Synthèse 4 : Réduction des endomorphismes

Sandrine CHARLES : *scharles@biomserv.univ-lyon1.fr*

Introduction

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f un ***endomorphisme*** de E dans E. Dans ce nouveau chapitre, l'objectif est de chercher des bases de E pour lesquelles la forme de la matrice $\mathbf{M}_f$ soit *la plus simple possible* comme par exemple une matrice diagonale.

On dira que f est **diagonalisable** s'il existe une base B'_E telle que $\mathbf{M}'_f = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

1 Vecteurs et valeurs propres

La clef de la diagonalisation est la notion de vecteur propre. On rappelle que ce chapitre est consacré uniquement aux ***endomorphismes*** d'espaces vectoriels.

Définitions

Soit $f \in \mathcal{L}(E,E)$. Un vecteur $\vec{v} \in E$ est dit **vecteur propre** de f si :

(i) $\vec{v} \neq \vec{0}$

(ii) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$

Le scalaire λ est appelé **valeur propre** associée à $\vec{v}$.

<u>Théorème</u>

$f \in \mathcal{L}(E,E)$ est **diagonalisable** si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres.

2 Recherche des valeurs propres. Polynôme caractéristique.

Soit λ une valeur propre de f un endomorphisme de E dont la matrice associée est $\mathbf{M}_f$ relativement à la base $B_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$. Alors :

$$\det\left(\mathbf{M}_f - \lambda \mathbf{I}_n\right) = 0 \text{ avec } \mathbf{M}_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La condition pour que λ soit valeur propre s'écrit donc :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$$

Cette équation est appelée **équation caractéristique** et le polynôme du premier membre appelé **polynôme caractéristique** de f ; ce dernier est noté $\mathrm{P}_f(\lambda)$.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E,E)$ où E est un espace vectoriel de dimension n. Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme $\mathrm{P}_f(\lambda) = \det(\mathbf{M}_f - \lambda\mathbf{I}_n)$.

Définition

On dit que λ est une **valeur propre de multiplicité** α si λ est racine d'ordre α de $\mathrm{P}_f(\lambda)$.

3 Recherche des vecteurs propres

Une fois les valeurs propres calculées, on détermine les vecteurs propres en résolvant un système linéaire de la forme : $(\mathbf{M}_f - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{V} = \mathbf{0}$ où $\mathbf{V}$ est la matrice des coordonnées d'un vecteur propre $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ associé à la valeur propre λ. $\mathbf{0}$ est la matrice des coordonnées du vecteur nul $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$.

➔ Une fois déterminés les vecteurs propres, on peut vérifier qu'ils forment une base $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$, et que la matrice associée à l'application linéaire relativement à cette base est diagonale avec :

$$\mathbf{D}_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} & \\ & & \lambda_i & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\mathbf{0}$ signifie qu'en dehors de la diagonale tous les coefficients de $\mathbf{D}_{\mathcal{V}}$ sont nuls.

➔ La matrice de passage de la base $\mathcal{B}_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ à la base des vecteurs propres $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ est construite en mettant en colonne les coordonnées des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres :

$$\mathbf{P} = \left[\vec{v}_1 \;\vdots\; \vec{v}_2 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \vec{v}_p \right]$$

➔ Les matrices $\mathbf{M}_f$ de f relativement à la base $\mathcal{B}_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ et $\mathbf{D}_{\mathcal{V}}$ relativement à la base de vecteurs propres $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ sont semblables :

$$\mathbf{D}_{\mathcal{V}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}_f\mathbf{P}$$

4 Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E,E)$ diagonalisable. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de *f*. On note $E_\lambda = \{\vec{v} \in E / f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\}$. E_λ est un sous-espace vectoriel de *E* appelé **sous-espace propre** associé à λ.

Proposition

Soient *f* un endomorphisme diagonalisable de *E* et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de *f*. Alors le sous-espace propre E_λ associé à λ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de $f \in \mathcal{L}(E,E)$ diagonalisable. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E,E)$. Alors *f* est diagonalisable si et seulement si :

1. $\mathrm{P}_f(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}\ldots(\lambda-\lambda_p)^{\alpha_p}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n$
2. Pour chaque valeur propre λ_i de multiplicité α_i, on a : $\dim\left(E_{\lambda_i}\right) = \alpha_i$.

Corollaire 1

f est diagonalisable si et seulement si $\dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}) + \ldots + \dim(E_{\lambda_p})$

Corollaire 2

Si $\dim(E) = n$ et si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable.

5 Application : calcul de la puissance d'une matrice

Soit $f \in \mathcal{L}(E,E)$ diagonalisable et de matrice $\mathbf{M}$ relativement à la base $B_E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$. *f* étant diagonalisable, on sait qu'il existe deux matrices $\mathbf{D}$ diagonale et $\mathbf{P}$ inversible telles que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP}$ avec :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} & \\ & & \lambda_i & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de *f*. On rappelle que les colonnes de $\mathbf{P}$ sont les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres : $\mathbf{P} = \left[\vec{v}_1 \vdots \vec{v}_2 \vdots \cdots \vdots \vec{v}_p \right]$.

Par ailleurs $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP} \Leftrightarrow \mathbf{M} = \mathbf{PDP}^{-1}$.

- Calcul de la puissance *k* d'une matrice, $k \in \mathbb{R}$: $\boxed{\mathbf{M}^k = \mathbf{P}(\mathbf{D})^k \mathbf{P}^{-1}}$

avec :

$$(\mathbf{D})^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} & \\ & & \lambda_i^k & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$