(n,1)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $\mathbf{X}_{(p,1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Définition 3 : **Définition de (*S*) par les applications linéaires**

• **A** est en fait la matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}\left(E, F\right)$, où :

- *E* est un espace de dimension *p* (nombre d'inconnues de (*S*) = nombre de colonnes de A)
- *F* un espace de dimension *n* (nombre d'équations de (*S*) = nombre de lignes de A).

• **B** est la matrice des coordonnées d'un vecteur $\vec{v} \in F$

• **X** est la matrice des coordonnées d'un vecteur $\vec{u} \in E$

Alors l'écriture matricielle peut se mettre sous forme vectorielle : $\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow f\left(\vec{u}\right) = \vec{v}$

6.2 Recherche des solutions de (*S*)

Si on considère l'expression vectorielle $f\left(\vec{u}\right) = \vec{v}$, la résolution du système (*S*) revient alors à chercher tous les $\vec{u}$ satisfaisant cette équation, le vecteur $\vec{v}$ étant connu *a priori*.

Deux cas peuvent alors se présenter :

(1) $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$ et il admet au moins un antécédent dans E ; le système (S) a des solutions ;

⇨ Si $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$ et si f **non bijective**, alors (S) admet une **infinité de solutions**.

⇨ Si $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$ et f **bijective**, alors nécessairement $\dim E = \dim F$ (*i.e.*, $n = p$), et tout élément de F possède un antécédent unique dans E : (S) admet **une seule et unique solution**.

(2) $\vec{v} \notin \operatorname{Im} f$ et le système (S) est impossible à résoudre : il n'y a pas de solutions.

6.3 Résolution de (S) par inversion de matrice

On se place dans le cas où $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$ et f bijective. Le système $f(\vec{u}) = \vec{v}$ admet alors une solution unique. Or $f(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \mathbf{AX} = \mathbf{B}$. f étant bijective, $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ et $\mathbf{A}$ est inversible :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

Les systèmes linéaires s'utilisent par conséquent pour inverser des matrices.

6.4 La méthode de Cramer

Définition

On appelle **système de Cramer** un système de n équations à n inconnues ($n = p$) dont la matrice est inversible (une solution unique), c'est-à-dire telle que $\Delta = \det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Proposition

Un système de Cramer admet toujours une et une seule solution : $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{\Delta}\,{}^{t}(adj\mathbf{A}).\mathbf{B}$,

soit $\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}} = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} X_{ji} b_j$, $\forall i = 1, n$. Δ_i est le déterminant déduit de Δ en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de Δ par la colonne des « seconds membres » b_j.

6.5 « Cas embêtants »

7 Changement de base

Problématique

La matrice d'une application linéaire *f* est toujours construite relativement à un choix de bases dans *E* et dans *F*. Comment relier deux matrices qui représentent la même application linéaire lorsque l'on change de bases pour *E* et *F* ?

7.1 Matrice de passage

Définition

On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}_E$ à la base $\mathcal{B}'_E$, la matrice notée $\mathbf{P}$ dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $\vec{u}'_j$ de la base $\mathcal{B}'_E$ dans la base $\mathcal{B}_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \vec{u}'_1 & \vec{u}'_2 & \ldots & \vec{u}'_n \end{array} \\ & \left(\begin{array}{cccc} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{array} \right) \begin{array}{c} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \vec{u}_n \end{array} \end{array}$$

<u>*Proposition*</u>

Une matrice de passage est toujours inversible.

7.2 Changement de base pour un vecteur

On note $\mathbf{X}$ la matrice colonne des coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}_E$.

On note $\mathbf{X}'$ la matrice colonne des coordonnées $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}'_E$.

Il est facile de déterminer les relations entre les $\{x_j\}$ et les $\{x'_j\}$ à l'aide de la matrice de passage $\mathbf{P}$: $\boxed{\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}' \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathbf{X}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}}$

7.3 Changement de base pour une application linéaire

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire.

Soient $\mathcal{B}_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ et $\mathcal{B}'_E = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \ldots, \vec{u}'_n\}$ deux bases de *E*.

Soient $\mathcal{B}_F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ et $\mathcal{B}'_F = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \ldots, \vec{v}'_p\}$ deux bases de *F*.

On note **P** la matrice de passage de $\mathcal{B}_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ vers $\mathcal{B}'_E = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \ldots, \vec{u}'_n\}$.

On note **Q** la matrice de passage de $\mathcal{B}_F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ vers $\mathcal{B}'_F = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \ldots, \vec{v}'_p\}$.

Si $\mathbf{M}_f$ est la matrice de l'application *f* relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, alors $\mathbf{M}'_f$ la matrice de *f* relativement aux bases $\mathcal{B}'_E$ et $\mathcal{B}'_F$ est donnée par :

$$\boxed{\mathbf{M}'_f = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}_f\mathbf{P}}$$

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,E)$, un **endomorphisme** de *E*, et $\mathcal{B}_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$, $\mathcal{B}'_E = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \ldots, \vec{u}'_n\}$ deux bases de *E*. Soient $\mathbf{M}_f$ la matrice de *f* relativement à la base $\mathcal{B}_E$ et $\mathbf{M}'_f$ la matrice de *f* relativement à la base $\mathcal{B}'_E$. On a alors $\mathbf{M}'_f = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}_f\mathbf{P}$.