Chapitre 3bis : Applications linéaires et Matrices

Sandrine CHARLES : scharles@biomserv.univ-lyon1.fr

Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la notion d'application linéaire est indépendante de la notion de base d'un espace vectoriel. Toutefois, travailler avec des applications linéaires dont les espaces vectoriels sont munis d'une base, permet d'énoncer, comme nous allons le découvrir, d'autres propriétés très intéressantes.

1 Application linéaire et base

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Supposons que E soit muni de la base $\mathcal{B}_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$. Alors $\dim(E) = p$ et $\forall \vec{x} \in E$, $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_p\vec{u}_p$.

Ainsi :

$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_p\vec{u}_p) = x_1 f(\vec{u}_1) + x_2 f(\vec{u}_2) + \ldots + x_p f(\vec{u}_p)$$

⇨ Cette expression montre que l'application linéaire f est entièrement définie par les images $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \ldots, f(\vec{u}_p)\}$ des vecteurs de la base de E.

Ceci signifie également que si l'on connaît tous les $f(\vec{u}_i)$ pour $i = 1, \ldots, p$, alors on connaît un quelconque $f(\vec{x})$.

2 Matrice d'application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

E est muni de la base $\mathcal{B}_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$: $\dim(E) = p$

F est muni de la base $\mathcal{B}_F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$: $\dim(F) = n$

Les images $f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \ldots, f(\vec{u}_p)$ des vecteurs de la base de E sont éléments de F et se décomposent dans $\mathcal{B}_F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$:

$$f(\vec{u}_1) = a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{v}_n$$

soit d'une manière générale $f(\vec{u}_j) = a_{1j}\vec{v}_1 + a_{2j}\vec{v}_2 + \ldots + a_{nj}\vec{v}_n \quad \forall j = 1, p$

Dans le terme général a_{ij}, i correspond à un vecteur de la base de F et j à un vecteur de la base de E.

Définition 1

$\left(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}\right)$ sont les coordonnées du vecteur $f\left(\vec{u}_j\right)$ dans la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$.

Définition 2

La **matrice** de l'application $f: \quad E \to F$ **relativement aux bases** $B_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ de *E* et $B_F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ de *F*, est le tableau à *n* lignes et *p* colonnes des coordonnées des $f\left(\vec{u}_j\right)$ dans la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2) & \dots & f(\vec{u}_p) \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_p \end{array} \end{array}$$

Conséquences

A a pour dimension (n, p) :

- Le nombre de lignes de **A** est donné par la dimension de *F*.
- Le nombre de colonnes de **A** est donné par la dimension de *E*.
- Les colonnes de **A** sont les coordonnées des vecteurs $f\left(\vec{u}_j\right)$ dans la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$.

Exemple

Considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^3 && \to && \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2, x_3) && \mapsto && (x_1 - x_2, 2x_2 + 3x_3) \end{aligned}$$

Déterminer la matrice associée à *f* relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Réponse.

3 Image d'un vecteur $\vec{x}$ de E par f

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

E est muni de la base $B_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ et *F* est muni de la base $B_F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$.

Soit $\mathbf{A}(n, p) = \left[a_{ij}\right]$ la matrice associée à *f* relativement aux bases B_E et B_F.

Soit $\vec{x}$ un vecteur de E : $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_p\vec{u}_p$. On appelle $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées du vecteur $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}_E$.

Soit $\vec{y} = f(\vec{x})$, l'image de $\vec{x}$ par f : $\vec{y} \in F \Rightarrow \vec{y} = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + \ldots + y_n\vec{v}_n$. On appelle $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées du vecteur $\vec{y}$ dans $\mathcal{B}_F$.

⇨ L'objectif est d'exprimer $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ en fonction de $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{u}_1) + x_2 f(\vec{u}_2) + \ldots + x_p f(\vec{u}_p)$ car f est une application linéaire

$= x_1(a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{v}_n) + x_2(a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{v}_n) + \ldots + x_p(a_{1p}\vec{v}_1 + a_{2p}\vec{v}_2 + \ldots + a_{np}\vec{v}_n)$

On regroupe les termes en fonction de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$:

$$f(\vec{x}) = (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_pa_{1p})\vec{v}_1 + (x_1a_{21} + x_2a_{22} + \ldots + x_pa_{2p})\vec{v}_2 + \ldots + (x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \ldots + x_pa_{np})\vec{v}_n$$

Or $f(\vec{x}) = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + \ldots + y_n\vec{v}_n$, et donc par identification des deux expressions de $f(\vec{x})$, il vient :

$$\begin{cases} y_1 = x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_pa_{1p} \\ y_2 = x_1a_{21} + x_2a_{22} + \ldots + x_pa_{2p} \\ \vdots \\ y_p = x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \ldots + x_pa_{np} \end{cases}$$

En utilisant la matrice $\mathbf{A}(n,p)$, il vient : $\boxed{\mathbf{Y} = \mathbf{AX}}$.

<u>Exemple</u>

Considérons la matrice suivante associée à f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Voir exemple précédent. Calculer l'image de $\vec{x} = (1,-1,1)$ par f. Réponse.

4 Lien entre opérations sur les applications linéaires et opérations sur les matrices

On suppose dans tout ce paragraphe que E est un espace vectoriel muni de la base $B_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ et que F est un espace vectoriel muni de la base $B_F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$.

4.1 Addition de deux applications linéaires

<u>Proposition</u>

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$. Soient $\mathbf{M}_f$ et $\mathbf{M}_g$ leurs matrices associées relativement aux bases B_E et B_F. Alors $f+g : E \to F$ a pour matrice associée relativement aux bases B_E et B_F $\mathbf{M}_f + \mathbf{M}_g$.

<u>Exemple</u>

Considérons deux applications linéaires f et g définies comme suit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_1, u_2) & \mapsto & (3u_1 + u_2, u_1 - u_2) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (v_1, v_2) & \mapsto & (v_1 + 2v_2, -3v_1 + v_2) \end{array}$$

Calculer la matrice associée à l'application linéaire $f+g$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Réponse.

4.2 Multiplication par un scalaire

<u>Proposition :</u>

Soit $f : E \to F$ une application linéaire ayant $\mathbf{M}$ pour matrice associée relativement aux bases B_E et B_F. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors l'application linéaire λf a pour matrice associée $\lambda\mathbf{M}$ relativement aux mêmes bases B_E et B_F.

<u>Exemple</u>

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_1, u_2) & \mapsto & (3u_1 + u_2, u_1 - u_2) \end{array}$$

Déterminer la matrice associée à l'application linéaire λf relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Réponse.

4.3 Composition d'application

Proposition :

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On suppose *E*, *F* et *G* munis respectivement des bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$. Soit $\mathbf{M}_f$ la matrice associée à *f* relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Soit $\mathbf{M}_g$ la matrice associée à *g* relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$. Alors $h = g \circ f$ admet $\mathbf{M}_f \mathbf{M}_g$ comme matrice associée relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$.

$$h : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$
$$\mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y} = \mathbf{M}_f \mathbf{X} \mapsto \mathbf{Z} = \mathbf{M}_g \mathbf{Y} = \mathbf{M}_g \left(\mathbf{M}_f \mathbf{X}\right) = \left(\mathbf{M}_g \mathbf{M}_f\right)\mathbf{X}$$

Remarques

1. La multiplication de deux matrices équivaut à la composition de deux applications linéaires.
2. Le fait que la composition de deux applications ne commute pas est liée à la non commutativité du produit matriciel.

Exemple

Considérons deux applications linéaires *f* et *g* définies comme suit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_1, u_2) & \mapsto & (3u_1 + u_2, u_1 - u_2) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (v_1, v_2) & \mapsto & (v_1 + 2v_2, -3v_1 + v_2) \end{array}$$

Déterminer la matrice de l'application linéaire $g \circ f$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Réponse.

4.4 Inverse d'une application linéaire

Définition

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application bijective et $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ son application réciproque. Soit $\mathbf{M}_f$ la matrice associée à *f* relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Alors la matrice associée à f^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$ est $\mathbf{M}_f^{-1}$ où $\mathbf{M}_f^{-1}$ est la matrice inverse de $\mathbf{M}_f$.

Proposition 1

Une application linéaire f est *bijective* si et seulement si sa matrice associée $\mathbf{M}_f$ **relativement à deux bases quelconques** est *inversible*.

Exemple

Considérons l'application linéaire définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_1,u_2) & \mapsto & (v_1,v_2)=(2u_1-u_2,u_1) \end{array}$$

Déterminer la matrice associée à f^{-1}. Réponse.

Proposition 2

Une application linéaire f est bijective si et seulement si il existe des bases B_E et B_F telles que $\det\left(\mathbf{M}_f\right)\neq 0$ où $\mathbf{M}_f$ est la matrice de f relativement aux bases B_E et B_F.

5 *Les applications linéaires les plus classiques de* $\mathbb{R}^2$

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, muni de la base canonique $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$. Dans les trois exemples suivants on abordera successivement les points suivants : (1) Montrer que l'application considérée est linéaire ; (2) Déterminer la matrice $\mathbf{A}$ associée à l'application relativement à la base $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$; (3) Calculer l'image d'un vecteur quelconque $\vec{x}=(x_1,x_2)$ par cette application ; (4) Donner une représentation graphique.

5.1 L'homothétie de rapport λ

Notons H_λ l'homothétie de rapport λ :

$$H_\lambda: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} & \mapsto & H_\lambda(\vec{x})=\lambda\vec{x} \end{array}$$

On dit que $H_\lambda(\vec{x})$ est ***colinéaire*** à $\vec{x}$

(1) Soient $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} H_\lambda(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) &= \lambda(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\lambda\alpha\vec{x}+\lambda\beta\vec{y}=\alpha(\lambda\vec{x})+\beta(\lambda\vec{y}) \\ &= \alpha H_\lambda(\vec{x})+\beta H_\lambda(\vec{y}) \end{aligned}$$

L'homothétie de rapport λ est bien une application linéaire.

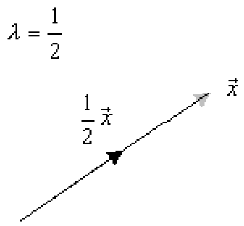
(2) $H_\lambda(\vec{e}_1) = \lambda\vec{e}_1 = (\lambda, 0)$ $\quad H_\lambda(\vec{e}_2) = \lambda\vec{e}_2 = (0, \lambda)$ $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

(3) Soit $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Notons $\mathbf{Y}$ la matrice colonne des coordonnées du vecteur image de $\vec{x}$ par H_λ :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

(4)



5.2 La symétrie définie par $s(x, y) = (x, -y)$

Notons s la symétrie définie par :

$$\begin{array}{llll} s: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{x} = (x_1, x_2) & \mapsto & \vec{y} = (y_1, y_2) = (x_1, -x_2) \end{array}$$

(1) Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Notons $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2)$:

$$\begin{aligned} s(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= s\left[\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2)\right] \\ &= s(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1, -\alpha x_2 - \beta y_2) \\ &= \alpha(x_1, -x_2) + \beta(y_1, -y_2) \\ &= \alpha s(\vec{x}) + \beta s(\vec{y}) \end{aligned}$$

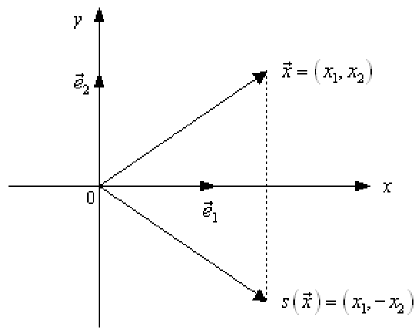
La symétrie s est donc bien une application linéaire.

(2) $s(\vec{e}_1) = (1, 0) = \vec{e}_1$ $\quad s(\vec{e}_2) = (0, -1) = -\vec{e}_2$ $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(3) Soit $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Notons $\mathbf{Y}$ la matrice colonne des coordonnées de l'image de $\vec{x}$ par s :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

(4)



On appelle également s la **symétrie d'axe *0x***, l'axe *0x* est défini comme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=0\}$; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

5.3 La symétrie définie par $s(x,y)=(-x,-y)$

Notons de nouveau *s* la symétrie définie par :

$$\begin{array}{rlcl} s: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{x}=(x_1,x_2) & \mapsto & \vec{y}=(y_1,y_2)=(-x_1,-x_2)=-\vec{x} \end{array}$$

(1) Soient $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:

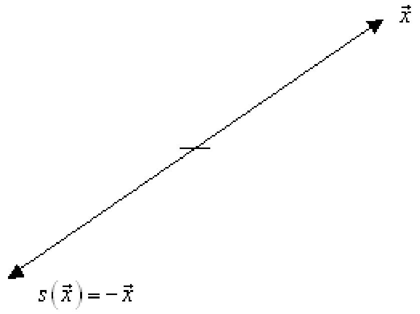
$$\begin{aligned} s(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) &= -(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) \\ &= \alpha(-\vec{x})+\beta(\vec{y}) \\ &= \alpha s(\vec{x})+\beta s(\vec{y}) \end{aligned}$$

La symétrie *s* est donc bien une application linéaire.

(2) $s(\vec{e}_1)=-\vec{e}_1=(-1,0)$ $\quad s(\vec{e}_2)=-\vec{e}_2=(0,-1)$ $\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

(3) Soit $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$. Notons $\mathbf{Y}$ la matrice colonne des coordonnées de l'image de $\vec{x}$ par *s* :

$$\mathbf{Y}=\mathbf{AX}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\end{pmatrix}$$



5.4 La rotation d'angle θ

Notons r_θ la rotation d'angle θ :

$$r_\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x}=(x_1,x_2) & \mapsto & \vec{y}=(y_1,y_2) \text{ avec } \begin{cases} \|\vec{y}\| = \|\vec{x}\| \\ \widehat{(\vec{x},\vec{y})} = \theta \end{cases} \end{array}$$

$\|\vec{x}\|$ représente la ***norme*** du vecteur $\vec{x}$, autrement dit sa ***longueur***. Cette notion sera présentée au chapitre 5 dans un cadre plus général.

Pour mémoire, disons simplement que :

$$\boxed{\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2}$$

(1) Nous admettrons que rotation d'angle θ est donc bien une application linéaire.

(2) $r_\theta(\vec{e}_1) = (\cos\theta, \sin\theta)$ $\quad$ $r_\theta(\vec{e}_2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ $\quad$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(3) Soit $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Notons $\mathbf{Y}$ la matrice colonne des coordonnées de l'image de $\vec{x}$ par r_θ :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix}$$

6 Résolution d'un système linéaire

6.1 Quelques définitions

Définition 1

On appelle **système linéaire** un système (S) de n équations linéaires à p inconnues dans $\mathbb{R}$ qui s'écrit sous la forme :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où les coefficients a_{ij} et b_i appartiennent à $\mathbb{R}$, et où les x_j sont les **inconnues** à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $i = 1, n$ (le nombre d'équations) et $j = 1, p$ (le nombre d'inconnues).

Définition 2 : **Définition matricielle de (*S*)**

Un système (*S*) quelconque peut s'écrire sous la forme abrégée :

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, n$$

ou sous la forme matricielle $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ avec $\mathbf{A}_{(n,p)} = \left[a_{ij}\right]$, $\mathbf{B}_{(n,1)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $\mathbf{X}_{(p,1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

<u>Exemple</u>

Le système (*S*) suivant est un système linéaire de **3** équations à **4** inconnues x, y, z, t :

$$(S) \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ x + y - \mathrm{z} + 2t = 1 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad \text{avec } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Définition 3 : **Définition de (*S*) par les applications linéaires**

• **A** est en fait la matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}\left(E, F\right)$, où :

- *E* est un espace de dimension *p* (nombre d'inconnues de (*S*) = nombre de colonnes de A)
- *F* un espace de dimension *n* (nombre d'équations de (*S*) = nombre de lignes de A).

• **B** est la matrice des coordonnées d'un vecteur $\vec{v} \in F$

• **X** est la matrice des coordonnées d'un vecteur $\vec{u} \in E$

Alors l'écriture matricielle peut se mettre sous forme vectorielle :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow f\left(\vec{u}\right) = \vec{v}$$

6.2 Recherche des solutions de (*S*)

Si on considère l'expression vectorielle $f\left(\vec{u}\right) = \vec{v}$, la résolution du système (*S*) revient alors à chercher tous les $\vec{u}$ satisfaisant cette équation, le vecteur $\vec{v}$ étant connu *a priori*.

Deux cas peuvent alors se présenter :

(1) $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$ et il admet au moins un antécédent dans E ; le système (S) a des solutions ;

(2) $\vec{v} \notin \operatorname{Im} f$ et le système (S) est impossible à résoudre : il n'y a pas de solutions.

Ainsi (S) admet des solutions si et seulement si $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$.

Le nombre de solutions dépend alors de la nature de f :

• Si $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$ et si f **non bijective**, alors $\ker f \neq \left\{\vec{0}\right\}$ (ceci est vrai uniquement si E et F ont même dimension).

Soit $\vec{w} \neq \vec{0}$ tel que $\vec{w} \in \ker f$. Alors $f\left(\vec{w}\right) = \vec{0}$.

Considérons $f\left(\vec{u}+\vec{w}\right)$: $f\left(\vec{u}+\vec{w}\right) = f\left(\vec{u}\right) + f\left(\vec{w}\right) = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.

Donc $\vec{u}+\vec{w}$ est solution de (S).

On montrerait de même que tout vecteur $\vec{u}+\lambda\vec{w}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) est solution.

⇨ Si $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$ et si f **non bijective**, alors (S) admet une **infinité de solutions**.

• Si $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$ et f **bijective**, alors nécessairement $\dim E = \dim F$ (*i.e.*, $n = p$), et tout élément de F possède un antécédent unique dans E : (S) admet **une seule et unique solution**.

<u>Exemple</u>

Déterminer le nombre de solutions du système $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$. <u>Réponse</u>

6.3 Résolution de (S) par inversion de matrice

On se place dans le cas où $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$ et f bijective. Le système $f\left(\vec{u}\right) = \vec{v}$ admet alors une solution unique.

Or $f\left(\vec{u}\right) = \vec{v} \Leftrightarrow \mathbf{AX} = \mathbf{B}$. f étant bijective, $\det\left(\mathbf{A}\right) \neq 0$ et $\mathbf{A}$ est inversible :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

<u>Exemple</u>

Résoudre le système $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$. <u>Réponse</u>

Les systèmes linéaires s'utilisent par conséquent pour inverser des matrices.

6.4 La méthode de Cramer

Définition

On appelle **système de Cramer** un système de n équations à n inconnues ($n = p$) dont la matrice est inversible (une solution unique), c'est-à-dire telle que $\Delta = \det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Δ est appelé déterminant du système.

Proposition

Un système de Cramer admet toujours une et une seule solution :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{\Delta}\,{}^t(adj\mathbf{A}).\mathbf{B} \qquad \text{(R)}$$

Conséquences

D'après la relation (R), on a :

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\Delta}\,{}^t\left[X_{ij}\right]\mathbf{B} = \frac{1}{\Delta}\left[X_{ji}\right]\mathbf{B}$$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{n1} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

X_{ij} étant le cofacteur associé à a_{ij}, avec $i, j = 1, n$.

La première ligne de la relation (R) est : $x_1 = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} X_{j1} b_j$

➔ $\sum_{j=1}^{n} X_{j1} b_j$ n'est autre que le déterminant d'ordre n obtenu en remplaçant **dans** Δ, la première colonne par la matrice colonne **B**.

En effet :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} X_{j1} a_{j1} \quad \text{en développant / 1}^{\text{ère}} \text{ colonne}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} X_{j1} b_j \text{ en développant / } 1^{\text{ère}} \text{ colonne}$$

Donc $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, et par généralisation, on obtient :

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} X_{ji} b_j \qquad \forall i = 1, n$$

Δ_i est le déterminant déduit de Δ en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de Δ par la colonne des « seconds membres » b_j .

Exemples

1. Résoudre par la méthode de Cramer le système $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$. Réponse

2. Résoudre de deux façons différentes le système $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases}$.

Résolution par inversion de matrice Résolution par la méthode de Cramer

6.5 « Cas embêtants »

Les « cas embêtants » sont ceux pour lesquels, soit $\vec{v} \notin \text{Im } f$ (pas de solution), soit $\vec{v} \in \text{Im } f$ mais f non bijective (une infinité de solutions).

Nous traiterons ces deux cas à partir de deux exemples.

Exemples

1. Résoudre $\begin{cases} x + y + 3z + 5t = 1 \\ x + 2y + 5z + 9t = 2 \\ 2x + 3y + 8z + 14t = 1 \end{cases}$. Réponse

2. Résoudre $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ -x + 3y - z = -1 \end{cases}$. Réponse

7 Changement de base

Problématique

La matrice d'une application linéaire *f* est toujours construite relativement à un choix de bases dans *E* et dans *F*. Comment relier deux matrices qui représentent la même application linéaire lorsque l'on change de bases pour *E* et *F* ?

Soit *E* un espace vectoriel de dimension *n* muni de deux bases : $B_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ et $B'_E = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \ldots, \vec{u}'_n\}$ où B_E est par convention *l'ancienne* base et B'_E *la nouvelle* base.

On pose $\vec{u}'_j = p_{1j}\vec{u}_1 + p_{2j}\vec{u}_2 + \ldots + p_{nj}\vec{u}_n \quad \forall j = 1, n$. Ainsi les $\{p_{ij}\}$ avec $i = 1, n$ sont les coordonnées des $\vec{u}'_j$ de la base B'_E dans la base $B_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$.

7.1 Matrice de passage

Définition

On appelle matrice de passage de la base B_E à la base B'_E, la matrice notée **P** dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $\vec{u}'_j$ de la base B'_E dans la base $B_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{u}'_1 & \vec{u}'_2 & \ldots & \vec{u}'_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \vec{u}_n \end{array}$$

Remarques

1. La matrice **P** est nécessairement une matrice carrée d'ordre égal à la dimension de *E*.
2. **P** est en fait, la matrice associée à l'application linéaire identité Id_E relativement aux bases B'_E et B_E.

Proposition

Une matrice de passage est toujours inversible.

7.2 Changement de base pour un vecteur

Soit de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (les « anciennes » coordonnées) dans la base $B_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ et de coordonnées $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ (les « nouvelles » coordonnées) dans la base $B'_E = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \dots, \vec{u}'_n\}$.

On note $\mathbf{X}$ la matrice colonne des coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\vec{x}$ dans B_E.

On note $\mathbf{X}'$ la matrice colonne des coordonnées $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ de $\vec{x}$ dans B'_E.

Il est facile de déterminer les relations entre les $\{x_j\}$ et les $\{x'_j\}$ à l'aide de la matrice de passage $\mathbf{P}$:

$$\boxed{\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}' \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathbf{X}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}}$$

➔ On pourra retenir la petite phrase : « *les anciennes* = **P** × *les nouvelles* ».

Exemple

On considère $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base canonique $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Soit $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ une autre base de $\mathbb{R}^3$ avec :

$$\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \qquad \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \qquad \vec{e}'_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

Calculer les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$. Réponse.

7.3 Changement de base pour une application linéaire

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire.

Soient $\mathcal{B}_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ et $\mathcal{B}'_E = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \ldots, \vec{u}'_n\}$ deux bases de E.

Soient $\mathcal{B}_F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ et $\mathcal{B}'_F = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \ldots, \vec{v}'_p\}$ deux bases de F.

On note **P** la matrice de passage de $\mathcal{B}_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ vers $\mathcal{B}'_E = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \ldots, \vec{u}'_n\}$.

On note **Q** la matrice de passage de $\mathcal{B}_F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ vers $\mathcal{B}'_F = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \ldots, \vec{v}'_p\}$.

Si $\mathbf{M}_f$ est la matrice de l'application f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, alors $\mathbf{M}'_f$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'_E$ et $\mathcal{B}'_F$ est donnée par :

$$\boxed{\mathbf{M}'_f = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}_f\mathbf{P}}$$

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,E)$, un **endomorphisme** de E, et $\mathcal{B}_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$, $\mathcal{B}'_E = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \ldots, \vec{u}'_n\}$ deux bases de E. Soient $\mathbf{M}_f$ la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}_E$ et $\mathbf{M}'_f$ la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'_E$. On a alors $\mathbf{M}'_f = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}_f\mathbf{P}$.

<u>Exemple</u>

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, une application linéaire dont la matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est $\mathbf{M}_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice de changement de base de l'exemple précédent.

Déterminer la matrice $\mathbf{M}'_f$ de l'application linéaire f dans la nouvelle base. Réponse.

7.4 Matrices semblables

Définition

On dit que deux matrices carrées **A** et **B** de même ordre sont **semblables** s'il existe une matrice **P** inversible telle que $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. Les matrices **A**, **B**, **P** ont même dimension.

Notation : $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$

Propriétés

Soient **A**, **B** et **C** trois matrices carrées d'ordre *n* :

(i) $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{B} \sim \mathbf{A}$

(ii) $\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ avec $\mathbf{P} = \mathbf{I}_n$

(iii) Si $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$, alors $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$

Conséquence

Dans le corollaire du paragraphe précédent, les matrices $\mathbf{M}_f$ et $\mathbf{M}'_f$ sont semblables. Ainsi, deux matrices sont *semblables* si elles représentent la *même* application linéaire, mais dans des bases différentes.

8 Exemples d'utilisation en biologie

8.1 Le champ de blé (suite)

Soit *f* l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

On rappelle que $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}$. Revoir.

- Montrons que l'image par *f* d'un élément de P est un élément de P :

  Soient $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1)$ élément de P vérifiant donc $x_1 + y_1 + z_1 = 1$:

  $f(\vec{x})$ se calcule par $\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3/4 \\ x_2 + x_3/4 \\ x_3/2 \end{pmatrix}$

On vérifie alors que $(x_1+x_3/4)+(x_2+x_3/4)+x_3/2 = x_1+x_2+\underbrace{(x_3/4+x_3/4+x_3/2)}_{=x_3}=1$

Donc $f(\vec{x}) \in P$.

- Soit $P_0 = (1/3, 1/3, 1/3)$ élément de P . On note $P_{n+1} = f(P_n)$, *i.e.*, $P_{n+1} = \mathbf{A}P_n$ (si on confond le vecteur et la matrice colonne de ses coordonnées) :
  - $P_0 = (1/3, 1/3, 1/3)$
  - $P_1 = f(P_0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/12 \\ 5/12 \\ 1/6 \end{pmatrix}$
  - $P_2 = f(P_1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/12 \\ 5/12 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/24 \\ 11/24 \\ 1/12 \end{pmatrix}$

- On remarque à partir du calcul précédent que la fréquence de A_3 est égale à $1/(3\times 2)$ dans P_1 et à $1/(3\times 2^2)$ dans P_2. On montre par récurrence que la fréquence de A_3 est égale à $1/(3\times 2^n)$ dans P_n :

1) Pour $n=0$, $1/(3\times 2^0) = 1/3$ c'est bien la fréquence de A_3 dans P_0.
2) Supposons que la fréquence de A_3 soit égale à $1/(3\times 2^n)$ dans P_n. On sait que $P_{n+1} = \mathbf{A}P_n$. Si $P_n = (a, b, 1/(3\times 2^n))$, alors :

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1/(3\times 2^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 1/(3\times 2^{n+1}) \end{pmatrix}$$

3) On peut donc conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$, la fréquence de A_3 dans P_n est égale à $1/(3\times 2^n)$.

- On constate par ailleurs que l'on a toujours $f_1 = f_2$. Si c'est vrai alors :

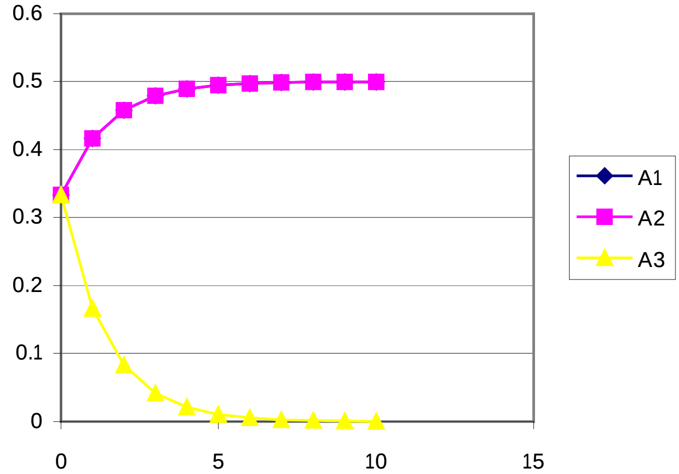
$$f_1 + f_2 + f_3 = 1 \Leftrightarrow 2f_1 = 1 - f_3 \Leftrightarrow \boxed{f_1 = f_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\times 2^{n+1}}}$$

On pourrait aussi montrer ce résultat par récurrence.

D'un point de vue mathématique, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$, ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_3 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{1,2} = \frac{1}{2}$.

D'un point de vue biologique, au bout d'un certain temps, la population ne contiendra plus que des plantes de type A_1 et A_2, qui seront d'ailleurs en proportions égales à 50% ; le type A_3 aura disparu.

Voici une simulation qui permet de le vérifier :



Remarque : Les courbes A_1 et A_2 sont confondues.

8.2 L'alimentation des herbivores et ruminants

Un éleveur de bovins dispose en hiver de trois aliments (foin, ensilé, farine) qui contiennent chacun trois éléments nutritifs indispensables (A, B, C) selon le tableau suivant (unités arbitraires) :

http://www.interviandes.com/interviandes/elevage/alimentation.html

	Foin	Ensilé	Farine
A	1	1	1
B	1	1	0
C	0	1	1

Sachant que chaque animal doit quotidiennement disposer de 6 unités de A, 3 unités de B et 5 unités de C, on peut alors chercher les doses *x* de foins, *y* d'ensilé et *z* de farine que doit lui fournir l'éleveur. Pour cela, il faut résoudre le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x+y+z &= 6 \\ x+y &= 3 \\ y+z &= 5 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{AX}=\mathbf{B} \text{ avec } \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\ \mathbf{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B}=\begin{pmatrix}6\\3\\5\end{pmatrix}$$

$\det \mathbf{A} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, en développant par rapport à la première colonne.

Ainsi, $\det \mathbf{A} \neq 0$, la matrice **A** est donc *inversible* et l'application linéaire qui lui est associée est donc *bijective*.

En conséquence, on peut affirmer qu'il existe une solution *unique* au système (S) :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

Pour calculer $\mathbf{A}^{-1}$, il faut calculer $adj\mathbf{A} = \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -0 & +1 & -1 \\ +(-1) & -(-1) & +0 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(adj\mathbf{A})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On en conclut que l'éleveur devra donner 1 dose de foin, 2 doses d'ensilé et 3 doses de farines à chaque animal pour lui assurer un développement dans les meilleures conditions.